Fundamentos de electrodinámica

N.N. FIÓDOROV

EDITORIAL MIR MOSCÚ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

Н. Н. ФЕДОРОВ

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

МОСКВА
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»

N. N. FIÓDOROV

Fundamentos de electrodinámica

MOSCÚ «MIR» 1982

Traducido del ruso por Klara Steinberg

Impreso en la URSS. 1982

На испанском языке

© Издательство «Высшая школа», 1980
© Traducción al español. Editorial Mir. 1982

Indice

Prefacio 15

Notación empleada en el libro 17

Capítulo 1. Ecuaciones integrales de electrodinámica 21

§ 1.1. El lugar que ocupa la electrodinámica entre otras asignaturas técnicas. La misión de la electrodinámica y las etapas principales de su desarrollo 21

§ 1.2. Sistema de unidades. Ley de Coulomb. Vector de intensidad del campo eléctrico E. Diferencia de potencial U. Teorema de Gauss para el vacío 23

§ 1.3. Teorema de Gauss para la sustancia. Vector de desplazamiento eléctrico D. Primera ecuación material del medio. Primera ecuación de continuidad 26

§ 1.4. Vector de la inducción magnética B. Relación del vector B con la corriente 34

§ 1.5. Influencia del campo magnético externo en la sustancia. Vector de intensidad del campo magnético H. Ley de la corriente total. Segunda ecuación material del medio. Segunda ecuación de continuidad 37

§ 1.6. Conductibilidad eléctrica del medio. Ley de Ohm en forma diferencial e integral. Corriente eléctrica extrínseca. Corriente de desplazamiento. Ley generalizada de la corriente total 45

§ 1.7. Teorema de Gauss para la sustancia en el caso de un medio conductor 50

§ 1.8. Ley de la inducción electromagnética de Faraday. Corriente magnética extrínseca. Permeancia del medio. Ley de la inducción electromagnética en forma ampliada. Dualidad de permutación de las ecuaciones integrales de electrodinámica 51

§ 1.9. Forma de la relación integral $\oint_{S_1} \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = Q_m$ en el caso de un medio con permeancia 55

§ 1.10. Amplitudes complejas de los vectores del campo, de las cargas y de las corrientes. Ecuaciones de electrodinámica para las amplitudes complejas en forma integral. Ecuaciones integrales de electrodinámica en el caso de señales espectrales 56

Capítulo 2. Ecuaciones diferenciales de electrodinámica 61

§ 2.1. Teorema de Ostrogradski—Gauss. Teorema de Stokes 61

§ 2.2. Paso de las ecuaciones integrales de electrodinámica a las diferenciales. Aplicación del principio de dualidad de permutación a las ecuaciones diferenciales de electrodinámica 63

§ 2.3. Ecuaciones diferenciales de electrodinámica en el caso de campos cuasiestáticos y estáticos 65
§ 2.4. Carácter dependiente de algunas ecuaciones de electrodinámica 66

Capítulo 3. Leyes fundamentales de electrotecnia como corolario de las ecuaciones de electrodinámica 67

§ 3.1. Deducción de la primera ley de Kirchhoff sobre la base de las ecuaciones de electrodinámica 67
§ 3.2. Deducción de la segunda ley de Kirchhoff sobre la base de las ecuaciones de electrodinámica 68

Capítulo 4. Correlaciones energéticas en electrodinámica 73

§ 4.1. Teorema de Poynting para los valores instantáneos de los vectores del campo 73
§ 4.2. Teorema de Poynting para las amplitudes complejas de los vectores del campo 77

Capítulo 5. Teorema de unicidad de solución de las ecuaciones de Maxwell 81

§ 5.1. Planteamiento del problema 81
§ 5.2. Teorema de unicidad de solución de las ecuaciones de Maxwell para un volumen limitado 82
§ 5.3. Teorema de unicidad de solución de las ecuaciones de Maxwell para un volumen ilimitado 85

Capítulo 6. Ecuaciones de onda y ecuaciones de Helmholtz para los vectores del campo 86

§ 6.1. Planteamiento del problema 86
§ 6.2. Ecuaciones de onda para los vectores del campo 86
§ 6.3. Ecuaciones de Helmholtz para los vectores del campo 89

Capítulo 7. Solución de las ecuaciones homogéneas de Helmholtz en el caso elemental de un medio isótropo homogéneo. Ondas planas 91

§ 7.1. Planteamiento del problema 91
§ 7.2. Determinación del tipo de las ecuaciones escalares correspondientes a las ecuaciones de Helmholtz en el sistema de coordenadas cartesianas 91
§ 7.3. Ondas planas 92
§ 7.4. Velocidad en grupo 99
§ 7.5. Propagación de ondas planas en distintos medios 103
§ 7.6. Polarización de ondas planas 107
§ 7.7. Ortogonalidad de los vectores $\mathbf{E}(t)$ y $\mathbf{H}(t)$ 110

Capítulo 8. Condiciones límites para los vectores del campo 112

§ 8.1. Planteamiento del problema 112
§ 8.2. Condiciones límites para las componentes normales de los vectores del campo 113
§ 8.3. Condiciones límites para las componentes tangenciales de los vectores del campo 115

Capítulo 9. Incidencia de una onda plana sobre la superficie de separación plana de dos medios como ejemplo de aplicación de las condiciones límites a la solución de un problema de contorno elemental 119

§ 9.1. Planteamiento del problema 119

§ 9.2. Deducción de las ecuaciones fundamentales. Leyes de Snell. Coeficientes de reflexión y de refracción 119

§ 9.3. Angulo de refracción total (ángulo de Brewster) 126

§ 9.4. Reflexión total interna 128

§ 9.5. Incidencia de la onda plana sobre la superficie de separación plana con un metal ideal 134

§ 9.6. Incidencia de la onda plana sobre la superficie de separación con un metal real 136

§ 9.7. Potencia de las pérdidas en un metal real 138

Capítulo 10. Cuadros del campo que aparecen junto al plano metálico ideal al incidir sobre éste una onda plana. Guía de ondas de dos planos 140

§ 10.1. Planteamiento del problema 140

§ 10.2. Primer caso. El vector E se encuentra en el plano de incidencia. Ondas del tipo eléctrico 140

§ 10.3. Segundo caso. El vector E es perpendicular al plano de incidencia. Ondas del tipo magnético 143

§ 10.4. Guía de ondas de dos planos 144

Capítulo 11. Nociones generales acerca de las ondas de tipo eléctrico y magnético 146

§ 11.1. Planteamiento del problema 146

§ 11.2. Sistema de ecuaciones escalares de Maxwell en el sistema de coordenadas curvilíneo ortogonal generalizado 147

§ 11.3. Ondas de tipo eléctrico y magnético 148

Capítulo 12. Nociones generales acerca de los procesos en guías de ondas, o sea en sistemas reales que canalizan el campo electromagnético 154

§ 12.1. Planteamiento del problema 154

§ 12.2. Datos fundamentales sobre los procesos en las guías de ondas rápidas 155

§ 12.3. Simplificación de las ecuaciones que enlazan las componentes transversales del campo con las longitudinales al usar guías de ondas rápidas 162

§ 12.4. Datos fundamentales sobre los procesos en las guías de ondas lentas 164

§ 12.5. Datos fundamentales sobre los procesos en las guías de ondas que canalizan ondas del tipo T 166

Capítulo 13. Guía de ondas rectangular 168

§ 13.1. Solución de la ecuación fundamental para las componentes longitudinales del campo en una guía de ondas rectangular 168

§ 13.2. Ondas del tipo eléctrico 170

§ 13.3 Ondas del tipo magnético 172
§ 13.4. Velocidad de fase, longitud de onda en la guía de ondas, longitud crítica de onda, frecuencia crítica. Ondas de los tipos fundamentales en una guía de ondas rectangular 175
§ 13.5. Condiciones de existencia de ondas de diferentes tipos en una guía de ondas rectangular 178
§ 13.6. Determinación de los cuadros del campo en una guía de ondas rectangular por medio de las condiciones límites junto a la superficie de un metal ideal 180
§ 13.7. Método analítico de construcción de cuadros del campo en una guía de ondas rectangular 187

Capítulo 14. Guía de ondas circular 190

§ 14.1. Solución de la ecuación fundamental para las componentes longitudinales del campo en una guía de ondas circular 190
§ 14.2. Ondas del tipo eléctrico 195
§ 14.3. Ondas del tipo magnético 197
§ 14.4. Velocidad de fase, longitud de onda en la guía de ondas, longitud crítica de onda. Ondas de los tipos fundamentales en una guía de ondas circular 199
§ 14.5. Condiciones de existencia de ondas de diferentes tipos en una guía de ondas circular 200
§ 14.6. Cuadros del campo en una guía de ondas circular 201

Capítulo 15. Guía de ondas circular coaxial 202

§ 15.1. Tipos posibles de ondas en una guía de ondas circular coaxial 202
§ 15.2. Ondas del tipo T 203
§ 15.3. Ondas de los tipos eléctrico y magnético 205

Capítulo 16. Placa dieléctrica de extensión infinita como ejemplo de guía de ondas lentas 209

§ 16.1. Planteamiento del problema 209
§ 16.2. Deducción de las relaciones fundamentales 210
§ 16.3. Ondas pares e impares. Determinación de las ecuaciones trascendentes para los números de onda transversales 212
§ 16.4. Solución de las ecuaciones trascendentes y determinación de los números de onda transversales. Frecuencias críticas en el caso de ondas eléctricas de distintos tipos 213
§ 16.5. Coeficiente de retardo de las ondas superficiales 216
§ 16.6. Velocidad en grupo de las ondas superficiales 217
§ 16.7. Cuadros del campo en el caso de utilización de la placa dieléctrica como sistema retardador 219

Capítulo 17. Guía de ondas dieléctrica circular 219

§ 17.1. Planteamiento del problema 219
§ 17.2. Deducción de la ecuación fundamental para las componentes longitudinales del campo de una onda rápida dentro de una barra dieléctrica circular y solución de esta ecuación 220
§ 17.3. Deducción de la ecuación fundamental para las componentes longitudinales del campo de una onda lenta fuera de la barra dieléctrica y solución de esta ecuación 221

§ 17.4. Determinación de las componentes transversales del campo de las ondas rápida y lenta 223
§ 17.5. Determinación de los números de onda transversales g y p y del número de onda longitudinal h. Posibilidad de existencia por separado de las ondas de los tipos eléctrico y magnético 224

Capítulo 18. Guía de ondas circular en hélice 230

§ 18.1. Planteamiento del problema 230
§ 18.2. Deducción de la ecuación fundamental para las componentes longitudinales del campo y solución de esta ecuación. Componentes del campo en una guía de ondas en hélice 231
§ 18.3. Determinación de los números de onda transversal y longitudinal 234

Capítulo 19. Guía de ondas metálica con reentrante 237

§ 19.1. Planteamiento del problema 237
§ 19.2. Deducción de la ecuación fundamental para la componente longitudinal del campo eléctrico en una guía de ondas con reentrante y solución de esta ecuación 238
§ 19.3. Determinación de los números de onda transversal y longitudinal 242

Capítulo 20. Atenuación del campo en guías de ondas reales 245

§ 20.1. Planteamiento del problema 245
§ 20.2. Deducción de las ecuaciones para las potencias perdidas en el metal y en el dieléctrico en la guía de ondas. Determinación de los coeficientes de atenuación 245

Capítulo 21. Nociones generales sobre los resonadores de cavidad. Resonador de cavidad creado a base de una guía de ondas rectangular de ondas rápidas 250

§ 21.1. Nociones generales sobre los resonadores de cavidad 250
§ 21.2. Deducción de las expresiones para las componentes del campo del tipo eléctrico en el resonador creado sobre la base de una guía de ondas rectangular de ondas rápidas 252
§ 21.3. Deducción de las expresiones para las componentes del campo del tipo magnético en el resonador creado sobre la base de una guía de ondas rectangular de ondas rápidas 255
§ 21.4. Determinación de la frecuencia de resonancia y de los tipos fundamentales de ondas en el caso de ondas de los tipos eléctrico y magnético en el resonador creado sobre la base de una guía de ondas rectangular de ondas rápidas 257
§ 21.5. Condiciones de existencia en el resonador de ondas del tipo prefijado 259
§ 21.6. Cuadros del campo en un resonador rectangular 260

Capítulo 22. Resonador de cavidad creado sobre la base de una guía de ondas circular de ondas rápidas 262

§ 22.1. Deducción de las expresiones para las componentes del campo del tipo eléctrico en el resonador creado sobre la base de una guía de ondas circular de ondas rápidas 262
§ 22.2. Deducción de las expresiones para las componentes del campo del tipo magnético en el resonador creado sobre la base de una guía de ondas circular de ondas rápidas 264

§ 22.3. Determinación de la frecuencia de resonancia y de los tipos fundamentales de ondas en el caso de ondas de los tipos eléctrico y magnético en el resonador creado sobre la base de una guía de ondas circular de ondas rápidas 265
§ 22.4. Condiciones de existencia en el resonador de ondas del tipo prefijado 267
§ 22 5. Cuadros del campo en un resonador anular 267

Capítulo 23. Resonador de cavidad creado sobre la base de una guía de ondas circular coaxial 269

§ 23.1. Planteamiento del problema 269
§ 23.2. Deducción de las expresiones para las componentes del campo en un resonador de cavidad coaxial que trabaja a base de ondas del tipo T 269

Capítulo 24. Resonador de cavidad creado sobre la base de una guía de ondas lentas metalo-dieléctrica en forma de H 273

§ 24.1. Planteamiento del problema 273
§ 24.2. Deducción de las relaciones para las componentes del campo del tipo magnético en una guía de ondas lentas metalo-dieléctrica en forma de H 273
§ 24.3. Determinación de los componentes del campo en el resonador de cavidad creado sobre la base de una guía de ondas metalo-dieléctrica en forma de H en el caso de ondas pares del tipo magnético 274
§ 24.4. Determinación de los números de onda transversales g, p y de la frecuencia de resonancia de un resonador metalo-dieléctrico en forma de H 277

Capítulo 25. Factor de mérito de los resonadores de cavidad 279

§ 25.1. Planteamiento del problema 279
§ 25.2. Deducción de la expresión general para el factor de mérito de los resonadores de cavidad 279

Capítulo 26. Parámetros equivalentes de los resonadores de cavidad 282

§ 26.1. Planteamiento del problema 282
§ 26.2. Determinación de los parámetros equivalentes de los resonadores de cavidad 282

Capítulo 27. Potenciales del campo 285

§ 27.1. Planteamiento del problema 285
§ 27.2. Ecuaciones iniciales de la electrodinámica para los vectores del campo con la participación de corrientes extrínsecas. Potencial eléctrico vectorial 286
§ 27.3. Potencial magnético vectorial 291

Capítulo 28. Solución de las ecuaciones no homogéneas de Helmholtz 292

§ 28.1. Planteamiento del problema 292

§ 28.2. Descomposición de la ecuación vectorial de Helmholtz en ecuaciones escalares. Solución de la ecuación escalar homogénea de Helmholtz en el sistema de coordenadas esféricas 292

§ 28.3. El primero y el segundo teorema de Green 295

§ 28.4. Utilización del segundo teorema de Green con el fin de obtener la solución de la ecuación de Helmholtz para el potencial eléctrico vectorial. Condiciones de radiación 296

§ 28.5. Solución de la ecuación de Helmholtz para el potencial magnético vectorial 302

Capítulo 29. Vibrador eléctrico elemental 309

§ 29.1. Planteamiento del problema 309

§ 29.2. Determinación del potencial eléctrico vectorial en el campo del vibrador eléctrico elemental 304

§ 29.3. Determinación de las componentes del campo del vibrador eléctrico elemental 306

§ 29.4. Zonas cercana, intermedia y lejana del campo del vibrador eléctrico elemental 308

§ 29.5. Potencia irradiada por el vibrador eléctrico elemental al espacio circundante. Resistencia de radiación 310

§ 29.6. Diagrama direccional del campo de radiación de un vibrador eléctrico elemental en la zona lejana 312

Capítulo 30. Vibrador magnético elemental 314

§ 30.1. Planteamiento del problema 314

§ 30.2. Determinación de las componentes del campo del vibrador magnético elemental 314

§ 30.3. Analogía física del vibrador magnético elemental. Oscilador elemental de ranura 315

§ 30.4. Potencia irradiada por el vibrador magnético elemental al espacio circundante. Resistencia de radiación. Diagrama direccional 319

Capítulo 31. Lema de Lorentz 320

§ 31.1. Planteamiento del problema 320

§ 31.2. Deducción del lema de Lorentz para los volúmenes limitado e ilimitado 320

§ 31.3. Teorema de reciprocidad para los vibradores elementales como ejemplo de aplicación del lema de Lorentz 322

Capítulo 32. Excitación del campo electromagnético en las guías de ondas 324

§ 32.1. Planteamiento del problema 324

§ 32.2. Principios generales de la excitación en las guías de ondas de un campo del tipo prefijado 325

§ 32.3. Condiciones de ortogonalidad de las ondas en las guías de ondas 327

§ 32.4. Determinación de los coeficientes de amplitud del campo excitado en las guías de ondas por un sistema dado de corrientes extrínsecas 330

Capítulo 33. Excitación del campo electromagnético en resonadores de cavidad 335

§ 33.1. Planteamiento del problema 335
§ 33.2 Condiciones de ortogonalidad de las ondas en los resonadores de cavidad 335
§ 33.3. Determinación de los coeficientes de amplitud del campo excitado en los resonadores de cavidad por un sistema dado de corrientes extrínsecas 337

Capítulo 34. Propagación de ondas electromagnéticas en medios anisótropos 342

§ 34.1. Planteamiento del problema 342
§ 34.2 Tipos de tensores de la permitividad y la permeabilidad magnética del plasma y de la ferrita magnetizados 343
§ 34 3. Propagación longitudinal de ondas planas en un medio ferrítico magnetizado. Efecto de Faraday 346
§ 34.4. Propagación transversal de ondas planas en el medio ferrítico magnetizado. Efecto de Cotton—Mouton 351

Capítulo 35. Elementos de la teoría de difracción del campo electromagnético 354

§ 35.1. Planteamiento del problema 354
§ 35.2. Difracción de una onda plana en un cilindro metálico infinito de conductibilidad ideal 354
§ 35.3. Primer y segundo problemas electrodinámicos de contorno y sus correspondientes teoremas. Teorema de equivalencia 360
§ 35.4. Determinación del campo total creado por las corrientes extrínsecas en presencia de superficies complementarias en la parte considerada del espacio. Fórmulas del tipo de Huygens—Kirchhoff 363
§ 35.5. Difracción de las ondas planas en el orificio de una pantalla de conducción ideal y de extensión infinita 366

Capítulo 36. Principio de semejanza electrodinámica 368

§ 36.1. Planteamiento del problema 368
§ 36.2. Condiciones matemáticas de la semejanza electrodinámica 368

Capítulo 37. Algunas cuestiones de interacción de los electrones con el campo electromagnético 371

§ 37 1. Planteamiento del problema 371
§ 37.2. Movimiento del electrón en el campo electromagnético 371
§ 37.3. Ángulo ficticio del vuelo del electrón 375
§ 37.4. Corriente total que se engendra entre los electrodos 376
§ 37.5. Interacción entre el flujo electrónico y el campo eléctrico 377
§ 37.6. Excitación del campo mediante un haz electrónico 381

Apéndice.

Apéndice I. Elementos del análisis vectorial 386

§ I.1. Concepto de la divergencia y el rotor de la función vectorial 386
§ I.2. Concepto del gradiente de la función escalar 388
§ I.3. Sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas 388

§ I.4. Expresiones para la divergencia, el rotor y el gradiente en el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas 391
§ I 5. Expresiones para la divergencia, el rotor y el gradiente en los sistemas concretos de coordenadas 395
§ I.6. Algunas identidades vectoriales 396
§ I 7 Expresiones para $\nabla^2 U$ y $\nabla^2 a$ en el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas 396

Apéndice II. Cálculo de los coeficientes de atenuación del campo h' en guías de ondas rectangulares 397

§ II 1. Cálculo de los coeficientes de atenuación del campo h' en guías de ondas rectangulares en el caso de ondas del tipo magnético 397
§ II 2. Cálculo de los coeficientes de atenuación del campo h' en guías de ondas rectangulares en el caso de ondas del tipo eléctrico 404
§ II.3. Cálculo de los coeficientes de atenuación del campo h' en guías de ondas circulares en el caso de ondas del tipo magnético 405
§ II.4. Cálculo de los coeficientes de atenuación del campo h' en guías de ondas circulares en el caso de ondas del tipo eléctrico 412

Apéndice III. Determinación del factor de mérito de los resonadores de cavidad 415

§ III.1. Determinación de los factores de mérito de los resonadores de cavidad rectangulares en el caso de ondas del tipo magnético 415
§ III.2. Determinación de los factores de mérito de los resonadores de cavidad rectangulares en el caso de ondas del tipo eléctrico 421
§ III 3 Determinación de los factores de mérito de los resonadores de cavidad cilíndricos en el caso de ondas del tipo magnético 423
§ III.4. Determinación de los factores de mérito de los resonadores de cavidad cilíndricos en el caso de ondas del tipo eléctrico 428

Apéndice IV. Ejemplos de cálculo de los coeficientes de amplitud de los campos electromagnéticos en guías de ondas y en resonadores de cavidad 432

§ IV.1. Ejemplo de cálculo del coeficiente de amplitud de la onda del tipo H_{10} en una guía de ondas rectangular 432
§ IV 2. Ejemplo de cálculo del coeficiente de amplitud de la onda del tipo H_{101} en un resonador de cavidad rectangular 434

Apéndice V. Ejemplos concretos de aplicación del principio de semejanza electrodinámica 435

Apéndice VI. Cálculo de las resistencias de radiación de los dispositivos excitadores en las guías de ondas. Cálculo de resistencias de entrada de los resonadores de cavidad 437

§ VI.1. Cálculo de las resistencias de radiación de los dispositivos excitadores en las guías de ondas 437
§ VI 2 Cálculo de las resistencias de entrada de los resonadores de cavidad 439

Apéndice VII. Determinación del factor de mérito de los resonadores cargados 441

Apéndice VIII. Cálculo del campo de difracción de una onda plana en el orificio rectangular de una pantalla metálica ideal 442

Bibliografía 447

Prefacio

El presente manual ha sido escrito de conformidad con el programa del curso de «Electrodinámica» aprobado por el Ministerio de Enseñanza Superior y Media Especializada de la URSS. En el tiempo que transcurrió desde la publicación del libro del mismo título (en 1965) este curso experimentó cambios esenciales. Ha variado también la metodología de exposición del mismo. A raíz de estas circunstancias, el libro que ofrecemos al lector representa una exposición totalmente renovada del curso de electrodinámica. Sólo se ha conservado la línea metodológica principal admitida anteriormente, cuyo contenido consiste en lo siguiente.

El material teórico utilizado para resolver los problemas electrodinámicos concretos no se introduce de una vez, sino a medida que surge la necesidad en él. Cada nuevo enunciado teórico se acompaña de la resolución de un problema electrodinámico fundamental que ayuda a asimilarlo. Por ejemplo, las condiciones límites se exponen al resolver el problema de contorno elemental referente a la reflexión y refracción de ondas planas. De una forma análoga, el concepto de potenciales se introduce al resolver los problemas acerca de la excitación del campo electromagnético, o sea, en el apartado donde su aplicación es plenamente justificada. La base de la exposición del material la constituyen las ecuaciones de Maxwell, cuya fundamentación se da en los primeros capítulos.

Muchos años de experiencia en la enseñanza del curso de electrodinámica nos convence en lo justo de este enfoque. Se ha comprobado que una buena asimilación del curso por los estudiantes es posible únicamente en el caso de que se efectúe hasta el final el análisis matemático del material. Precisamente este principio se ha adoptado en el presente libro, con la particularidad de que los detalles de este análisis se insertan en el Apéndice.

El análisis detallado es necesario también debido a que los estudiantes de los centros técnicos de enseñanza superior se ven obligados a asimilar un gran volumen de distintos conocimientos y es lógico facilitarles el estudio del curso de electrodinámica, ya de por sí saturado de material matemático.

En el libro se exponen las bases de la electrodinámica, debido a lo cual faltan en éste los apartados dedicados a la electrodinámica técnica que, habitualmente, se examinan en cursos especiales.

El autor expresa su sincera gratitud a los colaboradores de la cátedra de radiotecnia del Instituto Politécnico del Noroeste (jefe de la cátedra, doctor en Ciencias Técnicas, profesor N. P. Krasiuk) por la recensión del manuscrito, al doctor en Ciencias Técnicas, profesor G. Z. Aizenberg, personalidad emérita de ciencia y técnica, y al candidato a doctor en Ciencias Técnicas, docente G. A. Erojin, por su cuidadosa revisión del manuscrito y una serie de sugerencias valiosas adoptadas por el autor en su elaboración definitiva.

El autor expresa su profundo reconocimiento al doctor en Ciencias Técnicas, profesor E. N. Vasíliev, y al doctor en Ciencias Técnicas, profesor A. V. Netushil, con quienes examinó una serie de tesis fundamentales del curso de electrodinámica. El autor asimismo agradece cordialmente a la colectividad de la cátedra de fundamentos de la radiotecnia del Instituto Energético de Moscú por su mancomunada labor fructífera sobre el curso de electrodinámica. El libro no podría ser terminado sin la ayuda de Z.S. Fiódorova,N. N. Fiódorov y S. N. Fiódorov, a quienes el autor expresa su cordial gratitud.

Notación empleada en el libro[1)]

$\mathbf{E}$,	valor instantáneo del vector de intensidad del campo eléctrico, V/m.
$\mathbf{D}$,	valor instantáneo del vector de desplazamiento eléctrico, C/m.
$\mathbf{B}$,	valor instantáneo del vector de inducción magnética, T.
$\mathbf{H}$,	valor instantáneo del vector de intensidad del campo magnético, A/m.
$\dot{\mathbf{E}}$,	amplitud compleja del vector de intensidad del campo eléctrico.
$\dot{\mathbf{D}}$,	amplitud compleja del vector de desplazamiento eléctrico.
$\dot{\mathbf{B}}$,	amplitud compleja del vector de inducción magnética.
$\dot{\mathbf{H}}$,	amplitud compleja del vector de intensidad del campo magnético.
Q_{el},	valor instantáneo de la carga eléctrica, C.
ρ_{el},	valor instantáneo de la densidad volumétrica de la carga eléctrica, C/m^3.
σ_{el},	valor instantáneo de la densidad superficial de la carga eléctrica, C/m^2.
Q_m,	valor instantáneo de la carga magnética, Wb o V·s.
ρ_m,	valor instantáneo de la densidad volumétrica de la carga magnética, Wb/m^3 o $V \cdot s/m^3$.
σ_m,	valor instantáneo de la densidad superficial de la carga magnética, Wb/m^2 o $V \cdot s/m^3$.
$\dot{Q}_{el}$,	amplitud compleja de la carga eléctrica.
$\dot{\rho}_{el}$,	amplitud compleja de la densidad volumétrica de la carga eléctrica.
$\dot{\sigma}_{el}$,	amplitud compleja de la densidad superficial de la carga eléctrica.
$\dot{Q}_m$,	amplitud compleja de la carga magnética.
$\dot{\rho}_m$,	amplitud compleja de la densidad volumétrica de la carga magnética.
$\dot{\sigma}_m$,	amplitud compleja de la densidad superficial de la carga magnética.
I_{el},	valor instantáneo de la corriente eléctrica, A.
$\mathbf{J}_{el}$,	valor instantáneo del vector de densidad de la corriente eléctrica, A/m^2
$\mathbf{v}_{el}$,	valor instantáneo del vector de densidad de la corriente eléctrica superficial, A/m.
$\mathbf{v}_{el\text{-}c}$,	valor instantáneo del vector de densidad de la corriente eléctrica superficial de conducción.

[1)] De conformidad con el GOST 18238—72, 19880—74, 1494—77.

$\mathbf{v}_{el\Sigma}$, valor instantáneo del vector de densidad de la corriente superficial total.

J_m, valor instantáneo de la corriente magnética, V.

$\mathbf{J}_m$, valor instantáneo del vector de densidad de la corriente magnética, V/m^2

$\mathbf{v}_m$, valor instantáneo del vector de densidad de la corriente magnética superficial, V/m

$\mathbf{v}_{m\cdot c}$, valor instantáneo del vector de densidad de la corriente magnética superficial de conducción.

$\mathbf{v}_{m\Sigma}$, valor instantáneo del vector de densidad de la corriente magnética superficial total.

$\dot{\mathbf{J}}_{el}$, amplitud compleja del vector de densidad de la corriente eléctrica.

$\dot{\mathbf{v}}_{el}$, amplitud compleja del vector de densidad de la corriente eléctrica superficial.

$\dot{\mathbf{v}}_{el\cdot c}$, amplitud compleja del vector de densidad de la corriente eléctrica superficial de conducción.

$\dot{\mathbf{v}}_{el\Sigma}$, amplitud compleja del vector de densidad de la corriente eléctrica superficial total.

$\dot{\mathbf{J}}_m$, amplitud compleja del vector de densidad de la corriente magnética.

$\dot{\mathbf{v}}_m$, amplitud compleja del vector de densidad de la corriente magnética superficial.

$\dot{\mathbf{v}}_{m\cdot c}$, amplitud compleja del vector de densidad de la corriente magnética superficial de conducción.

$\dot{\mathbf{v}}_{m\Sigma}$, amplitud compleja del vector de densidad de la corriente magnética superficial total.

ε_0, constante eléctrica, F/m.

μ_0, constante magnética, H/m.

ε_a, permitividad absoluta del medio, F/m.

μ_a, permeabilidad magnética absoluta del medio, H/m

ε_r, permitividad relativa del medio (magnitud adimensional).

μ_r, permeabilidad magnética relativa del medio (magnitud adimensional)

$\mathbf{F}_{el}$, vector de la fuerza de interacción entre las cargas eléctricas, N.

l, vector de longitud, m.

U, diferencia de potencial, V.

C, capacidad eléctrica, F.

$\mathbf{S}$, vector del área, m^2.

Ω, ángulo sólido, sr

Φ_E, flujo del vector E, V·m.

V, volumen, m^3.

$\mathbf{P}$, vector de polarización de las sustancias, C/m^2.

χ_{el}, susceptibilidad dieléctrica, F/m.

ξ, η, coordenadas en el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas.

(ε_a), tensor de la permitividad absoluta del medio.

f, frecuencia de las oscilaciones, Hz.

ω, frecuencia angular de las oscilaciones, s^{-1}

j $= \sqrt{-1}$.

t, tiempo, s.

$G(\omega)$ vector de densidad espectral.

$\mathbf{v}$, vector de velocidad, m/s.

Φ_B, flujo del vector B, Wb o V·s.

Ψ_B,	flujo total (embragado) del vector B, Wb o V·s.
$\mathbf{M}$,	vector de imantación, A/m.
χ_m,	susceptibilidad magnética (magnitud adimensional).
(μ_a),	tensor de la permeabilidad magnética absoluta del medio.
R,	resistencia eléctrica, Ω
γ_{el},	conductividad eléctrica del medio, S/m
γ_m,	conductividad magnética (permeancia) del medio, Ω/m.
$\tilde{\varepsilon}_a$,	permitividad absoluta compleja del medio.
$\tilde{\mu}_a$,	permeabilidad magnética absoluta compleja del medio.
$e = 2{,}7$,	base de los logaritmos naturales.
div	(divergencia), rot (rotor), grad (gradiente), operaciones diferenciales matemáticas.
w,	número de espiras.
$\mathbf{1}_\xi$, $\mathbf{1}_\eta$, $\mathbf{1}_\zeta$,	vectores unitarios (versores) orientados a lo largo de las direcciones ξ, η, ζ.
$\mathbf{a}\,\mathbf{b}$,	producto escalar del vector a por el vector b.
$[\mathbf{a}\,\mathbf{b}]$,	producto vectorial del vector a por el vector b.
$[\,]$,	producto vectorial [1]).
$\sum_{k=1}^{n_1}$,	signo de suma, se suman las magnitudes a partir del valor $k =$ $= 1$ hasta el valor $k = n_1$.
L,	inductancia, H
M,	inductancia mutua, H.
Π,	valor instantáneo del vector de Poynting, W/m².
P,	valor instantáneo de la potencia, W.
W,	energía, J.
$\mathbf{a}^*$,	valor conjugado del vector a.
$\dot{\Pi}$,	valor complejo del vector de Poynting.
$\dot{\Pi}_{Re}$,	parte real del vector de Poynting.
$\dot{\Pi}_{Im}$,	parte imaginaria del vector de Poynting.
Re,	parte real de una magnitud compleja.
Im,	parte imaginaria de una magnitud compleja.
Υ,	valor instantáneo del vector de Umov, W/m³.
∇^2,	operador matemático diferencial de Laplace.
$\dot{\gamma}$,	coeficiente complejo de propagación, m⁻¹
$\dot{Z}_{med}$,	resistencia característica compleja del medio, Ω.
β,	parte real del coeficiente $\dot{\gamma}$, o coeficiente de fase, m⁻¹.
α,	parte imaginaria del coeficiente $\dot{\gamma}$, o coeficiente de atenuación (factor de amortiguamiento), m⁻¹.
v_f,	velocidad de fase, m/s
v_{gr},	velocidad en grupo, m/s.
c_0,	velocidad de la luz en el vacío, m/s.
c,	velocidad de la luz en un medio con parámetros μ_a, ε_a
$\mathbf{1}_n$,	vector unitario normal
$\mathbf{1}_\tau$,	vector unitario tangencial.
$\dot{M}^{refl}$,	coeficiente de reflexión.
$\dot{M}^{refr}$,	coeficiente de refracción.
$\dot{Z}_m$,	resistencia característica compleja del metal.
λ,	longitud de onda, m
h_ξ, h_η, h_ζ,	coeficientes de Lamé en el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas
γ_g,	coeficiente de propagación del campo en las guías de ondas, m⁻¹.
h,	número de onda longitudinal en las guías de ondas, m⁻¹.

[1]) Puesto que los corchetes designan el producto vectorial, en el presente libro se ha adoptado la siguiente «jerarquía» de paréntesis: $\overline{(\{()\})}$.

k', coeficiente de atenuación (de amortiguamiento) del campo en las guías de ondas a costa de la conductibilidad finita de las paredes metálicas, m^{-1}

k'', coeficiente de atenuación del campo en las guías de ondas a costa de pérdidas en el dieléctrico que llena la guía de ondas, m^{-1}.

k_r, número de onda transversal en las guías de ondas rápidas, m^{-1}.

p, número de onda transversal en las guías de ondas lentas, m^{-1}

H_{mn}, ondas magnéticas del tipo *mn*.

E_{mn}, ondas eléctricas del tipo *mn*.

T, ondas electromagnéticas transversales.

J_m, función de Bessel de primer género, del orden *m*.

N_m, función de Bessel de segundo género o función de Neumann del orden *m*.

η_{mn}, valor de las raíces de la función de Bessel.

ξ_{mn}, valor de las raíces de la derivada de la función de Bessel.

I_m, función modificada de Bessel del orden *m*.

K_m, función de Macdonald del orden *m*.

E_{mnp}, ondas eléctricas del tipo *mnp* en resonadores de cavidad.

H_{mnp}, ondas magnéticas del tipo *mnp* en resonadores de cavidad.

Q, factor de mérito (de calidad) de los resonadores de cavidad.

A_{el}, amplitud compleja del potencial eléctrico vectorial, T·m.

U_{el}, amplitud compleja del potencial eléctrico escalar, V.

A_m, amplitud compleja del potencial magnético vectorial, C/m.

U_m, amplitud compleja del potencial magnético escalar, A.

$\int_{S_1}$, integral por la superficie S_1.

$\oint_{S_1}$, integral por superficie cerrada S_1.

$\int_{l_1}$, integral por el recorrido l_1.

$\oint_{l_1}$, integral a lo largo del contorno cerrado l_1.

$\int_{V_1}$, integral por el volumen V_1.

CAPÍTULO 1

Ecuaciones integrales de electrodinámica

§ 1.1. Lugar de la electrodinámica entre otras asignaturas técnicas. La misión de la electrodinámica y las etapas principales de su desarrollo

En primer término, es necesario esclarecer qué lugar corresponde a la electrodinámica entre las asignaturas teóricas generales y especiales.

La electrodinámica puede considerarse como parte del curso de física y de fundamentos teóricos de electrotecnia, por un lado, y como el desarrollo ulterior de los cursos de teoría de los circuitos y señales o bien de los fundamentos de radiotecnia, por otro. De esta forma, el curso básico de electrodinámica es transitorio entre los mencionados cursos teóricos y tales cursos especiales como «Propagación de ondas de radio», «Sistemas de antenas y alimentación», «Técnica de altas frecuencias», «Radioelectrónica cuántica» y otros.

En los últimos tiempos se ha ampliado considerablemente el círculo de cuestiones que examina la electrodinámica y se ha complicado sustancialmente la solución de los problemas prácticos.

Actualmente, se entiende como electrodinámica el sector de la ciencia que describe los procesos de excitación y propagación de ondas electromagnéticas en distintos medios. Por regla general, los problemas de electrodinámica están relacionados con el diapasón de altas frecuencias utilizadas por la radiotecnia moderna.

Es difícil figurarse a un investigador contemporáneo y especialista en el campo de la radio que no tenga idea acerca de los procesos electrodinámicos, cualquiera que sea la rama de la radiotecnia en que trabaja.

La generación de oscilaciones electromagnéticas de frecuencia elevada, la canalización de estas oscilaciones por las guías de ondas, los procesos de irradiación de energía electromagnética y su captura por las antenas receptoras, tal es el círculo de problemas que requieren el estudio de la electrodinámica. Además, sobre la base de las leyes de la electrodinámica son posibles también el análisis y la creación de dispositivos ferríticos, de instrumentos en que se utiliza el plasma y de dispositivos cuánticos.

Hoy en día, la electrodinámica se ha difundido ampliamente y su desarrollo está lejos de consumarse.

El objeto principal de estudio de la electrodinámica es el campo electromagnético.

El campo electromagnético es una forma especial de materia. Conforme a la definición de V. I. Lenin [1], «es materia lo que, actuando sobre nuestros órganos sensoriales, produce sensación; la materia es la realidad objetiva que las sensaciones nos transmiten,...»

La historia del desarrollo de la electrodinámica que fue determinada por los trabajos de numerosos científicos podría constituir de por sí sola un tema de investigación independiente. Mencionemos sus etapas más importantes.

En 1753, en la obra «Discurso sobre los fenómenos aéreos procedentes de la fuerza eléctrica» y en 1756 en el trabajo «Teoría de la electricidad elaborada por vía matemática» M. V. Lomonósov sugirió la idea acerca de la naturaleza dinámica de la electricidad y la relación entre los fenómenos eléctricos y luminosos. En 1819, Oersted descubrió la influencia de la corriente eléctrica sobre la aguja magnética. En 1820, Ampére investigó la acción de la corriente sobre la corriente, y el resultado de esta investigación fue el establecimiento de la relación entre los fenómenos magnéticos y eléctricos. En 1831 M. Faraday descubrió el fenómeno de la inducción electromagnética. En 1873, J. Maxwell publicó su «Tratado sobre la electricidad y el magnetismo» en el cual expuso, en forma matemática, las leyes básicas del campo electromagnético. El mismo introdujo también el concepto de corriente de desplazamiento, lo que permitió elaborar la teoría del campo electromagnético en el espacio y establecer, en fin de cuentas, la relación entre las oscilaciones electromagnéticas y la luz. En 1888, H. Hertz, discípulo del famoso físico Helmholtz, en la obra «Las fuerzas de las oscilaciones eléctricas examinadas de acuerdo con la teoría de Maxwell» ofreció el método para resolver las ecuaciones de Maxwell y demostró experimentalmente la posibilidad de existencia en el espacio de las ondas electromagnéticas. En 1895 A. S. Popov realizó la comunicación por radio, primera en el mundo, haciendo uso de las ondas electromagnéticas.

En 1899 P. N. Lébedev demostró experimentalmente la existencia de la presión de la luz, o sea, de las ondas electromagnéticas, sobre los cuerpos. Se confirmó la existencia de masa inerte en el campo electromagnético. En 1916 A. Einstein expuso la idea sobre la distorsión del rayo luminoso en el campo gravitacional; esta hipótesis fue confirmada por Eddington que midió la desviación del rayo luminoso en el campo gravitacional del Sol. De este modo fue demostrada la existencia de la masa gravitacional en el campo electromagnético. En 1960 Pound pesó el rayo luminoso. El carácter material del campo electromagnético fue demostrado definitivamente, con lo cual fue asestado un golpe más a la física «energética» la cual, según la definición de V. I. Lenin [1], «es origen de nuevas tentativas idealistas de concebir el movimiento sin materia...».

El campo electromagnético es portador de energía capaz de transformarse en otros tipos de energía, hecho que se utiliza ampliamente en la técnica moderna.

En el presente manual se examina la electrodinámica macroscópica, es decir, los procesos que se desarrollan a unas distancias que superan considerablemente las distancias intraatómicas.

Al proceder a la descripción matemática de los procesos en el campo electromagnético se introducen cuatro vectores principales del campo:

E, vector de intensidad del campo eléctrico;

D, vector de desplazamiento eléctrico, o de inducción eléctrica;

B, vector de inducción magnética;

H, vector de intensidad del campo magnético.

Los campos caracterizados por estos vectores se engendran por las cargas eléctricas Q_{el} y las corrientes I_{el}, las cuales, a su vez, pueden crearse por el campo electromagnético. Complementariamente, en la electrodinámica moderna se introducen las magnitudes de la carga magnética Q_m y de la corriente magnética I_m, cómodas para el análisis y que facilitan la solución de una serie de problemas. El sentido de estas magnitudes se definirá posteriormente.

La electrodinámica establece una relación matemática entre los vectores del campo, las corrientes y las cargas en diferentes casos concretos, cuando estos vectores son funciones del tiempo.

§ 1.2. Sistema de unidades. Ley de Coulomb. Vector de intensidad del campo eléctrico E. Diferencia de potencial U. Teorema de Gauss para el vacío

En el presente manual se utiliza el sistema de unidades MKSA (metro, kilogramo, segundo, amperio) que es el Sistema Internacional de Unidades SI [2].

En 1785, Coulomb determinó por vía experimental la fuerza de la acción recíproca entre dos cuerpos pequeños con cargas eléctricas situados en el vacío. En el sistema de unidades adoptado se puede determinar esta fuerza mediante la *ley de Coulomb* que viene expresada por la relación

$$\mathbf{F}_{el} = \frac{Q_{el1} Q_{el}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{1}_r. \qquad (1.1)$$

Aquí $\mathbf{F}_{el}$ es el vector de la fuerza de la acción recíproca entre las cargas, N; Q_{el1} y Q_{el}, las cargas en interacción, C; ε_0, el factor de proporcionalidad (constante eléctrica del vacío); r, la distancia entre los centros de las cargas, m; $\mathbf{1}_r$, el vector unitario (versor) dirigido a lo largo de r, de modo que las cargas de distinto signo se atraen y las del mismo signo se repelen (fig. 1.1).

Se llama *vector de intensidad del campo eléctrico* **E** la fuerza que actúa sobre la carga positiva unitaria:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}_{el}/Q_{el}, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathrm{N/C}, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q_{el}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\mathbf{1}_r. \tag{1.4}$$

Introduzcamos el concepto de diferencia de potencial U entre los puntos a_2 y a_1, que se entiende como la integral

$$U = \int_{a_1}^{a_2} \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = \int_{l_1} \mathbf{E}\,d\mathbf{l}. \tag{1.5}$$

La diferencia de potencial representa el trabajo de la fuerza **E**

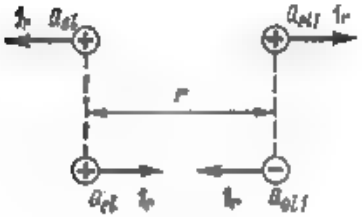

FIG 1.1

FIG. 1.2

en el recorrido l_1. La diferencia de potencial se mide en voltios:

$$U \rightarrow \mathrm{V} = \mathrm{N \cdot m/C}. \tag{1.6}$$

A partir de las fórmulas (1.3) y (1.6) se deducen las unidades de medición de **E**:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathrm{V/m}. \tag{1.7}$$

Como se conoce del curso de física, se llama capacidad del condensador C la relación entre la carga Q_{el} y la diferencia de potencial en las armaduras del condensador:

$$C = Q_{el}/U. \tag{1.8}$$

En el sistema MKSA la capacidad se mide en faradios:

$$C \rightarrow \Phi = \mathrm{C/V}. \tag{1.9}$$

Las unidades de medida de la constante eléctrica pueden determinarse de la expresión (1.4)

$$\varepsilon_0 \rightarrow \frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{N \cdot m^2}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V \cdot m}} = \frac{\Phi}{\mathrm{m}}. \tag{1.10}$$

De este modo, la unidad de medida para ε_0 es faradio por metro.

En el sistema MKSA

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \Phi/\text{m}. \qquad (1.11)$$

Examinemos un área infinitamente pequeña dS que se encuentra en el campo engendrado por la carga Q_{el} (fig. 1.2).

Supongamos que la distancia desde el centro de la carga hasta el área es igual a r. Determinemos el flujo infinitamente pequeño del vector $\mathbf{E}$ ($d\Phi_E$) haciendo uso de la relación

$$d\Phi_E = \mathbf{E}\, dS,\ dS = dS\mathbf{1}_n,$$

donde $\mathbf{1}_n$ es el vector unitario normal al área dS.

Teniendo en cuenta la expresión (1.4) podemos escribir

$$d\Phi_E = \frac{Q_{el}\, dS}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{1}_r \mathbf{1}_n.$$

La expresión

$$\frac{dS\mathbf{1}_r\mathbf{1}_n}{r^2} = d\Omega$$

define el ángulo sólido infinitamente pequeño que caracteriza el ángulo de vista bajo el cual se observa el área dS desde el punto de disposición de la carga. Al introducir el concepto de ángulo sólido, obtenemos

$$d\Phi_E = \frac{Q_{el}}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega.$$

Al pasar del área infinitamente pequeña dS al área de dimensiones finitas S_1, es posible escribir

$$\Phi_E = \int_{S_1} \mathbf{E}\, dS = \frac{Q_{el}}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Omega_1} d\Omega.$$

Aquí Ω_1 es el ángulo solido en cuyos límites se observa el área S_1 a partir del punto de disposición del centro de la carga.

En el caso de una superficie cerrada S_1 que rodea la carga Q_{el}, el flujo total del vector E que pasa por esta superficie puede hallarse por medio de la integración por toda la superficie cerrada. El ángulo sólido total alrededor del punto es igual en este caso a 4π y

$$\Phi_E = \int_{S_1} \mathbf{E}\, dS = \frac{Q_{el}}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \frac{Q_{el}}{\varepsilon_0}.$$

La relación

$$\oint_{S_1} \mathbf{E}\, dS = Q_{el}/\varepsilon_0 \qquad (1.12)$$

es la expresión matemática del teorema de Gauss para el vacío

§ 1.3. Teorema de Gauss para la sustancia. Vector de desplazamiento eléctrico D. Primera ecuación material del medio. Primera ecuación de continuidad

En un medio dieléctrico, bajo la influencia del campo se opera el proceso de polarización. Este proceso consiste en que las cargas positivas y negativas de los átomos del dieléctrico por acción de la fuerza E se desplazan unos respecto a otros. Las cargas positivas se mueven en dirección del campo E, mientras que las cargas negativas lo hacen en dirección contraria. El dieléctrico se polariza, o sea, deja de ser neutro desde el punto de vista eléctrico. Para evaluar matemáticamente este proceso examinemos cierta superficie dS infinitamente pequeña en una sustancia, teniendo en cuenta que la normal unitaria 1_n a dicha superficie no coincide, obligatoriamente, con la dirección del campo E (fig. 1.3). Supongamos que como resultado del proceso de polarización las cargas positivas que entran en la composición de los átomos, dispuestos en la superficie dS, se han desplazado a cierta distancia x. La dirección del desplazamiento que se caracteriza por el vector unitario 1_l viene definida por la orientación del vector E y por las propiedades del medio. Esta dirección puede no coincidir con la dirección del vector E. A causa del desplazamiento las cargas positivas se situarán en la superficie dS_1. Las cargas que se encontraban a la izquierda de la superficie dS y a una distancia x de ésta, al desplazarse hacia la derecha ocuparán un lugar en la superficie dS_1. De este modo, las cargas positivas que se han desplazado ocuparán el volumen limitado por las superficies dS y dS_1. Este volumen puede calcularse fácilmente:

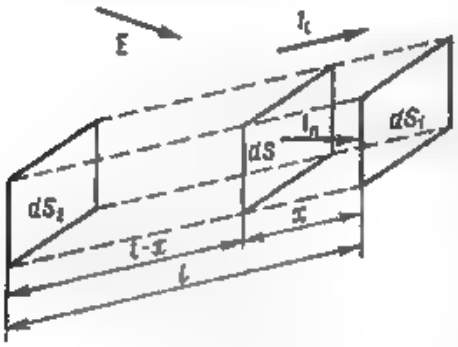

FIG. 1.3

$$dV_+ = dSx1_n1_l.$$

Supongamos que cada carga positiva es igual a Q_{el} y que el número de cargas incorporadas al proceso de polarización en 1 m^3 es N_1. Entonces, la carga positiva total dQ'_{el+} que ha atravesado la superficie dS como resultado de la polarización puede determinarse a partir de la relación

$$dQ'_{el+} = Q_{el1}N_1\,dV_+ = Q_{el1}N_1\,dSx1_n1_l.$$

Las cargas negativas que se encontraban en la superficie dS antes de haber comenzado la acción del campo externo E, por efecto

de esta acción se desplazarán en dirección contraria a la dirección de desplazamiento de las cargas positivas. Esta dirección se define por el vector unitario $-\mathbf{1}_l$.

Admitamos que después del desplazamiento la distancia entre las cargas positivas y negativas del átomo neutro es igual a l. En este caso, las cargas negativas que se hallaban en la superficie dS se desplazarán hacia la izquierda a una distancia $l - x$, situándose en la superficie dS_2. El volumen entre las superficies dS y dS_2 se llenará de cargas negativas desplazadas, y la carga negativa total dQ_{el-} la cual, como resultado de polarización, ha pasado a través de la superficie dS, será definida por la fórmula

$$dQ'_{el-} = Q_{el1} N_1 \, dS \, (l - x) \, (-\mathbf{1}_n) \, (-\mathbf{1}_l).$$

El paso de las cargas positivas de izquierda a derecha a través de la superficie dS es equivalente al paso de las cargas negativas de derecha a izquierda. Esta es la razón por la cual la carga total dQ'_{el} que ha pasado a través de la superficie dS debido a la polarización puede hallarse sumando las cargas dQ'_{el+} y dQ'_{el-}:

$$dQ'_{el} = dQ'_{el+} + dQ'_{el-} = Q_{el1} N_1 l \mathbf{1}_l \mathbf{1}_n \, dS.$$

Se introduce la designación

$$Q_{el1} N_1 l \mathbf{1}_l = Q_{el1} N_1 \mathbf{l}_1 = \mathbf{P}.$$

La magnitud $\mathbf{P}$ se denomina *vector de polarización de la sustancia*.

La unidad que se emplea para medir la polarización de la sustancia es un culombio por metro cuadrado:

$$\mathbf{P} \to \mathrm{C/m^2}. \tag{1.13}$$

En este caso

$$dQ'_{el} = \mathbf{P} \, dS \mathbf{1}_n = \mathbf{P} \, d\mathbf{S}.$$

En algunos casos concretos el vector $\mathbf{P}$ puede ser función de las coordenadas. A raíz de ello la carga Q'_{el} que ha atravesado la superficie finita S debe buscarse integrando por esta superficie la expresión obtenida:

$$Q'_{el} = \int_{S_1} \mathbf{P} \, d\mathbf{S}.$$

Si el proceso de polarización es originado por una carga que se encontraba dentro de la superficie cerrada S_1, y es necesario determinar la carga Q'_{el} que ha pasado a través de esta superficie como resultado de la polarización del medio, entonces, la integración debe extenderse a la superficie cerrada:

$$Q'_{el} = \oint_{S_1} \mathbf{P} \, d\mathbf{S}.$$

Esta cantidad de electricidad saldrá fuera de los límites de la superficie cerrada S_1. Dentro de la superficie quedará la carga $-Q'_{el}$

ligada con la carga Q'_{e1} y que junto con esta última creaba —con anterioridad al proceso de polarización— átomos neutros del medio. De esta manera, el proceso de polarización del medio se reduce a la aparición, además de la carga inicial Q_{e1} creadora del campo E, de la carga de polarización complementaria $-Q'_{e1}$. Teniendo en cuenta esta carga en la expresión del teorema de Gauss para el vacío (1.12), se puede obtener la fórmula que permitirá determinar el campo en un medio concreto. En este caso la expresión (1.12) se escribirá en la forma siguiente:

$$\oint_{S_1} \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q_{e1} - Q'_{e1}),$$

o bien

$$\oint_{S_1} \varepsilon_0 \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = Q_{e1} - \oint_{S_1} \mathbf{P}\, d\mathbf{S}.$$

Al unir las integrales, obtenemos

$$\oint_{S_1} (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})\, d\mathbf{S} = Q_{e1}.$$

Introduzcamos la designación

$$\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \mathbf{D}. \tag{1.14}$$

La magnitud D se llama *vector de desplazamiento eléctrico*. La relación integral

$$\oint_{S_1} \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = Q_{e1} \tag{1.15}$$

es la expresión matemática del *teorema de Gauss para la sustancia*. Es fácil determinar la unidad de medida para el vector de desplazamiento eléctrico:

$$\mathbf{D} \to \mathrm{C/m^2}. \tag{1.16}$$

El teorema de Gauss representado en la forma (1.15) es válido para un medio dieléctrico ideal. Si el medio es conductor; entonces, al deducir este teorema es imprescindible considerar las cargas que se engendran en el medio a costa de las corrientes de conducción. Más adelante se dará la deducción de la expresión correspondiente al teorema de Gauss para un medio conductor.

La expresión (1.14) da la posibilidad de establecer la relación entre los vectores D y E, o sea, deducir la primera ecuación material del medio. Esta ecuación es diferente para distintos medios, por cuya razón es necesario detenerse en ella con más detalle. Ante todo, examinemos un medio isótropo lineal homogéneo y un campo monocromático, es decir, un campo que varía con una misma frecuencia angular ω.

En este caso, podemos considerar que el vector de polarizacion de la sustancia P es proporcional al vector del campo E:

$$\mathbf{P} = \chi_{e1}\mathbf{E}. \tag{1.17}$$

El factor de proporcionalidad χ_{e1} se llama *susceptibilidad dieléctrica de la sustancia*. En este caso, la expresión (1.14) se escribirá de la siguiente forma:

$$\mathbf{D} = (\varepsilon_0 + \chi_{e1})\,\mathbf{E}.$$

Al introducir la designación

$$\varepsilon_0 + \chi_{e1} = \varepsilon_a, \tag{1.18}$$

obtenemos la ecuación

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}, \tag{1.19}$$

que representa la *primera ecuación material del medio.*

La magnitud ε_a se denomina *permitividad absoluta del medio.* Las unidades de medida para la susceptibilidad dieléctrica y la permitividad son las mismas que para ε_0, o sea, F/m.

Introduzcamos una magnitud adimensional, que es la permitividad relativa del medio:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_a/\varepsilon_0. \tag{1.20}$$

En los medios reales esta magnitud puede variar dentro de unos límites considerables: desde valores negativos del orden de centenas (plasma) y valores cero (plasma) hasta decenas de miles positivas (titanatos de bario).

Para un campo monocromático y un medio heterogéneo cuyos parámetros son funciones de coordenadas curvilíneas generalizadas ξ, η, ζ, la permitividad pasa a ser función de estas coordenadas:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a(\xi, \eta, \zeta),$$

y la primera ecuación material del medio toma la forma

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a(\xi, \eta, \zeta)\,\mathbf{E}. \tag{1.21}$$

Para un campo monocromático y un medio isótropo no lineal homogéneo la permitividad depende del campo

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a(E),$$

y la primera ecuación material del medio se escribe del modo siguiente:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a(E)\,\mathbf{E} \tag{1.22}$$

Para un campo monocromático y un medio anisótropo lineal homogéneo cada una de las componentes del vector D a lo largo de las direcciones de las coordenadas ξ, η, ζ depende, en el caso general, de las tres componentes de coordenadas del vector E, lo que viene reflejado por las siguientes relaciones

$$\left.\begin{aligned} D_\xi &= \varepsilon_{a11}E_\xi + \varepsilon_{a12}E_\eta + \varepsilon_{a13}E_\zeta, \\ D_\eta &= \varepsilon_{a21}E_\xi + \varepsilon_{a22}E_\eta + \varepsilon_{a23}E_\zeta, \\ D_\zeta &= \varepsilon_{a31}E_\xi + \varepsilon_{a32}E_\eta + \varepsilon_{a33}E_\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{1.23}$$

o bien, en forma vectorial simplificada

$$\mathbf{D} = (\varepsilon_a\ \mathbf{E}, \tag{1.24}$$

donde (ε_a) es el *tensor de la permitividad absoluta del medio*:

$$(\varepsilon_a) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{a11}\varepsilon_{a12}\varepsilon_{a13} \\ \varepsilon_{a21}\varepsilon_{a22}\varepsilon_{a23} \\ \varepsilon_{a31}\varepsilon_{a32}\varepsilon_{a33} \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

La aplicación del tensor (ε_a) se representa por la expresión (1.23).

Con arreglo al medio anisótropo, cada una de las componentes del vector **D**, en el caso general, cambia en su escala con respecto a la componente correspondiente del vector **E**, y a raíz de esta circunstancia la orientación del vector **D** no coincide con la del vector **E**.

En el caso de un campo no monocromático es racional examinar separadamente los campos que poseen espectros de frecuencia discreto y continuo. Si los parámetros del medio no dependen de la frecuencia, entonces, para un medio isótropo lineal homogéneo es justa la ecuación material (1.19), independientemente de la composición espectral del campo. Tal medio lleva el nombre de no dispersivo. Si los parámetros del medio son funciones de la frecuencia, se dice que el medio posee dispersión y se llama medio dispersivo.

Supongamos que el espectro de frecuencias es discreto (discontinuo), y el vector **E** puede representarse por una serie de componentes armónicas. Supongamos también que el medio es dispersivo homogéneo lineal e isótropo. En este caso, los vectores del campo pueden representarse en la siguiente relación

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \mathbf{E}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \\ + \mathbf{E}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \ldots + \mathbf{E}_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \ldots$$

Sea

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a(\omega). \tag{1.26}$$

Entonces, la primera ecuación material del medio puede anotarse de la manera siguiente

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a(\omega_0)\mathbf{E}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \varepsilon_a(\omega_1)\mathbf{E}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \\ + \varepsilon_a(\omega_2)\mathbf{E}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \ldots + \varepsilon_a(\omega_n)\mathbf{E}_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \ldots \tag{1.27}$$

Esta anotación es posible debido a la aplicabilidad al medio lineal del principio de superposición.

Cuando el espectro de frecuencias es continuo, para determinar la forma de la primera ecuación material del medio es posible valerse de la *transformación de Fourier o de Laplace* [3]. Si el vector **E** se escribe como una función temporal $\mathbf{E}(t)$, entonces, empleando la transformación directa de Fourier, se puede obtener el vector de densidad espectral de esta función.

$$\mathbf{G}_E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t)\, e^{-j\omega t}\, dt. \tag{1.28}$$

Por el vector conocido de la función espectral $\mathbf{G}_E(\omega)$ es posible hallar el vector $\mathbf{E}(t)$, haciendo uso de la transformación inversa de Fourier:

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_E(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{1.29}$$

De modo análogo se determina el vector $\mathbf{D}(t)$ por su densidad espectral $\mathbf{G}_D(\omega)$:

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_D(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{1.30}$$

De esta manera, conociendo el vector de densidad espectral $G_D(\omega)$ puede hallarse el vector $D(t)$. Para el vector de densidad espectral $G_D(\omega)$, al igual que para cualquier componente del espectro discreto, es válida la ecuación material corriente de forma (1.19), teniendo en cuenta la dependencia de frecuencia $\varepsilon_a(\omega)$:

$$G_D(\omega) = \varepsilon_a(\omega)\, G_E(\omega). \tag{1.31}$$

Aplicando la transformación inversa de Fourier (1.30), obtenemos la primera ecuación material para el espectro de frecuencias continuo:

$$D(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_a(\omega)\, G_E(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{1.32}$$

Como se ha señalado, la primera ecuación material del medio en el caso del espectro continuo puede obtenerse también recurriendo a la transformación de Laplace. La transformación directa de Laplace aplicada al vector $E(t)$ determina su representación $E(p)$

$$E(p) = \int_{0}^{\infty} E(t)\, e^{-pt}\, dt, \tag{1.33}$$

donde

$$p = c + j\omega. \tag{1.34}$$

El vector $E(t)$ puede determinarse con ayuda de la trasformación inversa de Laplace:

$$E(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} E(p)\, e^{pt}\, dp. \tag{1.35}$$

Análogamente, si se conoce la representación $D(p)$ del vector $D(t)$, este vector se determina a partir de la relación

$$D(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} D(p)\, e^{pt}\, dp. \tag{1.36}$$

Cuando se conoce la representación $\varepsilon_a(p)$ de la permitividad $\varepsilon(\omega)$ y la representación $E(p)$ del vector $E(t)$, es posible hallar con facilidad la representación $D(p)$ del vector $D(t)$:

$$D(p) = \varepsilon_a(p)\, E(p). \tag{1.37}$$

Entonces

$$D(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \varepsilon_a(p)\, E(p)\, e^{pt}\, dp. \tag{1.38}$$

La expresión (1.38) representa otra posible forma de anotación de la primera ecuación material en el caso del espectro de frecuencias continuo.

Analicemos un medio cuyos parámetros cambian según una ley temporal prefijada. Supongamos que la permitividad ε_a varía de acuerdo con la ley

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a(t) \tag{1.39}$$

y no depende de la frecuencia ω:

$$\varepsilon_a \neq \varepsilon_a(\omega). \tag{1.40}$$

En este caso, para un medio lineal homogéneo e isótropo, pero paramétrico [1] será justa la primera ecuación material similar por su forma a la ecuación (1.19):

$$D = \varepsilon_a(t)\, E. \tag{1.41}$$

La situación se complica sustancialmente si a la par de la variación de ε_a en el tiempo existe también la dependencia de ε_a respecto a la frecuencia ω:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a(t, \omega). \tag{1.42}$$

Como se sabe de la teoría de los circuitos [3], cuando la señal $u_1(t)$ actúa sobre un circuito paramétrico cuyo coeficiente de transmisión es $K(\omega, t)$, la señal a la salida del circuito es

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{u_1}(\omega)\, K(\omega, t)\, e^{j\omega t}\, d\omega, \tag{1.43}$$

donde $G_{u_1}(\omega)$ es función espectral de la señal de entrada:

$$G_{u_1}(\omega) = \int u_1(t)\, e^{-j\omega t}\, dt. \tag{1.44}$$

Al utilizar la transformación de Laplace, estas expresiones se escribirán de la manera siguiente:

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} u_1(p)\, K(p, t)\, e^{pt}\, dp, \tag{1.45}$$

$$u_1(p) = \int_0^{\infty} u_1(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{1.46}$$

Puesto que la determinación de la función espectral o de la imagen de la señal de entrada no es difícil, la resolución del problema se reduce a buscar el coeficiente de transmisión del circuito paramétrico

En nuestro caso debe hallarse el coeficiente de transmisión del medio paramétrico que es expresado por la permitividad ε_a en función de la frecuencia ω y del tiempo t. De este modo, al hacer uso de la transformación de Fourier, la primera ecuación material se escribe de una forma parecida a (1.32).

$$D(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_a(t, \omega)\, G_E(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega, \tag{1.47}$$

donde la función espectral $G_E(\omega)$ se halla a partir de la fórmula (1.28).

Al designar análogamente (1.31),

$$G_D(\omega) = \varepsilon_a(t, \omega)\, G_E(\omega), \tag{1.48}$$

obtenemos

$$D(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_D(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{1.49}$$

Al aplicar la transformación de Laplace, la ecuación material se escribe en la forma (1.38):

$$D(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \varepsilon_a(t, p)\, E(p)\, e^{pt}\, dp. \tag{1.50}$$

[1] Se llama paramétrico un medio cuyos parámetros varían en el tiempo.

Para cada tipo de la primera ecuación material es justo el teorema de Gauss correspondiente a la relación (1.16).

A veces resulta racional expresar la carga eléctrica Q_{el} por medio de su densidad volumétrica ρ_{el}:

$$Q_{el} = \int_{V_1} \rho_{el}\, dV. \tag{1.51}$$

Hallemos la unidad de medida de la densidad volumétrica de la carga eléctrica:

$$\rho_{el} \rightarrow \text{C/m}^3.$$

El teorema de Gauss, en este caso, se escribe en la forma

$$\oint_{S_1} \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = \int_{V_1} \rho_{el}\, dV. \tag{1.52}$$

Si en una superficie cerrada S_1 se encuentra la carga Q_{el} que disminuye con el tiempo, esta disminución estará relacionada con la existencia de la corriente I_{el} que fluye desde el volumen acotado por la superficie S_1. La relación entre la corriente I_{el} y la carga Q_{el} se determina por la fórmula

$$I_{el} = -\frac{\partial Q_{el}}{\partial t} = -\int_{V_1} \frac{\partial \rho_{el}}{\partial t}\, dV. \tag{1.53}$$

El signo «menos» ante la derivada se explica por el hecho de que con el transcurso del tiempo la carga Q_{el} disminuye. La corriente I_{el} está ligada a la densidad de la corriente $\mathbf{J}_{el}$ por la relación

$$I_{el} = \oint_{S_1} \mathbf{J}_{el}\, d\mathbf{S} \tag{1.54}$$

Esta expresión permite hallar la unidad de medida de la densidad de la corriente eléctrica:

$$\mathbf{J}_{el} \rightarrow \text{A/m}^2.$$

Teniendo en cuenta (1.54), la expresión (1.53) puede escribirse en la siguiente forma:

$$\oint_{S_1} \mathbf{J}_{el}\, d\mathbf{S} = -\int_{V_1} \frac{\partial \rho_{el}}{\partial t}\, dV. \tag{1.55}$$

La relación (1.55) se denomina *primera ecuación de continuidad en su forma integral* y relaciona la densidad de la corriente eléctrica con la densidad volumétrica de la carga eléctrica.

Si la densidad de las cargas no varía en el tiempo, la integral de superficie es igual a cero, lo que es testimonio del carácter cerrado y continuo de las líneas de densidad de la corriente continua.

§ 1.4. Vector de la inducción magnética B. Relación del vector B con la corriente

Los experimentos demuestran que la carga inmóvil Q_{el} en un campo magnético no está sujeta a ninguna acción por parte de este campo.

En cambio, si esta misma carga se desplaza en el campo magnético a una velocidad v, entonces, conforme a los datos de los experimentos, por ejemplo, con rayos catódicos (cargas eléctricas en movimiento), surge una fuerza F_m que influye sobre la carga en movimiento y provoca el cambio de su trayectoria.

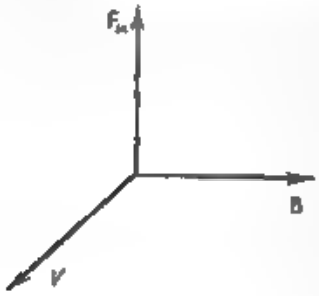

FIG. 1.4

Basándose en los datos experimentales se puede determinar la magnitud y la dirección de esta fuerza como función de la velocidad del movimiento de la carga v y de la intensidad y orientación de las líneas de fuerza del campo magnético, caracterizadas por cierto *vector* B. El vector B está orientado de la misma manera que las líneas de fuerza del campo magnético. En este caso es justa la relación experimental

$$\mathbf{F}_m = Q_{el}\,[\mathbf{vB}], \tag{1.56}$$

ilustrada en la fig. 1.4.

Si además del campo magnético B la carga en movimiento se encuentra también en el campo eléctrico E, dicha carga experimenta la acción de la fuerza total F:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{el} + \mathbf{F}_m = Q_{el}\,(\mathbf{E} + [\mathbf{vB}]), \tag{1.57}$$

que lleva el nombre de *fuerza de Lorentz*.

Valiéndose de la relación

$$\mathbf{F}_m = Q_{el}\,[\mathbf{vB}] = 1_{F_m} Q_{el} v B \operatorname{sen}\alpha,$$

donde 1_{Fm} es el versor que caracteriza la dirección de la fuerza $\mathbf{F}_m$, y α, el ángulo entre los vectores v y B, se puede hallar el vector B.

Efectivamente, al determinar por vía experimental (por ejemplo, según el desplazamiento de la mancha en la pantalla de un tubo de rayos catódicos) la magnitud de la fuerza F_m, así como conociendo el ángulo α entre el vector de la velocidad v y la orientación de las líneas de fuerza del campo magnético B, la magnitud de la carga Q_{el} y la velocidad de su movimiento v, es posible determinar el módulo del vector $|\,\mathbf{B}\,|$:

$$|\,\mathbf{B}\,| = \frac{F_m}{Q_{el} v \operatorname{sen}\alpha}.$$

Puesto que la dirección de este vector coincide con la orientación de las líneas de fuerza del campo, el vector B puede determinarse íntegramente.

Existe otra metodología para determinar el vector B. Al variar la dirección del vector v y registrar la fuerza F_m, se halla el valor máximo de la fuerza $F_{m\,máx}$ correspondiente a $\alpha = 90°$.

En este caso la dirección del vector B será perpendicular al vector v, y su módulo

$$|B| = \frac{F_{m\,máx}}{Q_{el} v}.$$

Basándose en la relación (1.56) determinemos la unidad de medida del vector B:

$$B \to \frac{N \cdot s}{C \cdot m}.$$

De la expresión (1.5) se infiere que $\frac{N \cdot m}{C} = B$, por eso

$$B \to \frac{V \cdot s}{m^2} = \frac{Wb}{m^2} = T. \quad (1.58)$$

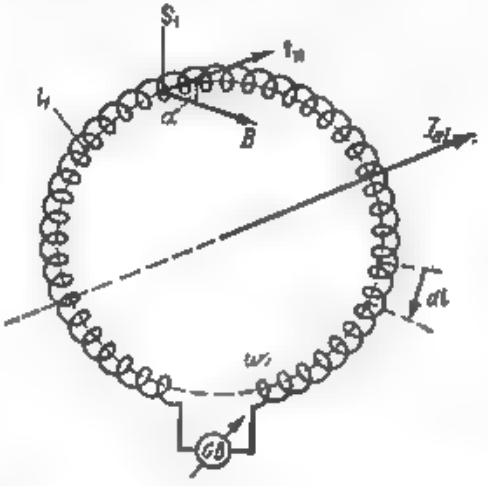

FIG. 1.5

Introduzcamos el concepto de flujo elemental $d\Phi_B$ del vector B a través de una superficie infinitamente pequeña dS:

$$d\Phi_B = B\,dS. \quad (1.59)$$

El flujo finito Φ_B a través de una superficie finita S_1 puede hallarse de la relación

$$\Phi_B = \int_{S_1} B\,dS. \quad (1.60)$$

En los procesos electrodinámicos el campo magnético es engendrado a costa de la corriente eléctrica I_{el}. Es importante establecer una relación matemática entre la corriente I_{el} y el vector B. Esta relación puede determinarse experimentalmente (fig. 1.5).

El plano de una bobina con un número de espiras w_1 es atravesado por la corriente I_{el} que crea el campo magnético B. El flujo de este vector Φ_B que atraviesa la espira de la bobina se halla a partir de la relación (1.60). Si el área de la espira de la bobina S_1 es lo suficientemente pequeña, entonces, dentro de los límites de esta área podemos considerar que el vector B es invariable, anotando la expresión (1.60) en la forma

$$\Phi_B = BS_1 \cos \alpha,$$

donde α es el ángulo entre la normal hacia la superficie S_1 y el vector B.

Suponiendo que el perímetro de la bobina es igual a l_1, hallamos el número de espiras que corresponde a un tramo infinitamente pequeño de este perímetro dl: $\frac{w_1 dl}{l_1}$.

El flujo Φ_B atravesará el plano de la espira de la bobina en el tramo dl $\frac{w_1 dl}{l_1}$ veces.

El flujo $d\Psi_B$ embragado con $\frac{w_1 dl}{l_1}$ espiras se define por el producto

$$d\Psi_B = \Phi_B \frac{w_1 dl}{l_1}.$$

El flujo total embragado con todas las espiras de la bobina o el flujo total ψ_B puede hallarse por medio de la integración a lo largo de todo el perímetro l_1 de la bobina:

$$\Psi_B = \oint_{l_1} \vec{\Phi}_B \frac{w_1}{l_1} dl = \frac{w_1}{l_1} \oint_{l_1} BS_1 \cos\alpha \, dl = \frac{w_1 S_1}{l_1} \oint_{l_1} B \cos\alpha \, dl.$$

Aquí α es el ángulo entre el vector B y la normal hacia la superficie S_1.

Con esta normal coincide la dirección del tramo $d\mathbf{l}$ del perímetro. Por consiguiente, α es el ángulo entre los vectores B y $d\mathbf{l}$. En este caso el producto bajo la integral puede representarse en forma vectorial:

$$B \cos dl = \mathbf{B}\, d\mathbf{l}.$$

Entonces

$$\Psi_B = \frac{w_1 S_1}{l_1} \int_{l_1} \mathbf{B}\, d\mathbf{l}.$$

Al conectar a los terminales de la bobina el galvanómetro balístico *GB* (véase la fig. 1 5) que permite medir el flujo embragado total Ψ_B para distintos valores de la corriente I_{el}, es posible hallar experimentalmente la integral $\oint_{l_1} \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \frac{\Psi_B l_1}{w_1 S_1}$ en función de la corriente I_{el}. Como resultado de los experimentos efectuados en el vacío se ha establecido que la integral $\oint_{l_1} \mathbf{B}\, d\mathbf{l}$ es proporcional a la corriente I_{el}.

En otras palabras, por vía experimental se ha constatado que es correcta la correlación

$$\oint_{l_1} \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \mu_0 I_{el}, \qquad (1.61)$$

donde μ_0 es el coeficiente de proporcionalidad llamado *constante magnética*:

$$\mu_0 = \frac{\oint_{l_1} \mathbf{B}\, d\mathbf{l}}{I_{e1}}.$$

Determinemos la unidad de la constante magnética:

$$\mu_0 \to \frac{\text{V}\cdot\text{s}\ \text{m}}{\text{m}^2\cdot\text{A}} = \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{m}\cdot\text{A}} = \text{H/m}. \tag{1.62}$$

En el sistema MKSA

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7} = 1{,}257\cdot 10^{-6}\ \text{H/m}. \tag{1.63}$$

Si en el experimento el campo magnético **B** es engendrado por la corriente I_{e1} que fluye en la segunda bobina cuyo número de espiras es w_2, la relación (1 62) debe escribirse en la siguiente forma:

$$\oint_{l_1} \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \mu_0 w_2 I_{e1}. \tag{1.64}$$

§ 1.5. Influencia del campo magnético externo sobre sustancia. Vector de intensidad del campo magnético H. Ley de la corriente total. Segunda ecuación material del medio. Segunda ecuación de continuidad

Analicemos el experimento ilustrado en la fig. 1.6.

Sobre el núcleo fabricado de cierto material está arrollada una bobina cuyo número de espiras es w_2 y por la cual se deja pasar la corriente I_{e1}. El campo magnético se mide en el punto de observación b, teniendo presente que existen núcleos hechos de distintos materiales.

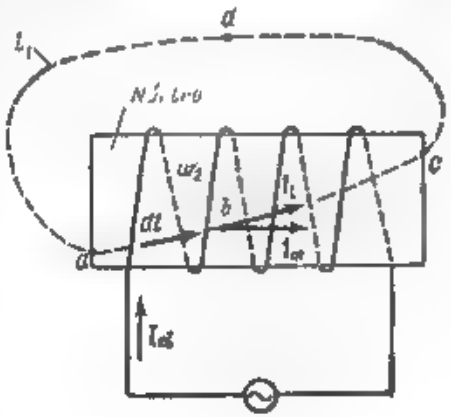

FIG 1.6

Los experimentos demuestran que en este caso nos encontramos con tres variantes de comportamiento del campo magnético: 1) al utilizarse núcleos ferromagnéticos el campo magnético incrementa bruscamente; 2) si se hace uso de núcleos diamagnéticos el campo magnético disminuye; 3) cuando se aplican núcleos paramagnéticos el campo magnético no sufre cambios esenciales en comparación con el experimento verificado sin núcleo.

Los hechos observados pueden explicarse por la diferente orientación de los imanes elementales en la sustancia bajo la acción del campo externo.

Con el objeto de definir cuantitativamente la influencia de la sustancia sobre el campo magnético admitamos el siguiente esquema de razonamientos.

Podemos considerar que el campo magnético complementario, suscitado por una determinada orientación de los imanes elementales, es equivalente al campo creado por la corriente adicional I_{e1} que abarca una vez el núcleo y viene distribuido uniformemente a lo largo de éste. En función de la magnitud y orientación de la corriente adicional, el campo magnético complementario, que dicha corriente crea, puede coincidir con el campo primario de la corriente I_{e1}. En este caso el campo total aumenta, o sea, tenemos el caso equivalente al del núcleo ferromagnético. El campo adicional puede orientarse de tal modo que el campo total disminuirá, o sea, se presenta un caso equivalente al del núcleo diamagnético. Al caso del núcleo paramagnético corresponde el valor cero de la corriente I'_{e1}. Cabe señalar que con una orientación adecuada de la corriente I'_{e1} es posible que cambie no sólo la magnitud, sino también la orientación del campo total.

A continuación, elijamos el contorno de recorrido l_1 (véase la fig. 1.6) cuyo tramo *ac* se halla dentro de los límites del núcleo, y el tramo *cda*, al margen de éste.

Examinemos la corriente infinitamente pequeña dI'_{e1} que abarca un tramo infinitesimal del contorno del recorrido dl. La relación dI'_{e1}/dl depende de la orientación del contorno del recorrido. Si esta orientación coincide con las líneas de corriente, la relación $dI'_{e1}/dl = 0$, puesto que al desplazarse a lo largo de las líneas de corriente el incremento dI'_{e1} es igual a cero. Si dl es perpendicular a las líneas de corriente, esta relación será máxima. Introduzcamos la designación

$$\left(\frac{dI'_{e1}}{dl}\right)_{máx} = M \tag{1.65}$$

Consideremos que la dirección dl_1, para la cual la derivada dI'_{e1}/dl tiene su valor máximo, se caracteriza por el vector unitario 1_m. Si la orientación del contorno del recorrido no coincide con la dirección 1_m y se define por el vector unitario 1_l, entonces, la derivada dI'_{e1}/dl puede obtenerse proyectando su valor máximo M, correspondiente a la dirección 1_m, sobre la nueva dirección 1_l. Esta proyección se caracteriza por el producto escalar de los vectores 1_l y 1_m. Por consiguiente, $dI'_{e1}/dl = M1_l1_m$.

Al designar

$$M1_m = \mathbf{M}_1 \tag{1.66}$$

donde **M** es el *vector de imantación de la sustancia*, obtenemos

$$\frac{dI'_{e1}}{dl} = \mathbf{M}1_l,$$

o bien

$$dI'_{e1} = \mathbf{M}1_l\, dl = \mathbf{M}\, d\mathbf{l}. \tag{1.67}$$

La corriente I'_{s1} se halla integrando la expresión (1.67) en el tramo *ac* del contorno del recorrido que se encuentra en la sustancia:

$$I'_{s1} = \int_{ac} \mathbf{M}\, d\mathbf{l}.$$

En el tramo *cda* del contorno de recorrido no hay sustancia y el vector **M** es igual a cero. En consecuencia,

$$\int_{cda} \mathbf{M}\, d\mathbf{l} = 0.$$

Cuando adicionamos esta integral a la integral en el tramo ac, esta última no varía. Entonces podemos escribir

$$I'_{s1} = \int_{ac} \mathbf{M}\, d\mathbf{l} + \int_{cda} \mathbf{M}\, d\mathbf{l}.$$

Al unir los tramos *ac* y *cda* del contorno del recorrido, obtenemos la integral a lo largo del contorno cerrado l_1:

$$I'_{s1} = \oint_{l_1} \mathbf{M}\, d\mathbf{l}. \tag{1.68}$$

De este modo, la influencia que la sustancia ejerce sobre el proceso de formación del campo magnético puede reducirse a la aparición de la corriente adicional I'_{s1}, además de la corriente primaria I_{e1} que ha creado el campo primario, el cual, a su vez, suscitó procesos internos en la sustancia. Para evaluar un campo magnético que surge en la sustancia bajo la influencia de la corriente es posible valerse de la relación (1.64), a condición de añadir a la corriente I_{e1} que fluyen por la bobina con un número de espiras w_2 la corriente I'_{s1} «de una espira». En este caso la expresión (1.64) se escribirá en la forma

$$\oint_{l_2} \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \mu_0 w_2 I_{e1} + \mu_0 I'_{s1} = \mu_0 w_2 I_{e1} + \mu_0 \oint_{l_2} \mathbf{M}\, d\mathbf{l}.$$

Al unir las integrales, obtenemos

$$\oint_{l_2} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) d\mathbf{l} = w_2 I_{e1}. \tag{1.69}$$

Introduzcamos la designación

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \mathbf{H}, \tag{1.70}$$

donde **H** es el *vector de intensidad del campo magnético*.

Por analogía con el vector de desplazamiento eléctrico o el vector de inducción eléctrica **D**, sería conveniente que el vector **H**, debido a la semejanza de los razonamientos, se llamase vector de

desplazamiento magnético o vector de inducción magnética, mientras que el vector B debería recibir el nombre de vector de intensidad del campo magnético. Lamentablemente, es imposible modificar la terminología establecida.

Teniendo en cuenta la designación (1.70) podemos representar la expresión (1.69) en la siguiente forma:

$$\oint_{l_1} \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = w_2 I_{e1}, \tag{1.71}$$

o bien, para $w_2 = 1$

$$\oint_{l_1} \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = I_{e1}. \tag{1.72}$$

Esta expresión lleva el nombre de *ley de la corriente total*. Por I_{e1} se entiende la corriente que pasa a través de cierta área acotada por el contorno de integración l_1.

Determinemos la unidad de intensidad del campo magnético:

$$\mathbf{H} \to \text{A/m}. \tag{1.73}$$

La expresión (1.70) representa la relación matemática entre los vectores B y H y lleva el nombre de *segunda ecuación material del medio*. Esta ecuación se escribe de manera distinta para los diferentes medios y es necesario detenerse en ella más detalladamente. Los razonamientos que exponemos a continuación son, en muchos aspectos, análogos a los que hemos aplicado al deducir la primera ecuación material del medio (véase el § 1.3).

Para un medio isótropo lineal homogéneo y un campo monocromático se supone que el vector de imantación de la sustancia M es proporcional al vector de intensidad del campo H:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}. \tag{1.74}$$

El coeficiente de proporcionalidad χ_m lleva el nombre de *susceptibilidad magnética de la sustancia*.

Las expresiones (1.65) y (1.74) permiten determinar las unidades de medida del vector de imantación de la sustancia y de la susceptibilidad magnética:

$$\mathbf{M} \to \text{A/m}, \tag{1.75}$$

$$\chi_m \to \frac{\text{A} \cdot \text{m}}{\text{m} \cdot \text{A}} = 1. \tag{1.76}$$

De este modo, χ_m es una magnitud adimensional.

Al sustituir la expresión (1.74) en la fórmula (1.70), obtenemos

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \chi_m \mathbf{H} = \mathbf{H} \mu_0 (1 + \chi_m). \tag{1.77}$$

Si introducimos la designación

$$\mu_0 (1 + \chi_m) = \mu_a, \tag{1.78}$$

donde μ_a se denomina *permeabilidad magnética absoluta de la sustancia*, podemos escribir

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}. \tag{1.79}$$

El coeficiente de proporcionalidad μ_a se mide, basándose en la relación (1.78), en las mismas unidades que la constante magnética:

$$\mu_a \rightarrow \text{H/m}. \tag{1.80}$$

Análogamente a la permitividad relativa (permeabilidad dieléctrica relativa) introduzcamos la permeabilidad magnética relativa:

$$\mu_r = \mu_a/\mu_0, \tag{1.81}$$

que también es una magnitud adimensional. En los medios reales la permeabilidad magnética relativa puede presentarse como magnitud real o compleja, oscilando entre los límites de una unidad a decenas de miles. La anotación de la segunda ecuación material para diferentes medios es, en grado considerable, análoga a la anotación de la primera ecuación material.

Por ejemplo, para un campo monocromático y un medio isótropo lineal heterogéneo la permeabilidad magnética, en el caso general, llega a ser función de las coordenadas curvilíneas generalizadas ξ, η, ζ:

$$\mu_a = \mu_a(\xi, \eta, \zeta)$$

y la segunda ecuación material se escribe de la manera siguiente:

$$\mathbf{B} = \mu_a(\xi, \eta, \zeta)\,\mathbf{H}. \tag{1.82}$$

Para un campo monocromático y un medio isótropo no lineal homogéneo la permeabilidad magnética es función del campo:

$$\mu_a = \mu_a(H)$$

y la segunda ecuación material se escribe del modo siguiente:

$$\mathbf{B} = \mu_a(H)\,\mathbf{H}. \tag{1.83}$$

Para un campo monocromático y un medio anisótropo lineal homogéneo son justas las relaciones del tipo (1.23)

$$\left.\begin{aligned} B_\xi &= \mu_{a11}H_\xi + \mu_{a12}H_\eta + \mu_{a13}H_\eta, \\ B_\eta &= \mu_{a21}H_\xi + \mu_{a22}H_\eta + \mu_{a23}H_\zeta, \\ B_\zeta &= \mu_{a31}H_\xi + \mu_{a32}H_\eta + \mu_{a33}H_\xi, \end{aligned}\right\} \tag{1.84}$$

o, en forma vectorial abreviada,

$$\mathbf{B} = (\mu_a)\,\mathbf{H}, \tag{1.85}$$

donde (μ_a) es el tensor de la permeabilidad magnética absoluta.

$$(\mu_a) = \begin{pmatrix} \mu_{a11} & \mu_{a12} & \mu_{a13}, \\ \mu_{a21} & \mu_{a22} & \mu_{a23}, \\ \mu_{a31} & \mu_{a32} & \mu_{a33}. \end{pmatrix} \tag{1.86}$$

En el caso general, cuando se trata de un medio anisótropo, cada una de las componentes del vector B varía en su escala respecto a la componente correspondiente del vector H, hecho que, en fin de cuentas, conduce a que las orientaciones de los vectores B y H no coincidan.

Para un campo no monocromático y un medio no dispersivo son justas las anotaciones de la segunda ecuación material que hemos indicado anteriormente.

Si el espectro de frecuencias del campo es discreto y el medio depende de la frecuencia (medio dispersivo), la segunda ecuación material es parecida por su forma a la primera ecuación material (1.27).

$$\mathbf{B} = \mu_a(\omega_0) H_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \mu_a(\omega_1) H_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \\ + \mu_a(\omega_2) H_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \quad + \mu_a(\omega_n) H_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \tag{1.87}$$

Para el espectro de frecuencias continuo y un medio dispersivo es posible aprovechar la transformación de Fourier o la de Laplace. En el primer caso es válida la relación de la forma (1.32,

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_a(\omega) G_H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{1.88}$$

Aquí

$$G_H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(t) e^{-j\omega t} dt \tag{1.89}$$

y, en correspondencia,

$$\mathbf{H}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_H(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{1.90}$$

En el segundo caso pueden escribirse las relaciones del tipo (1.38) y (1.39)

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \mu_a(p) \mathbf{H}(p) e^{pt} dp, \tag{1.91}$$

$$\mathbf{H}(p) = \int_0^{\infty} \mathbf{H}(t) e^{-pt} dt, \tag{1.92}$$

donde p se determina de la expresión (1.34).

Si la permeabilidad magnética absoluta μ_a varía conforme a la ley temporal prefijada

$$\mu_a = \mu_a(t) \tag{1.93}$$

y el medio no posee dispersión, entonces, para un medio isótropo lineal homogéneo será justa la relación

$$\mathbf{B} = \mu_a(t) \mathbf{H}. \tag{1.94}$$

En este caso el medio se llama paramétrico. Es más complicado el caso cuando la permeabilidad magnética absoluta no sólo cambia en el tiempo, sino también es función de la frecuencia:

$$\mu_a = \mu_a(t, \omega). \tag{1.95}$$

En la determinación de la forma de la segunda ecuación material del medio puede utilizarse la transformación de Fourier, o bien, la de Laplace, análogamente a como ello fue hecho al deducir la primera ecuación material. Las fórmulas obtenidas en este caso son análogas a las expresiones (1.47) y (1.50):

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_a(t, \omega) G_H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{1.96}$$

o bien

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \mu_a(t, p)\, \mathbf{H}(p)\, e^{pt}\, dp. \qquad (1.97)$$

Aquí $G_H(\omega)$ y $\mathbf{H}(p)$ se calculan por medio de las relaciones (1.89) y (1.92).

En el § 1.3 fue deducida la primera ecuación de continuidad que representa la relación matemática entre el vector de densidad de la corriente eléctrica $\mathbf{J}_{el}$ y la densidad volumétrica de la carga eléctrica ρ_{el}. Como base de la deducción se tomó el teorema generalizado de Gauss que enlaza el flujo del vector D con la carga Q_{el}. En el caso de vectores magnéticos el flujo del vector **B** se determina por la relación (1.60) En el teorema de Gauss el flujo del vector **D** se anota por medio de la superficie acotada S_1. Al escribir el flujo análogo del vector **B**, es necesario igualarlo a cero debido al carácter cerrado de las líneas de fuerza magnéticas, así como a raíz del hecho de que hasta el día de hoy no se conocen polos magnéticos positivos o negativos de existencia independiente, los cuales se podrían considerar como cargas magnéticas Q_m positivas o negativas. Sin embargo, a veces es racional introducir artificialmente en los cálculos cargas magnéticas extrínsecas Q_m. El término extrínseco significa que esta carga se introduce complementariamente desde el exterior y sirve de fuente (o manantial) del campo. El concepto de carga magnética y de corriente magnética extrínseca ligada a la primera, como se demostrará más adelante, conduce al llamado principio de dualidad de permutación de las ecuaciones electrodinámicas que facilita considerablemente la resolución de toda una serie de problemas electrodinámicos. Partiendo de estas consideraciones, la expresión para el flujo del vector **B** a través de una superficie acotada S_1 debe escribirse en dos formas:

sin tener en cuenta las cargas magnéticas

$$\oint_{S_1} \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = 0, \qquad (1.98)$$

con introducción de cargas magnéticas

$$\oint_{S_1} \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = Q_m \qquad (1.99)$$

Las igualdades (1.98) y (1.99) son justas en el caso de que en el medio se puede prescindir de las llamadas pérdidas magnéticas caracterizadas por la permeancia, la cual se introducirá más tarde. Si existe la permeancia, estas fórmulas se modificarán.

A base de la ecuación (1.58) la inducción magnética B se mide en webers por metro cuadrado.

Aprovechando las relaciones (1.99) y (1.58) se puede establecer la unidad de medida de la carga magnética:

$$Q_m \to \frac{V \cdot s}{m^2} \cdot m^2 = V \cdot s = Wb. \qquad (1.100)$$

La carga magnética Q_m está ligada a su densidad volumétrica ρ_m por una relación que tiene la forma (1.51):

$$Q_m = \int_{V_1} \rho_m \, dV. \qquad (1.101)$$

Hallemos la unidad de densidad volumétrica de la carga magnética:

$$\rho_m \to \frac{V \cdot s}{m^3} = \frac{Wb}{m^3}. \qquad (1.102)$$

Teniendo en cuenta (1.101) podemos escribir la fórmula (1.99) de la siguiente manera:

$$\oint_{S_1} \mathbf{B} \, dS = \int_{V_1} \rho_m \, dV. \qquad (1.103)$$

Con el hecho de admitir la introducción artificial en la electrodinámica de las cargas magnéticas extrínsecas, conviene reconocer también la existencia de la corriente magnética extrínseca I_m ligada con la carga por una relación del tipo (1.53):

$$I_m = -\frac{\partial Q_m}{\partial t} = -\int_{V_1} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} \, dV. \qquad (1.104)$$

Determinemos la unidad de corriente magnética:

$$I_m \to \frac{V \cdot s}{s} = V. \qquad (1.105)$$

Por cuanto la corriente magnética extrínseca se mide en voltios, sería más correcto llamarla intensidad extrínseca, no obstante, conservaremos la terminología adoptada con anterioridad.

La corriente magnética está relacionada con la densidad de la corriente J_m por una expresión del tipo (1.54)

$$I_m = \oint_{S_1} \mathbf{J}_m \, dS. \qquad (1.106)$$

De aquí puede hallarse la unidad de densidad de la corriente magnética

$$J_m \to V/m^2. \qquad (1.107)$$

Teniendo en cuenta (1.106) la relación (1.104) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\oint_{S_1} \mathbf{J}_m \, dS = -\int_{V_1} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} \, dV. \qquad (1.108)$$

Esta expresión se denomina *segunda ecuación de continuidad en forma integral* que relaciona la densidad de la corriente magnética extrínseca $\mathbf{J}_m$ con la densidad volumétrica de la carga magnética extrínseca ρ_m.

§ 1.6. Conductibilidad eléctrica del medio. Ley de Ohm en sus formas diferencial e integral. Corriente eléctrica extrínseca. Corriente de desplazamiento. Ley generalizada de la corriente total

En el miembro derecho de la expresión (1.72) que define la ley de la corriente total se escribe la corriente I_{el}. En correspondencia con la fundamentación expuesta anteriormente se debe entender por esta corriente la corriente de un generador la cual fluye por un conductor y genera un campo magnético. Sin embargo, dicha representación no es la única posible. Si un campo magnético variable en el tiempo es engendrado por cierta fuente de corriente, y en el espacio en que existe el campo magnético hay conductores, entonces, en estos últimos, como lo demuestra la experiencia, surgirán corrientes de conducción. Estas, a su vez, suscitan un campo magnético que interacciona con el campo primario Como consecuencia obtenemos un campo total que es el resultado de la acción de las corrientes del generador y de las corrientes existentes en el medio conductor. La relación (1.72) se llama ley de la corriente total precisamente por la razón de que en ella figura el campo magnético total creado por todas las corrientes existentes en la parte considerada del espacio. Estas corrientes es conveniente subdividir. Se ha convenido en llamar las corrientes creadas por el generador corrientes eléctricas extrínsecas (a veces se denominan también exteriores o ajenas) o corrientes de excitación, mientras que las corrientes engendradas por el campo en un medio conductor han recibido el nombre de corrientes de conducción.

Se pueden escribir las siguientes relaciones entre la corriente eléctrica extrínseca I_{el} y el vector de su densidad $\mathbf{J}_{el}$, así como entre la corriente de conducción $I_{el.c}$ y el vector de su densidad $\mathbf{J}_{el.c}$:

$$I_{el} = \int_{S_1} \mathbf{J}_{el}\, d\mathbf{S}, \tag{1.109}$$

$$I_{el.c} = \int_{S_1} \mathbf{J}_{el.c}\, d\mathbf{S} \tag{1.110}$$

Puesto que la corriente $I_{el.c}$ es creada por un campo, conviene expresarla por medio del campo valiéndose de la ley de Ohm:

$$I_{el.c} = U/R \tag{1.111}$$

donde U es la diferencia de potencial en los extremos del tramo conductor del medio, y R, la resistencia del tramo conductor igual a

$$R = \frac{l}{S\gamma_{el}} \tag{1.112}$$

(l es la longitud del tramo conductor, m; S, la sección del tramo conductor, m^2, y γ_{el}, la conductividad eléctrica del medio, S/m).

Al sustituir la expresión (1.112) en la (1.111), obtenemos

$$I_{el.c} = \frac{U}{l} S\gamma_{el}.$$

En la electrodinámica tenemos que tratar con magnitudes que varían de un punto a otro del espacio considerado. Debido a ello, es mejor representar la relación obtenida en forma diferencial:

$$dI_{el.c} = \frac{dU}{dl} dS\gamma_{el}.$$

Aquí $dI_{el.c}$ es una corriente infinitamente pequeña que pasa a través de la sección infinitesimal dS como resultado de la existencia, en una longitud infinitamente pequeña dl, de un tramo conductor de la diferencia de potencial infinitamente pequeña dU.

Al dividir ambos miembros de esta expresión por dS, obtenemos

$$\frac{dI_{el.c}}{dS} = J_{el.c} = \frac{dU}{dl}\gamma_{el}. \tag{1.113}$$

La diferencia de potencial U puede expresarse mediante la fórmula (1.5)

$$U = \int_{l_1} \mathbf{E}\, dl 1_l$$

(1_l es el vector unitario orientado a lo largo de la longitud dl).

Por consiguiente, $dU/dl = \mathbf{E}1_l$.

Entonces, en vez de la fórmula (1.113) obtenemos

$$J_{el.c} = \mathbf{E}1_l\gamma_{el}.$$

Al multiplicar escalarmente los dos miembros de esta expresión por el versor 1_l, hallamos

$$J_{el.c}1_l = J_{el.c} = \mathbf{E}1_l 1_l\gamma_{el},$$

o bien

$$\mathbf{J}_{el.c} = \gamma_{el}\mathbf{E}. \tag{1.114}$$

La relación (1.114) recibe el nombre de *ley de Ohm en forma diferencial*. La misma enlaza el vector de densidad de la corriente de conducción eléctrica $\mathbf{J}_{el.c}$ con el vector de intensidad del campo eléctrico E por medio de la conductividad eléctrica del medio γ_{el}.

La relación (1.114) puede considerarse como la *tercera ecuación material del medio*. Análogamente a la primera y la segunda ecuaciones materiales puede anotarse de distinta manera para medios diferentes.

Para un medio heterogéneo tenemos la expresión del tipo (1.82):

$$J_{el.c} = \gamma_{el}(\xi, \eta, \zeta)\, E, \tag{1.115}$$

Para un medio no lineal es justa la fórmula análoga a la (1.83):

$$J_{el.c} = \gamma_{el}(E)\, E, \tag{1.116}$$

y para un medio anisótropo son válidas las relaciones del tipo (1.84), (1.85) y (1.86):

$$\left.\begin{aligned} J_{el.c\xi} &= \gamma_{el11} E_\xi + \gamma_{el12} E_\eta + \gamma_{el13} E_\zeta, \\ J_{el.c\eta} &= \gamma_{el21} E_\xi + \gamma_{el22} E_\eta + \gamma_{el23} E_\zeta, \\ J_{el.c\zeta} &= \gamma_{el31} E_\xi + \gamma_{el32} E_\eta + \gamma_{el33} E_\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{1.117}$$

o bien, en forma vectorial abreviada

$$J_{el.c} = (\gamma_{el})\, E, \tag{1.118}$$

donde (γ_{el}) es el tensor de la conductividad eléctrica:

$$(\gamma_{el}) = \begin{pmatrix} \gamma_{el11} & \gamma_{el12} & \gamma_{el13} \\ \gamma_{el21} & \gamma_{el22} & \gamma_{el23} \\ \gamma_{el31} & \gamma_{el32} & \gamma_{el33} \end{pmatrix} \tag{1.119}$$

En el caso de un espectro de frecuencias discreto y una relación de frecuencia $\gamma_{el} = \gamma_{el}(\omega)$, la tercera ecuación material del medio toma una forma similar a la (1.87):

$$J_{el.c} = \gamma_{el}(\omega_0) E_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \gamma_{el}(\omega_1) E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \\ + \gamma_{el}(\omega_2) E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \ \cdot \ + \gamma_{el}(\omega_n) E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \ldots \tag{1.120}$$

En el caso de un espectro de frecuencias continuo y una relación de frecuencia γ_{el}, son válidas las expresiones del tipo (1.88), (1.89) o (1.91), (1.92):

$$J_{el.c}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{el}(\omega)\, G_E(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega, \tag{1.121}$$

o bien

$$J_{el.c}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \gamma_{el}(p)\, E(p)\, e^{pt}\, dp. \tag{1.122}$$

En estas relaciones $G_E(\omega)$, $E(p)$ y p se hallan, respectivamente, por medio de las expresiones (1.28), (1.33) y (1.34).

Para un medio paramétrico son características las fórmulas del tipo (1.96) o (1.97):

$$J_{el.c}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{el}(t, \omega)\, G_E(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{1.123}$$

o bien

$$J_{el.c}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \gamma_{el}(t, p)\, E(p)\, e^{pt}\, dp. \tag{1.124}$$

Teniendo en cuenta las relaciones (1.110) y (1.114), podemos escribir la siguiente expresión para la corriente de conducción:

$$I_{el\ c} = \int_{S_1} \mathbf{J}_{el\ c}\, d\mathbf{S} = \int_{S_1} \gamma_{el}\mathbf{E}\, d\mathbf{S}. \qquad (1.125)$$

La expresión (1.125) representa la *ley de Ohm en su forma integral para el caso de parámetros variables del medio y del campo.*

Los razonamientos aducidos son aplicables a los medios que poseen conductibilidad. Sin embargo, de conformidad con los datos experimentales, al suministrar a las armaduras del condensador tensión alterna, por el circuito del condensador pasará una corriente que creará un campo magnético, de la misma manera que una corriente de conducción. Se ha demostrado experimentalmente el carácter justo de la ley de la corriente total (1.72) en el caso de sustituir la corriente I_{el} por la corriente que fluye por el circuito del condensador. Esta corriente recibió el nombre de *corriente de desplazamiento.*

Ampere estableció la ley investigando las corrientes en los conductores y los campos creados por estas corrientes. Faraday sometió al análisis los resultados de la acción de los campos, variables en el tiempo, sobre los circuitos conductores.

El mérito de Maxwell consiste en que dicho científico, además del concepto de corriente de conducción, introdujo el concepto de corriente de desplazamiento. A continuación daremos la formulación matemática de este concepto.

Realicemos la diferenciación de la expresión (1.15) respecto al tiempo:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \qquad (1.126)$$

Puesto que el vector **D** se mide en C/m^2, la unidad para medir la derivada $\partial \mathbf{D}/\partial t$ es $C/(m^2 \cdot s)$. Pero $C/s = A$ y A/m^2 es la unidad de medida de la densidad de la corriente. De este modo,

$$\partial \mathbf{D}/\partial t \rightarrow A/m^2.$$

Esta derivada puede considerarse como cierta densidad de la corriente. Las componentes de esta densidad de la corriente definidas por la expresión (1.126) permiten hacer las siguientes conclusiones. La expresión $dQ'_{el} = \mathbf{P}\, dS\, \mathbf{1}_n$ representa la relación matemática del vector de polarización de la sustancia **P** con la carga dQ'_{el} que atravesó la superficie dS como resultado del proceso de polarización. Al escribir de nuevo esta expresión en forma de $dQ'_{el}/dS = \mathbf{P}\mathbf{1}_n$ y multiplicar ambos miembros por $\mathbf{1}_n$ de modo escalar, obtenemos

$$\frac{dQ'_{el}}{dS}\mathbf{1}_n = \mathbf{P}.$$

La derivada

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dQ'_{el}}{dS}\right)\mathbf{1}_n = \frac{d}{dS}\left(\frac{\partial Q'_{el}}{\partial t}\right)\mathbf{1}_n.$$

La derivada $\partial Q'_{el}/\partial t \quad I'_{e}$, representa la corriente I'_{el} creada como resultado del desplazamiento en el dieléctrico de las cargas Q_{el}. Esta corriente se denomina *corriente de desplazamiento en el dieléctrico*. Entonces

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{dI'_{el}}{dS}\mathbf{1}_n = J'_{el}\mathbf{1}_n = \mathbf{J}'_{el}, \qquad (1\ 127)$$

donde $\mathbf{J}'_{el}$ es la densidad de la corriente de desplazamiento en el dieléctrico.

De este modo, el segundo sumando en la expresión (1.126) es la densidad de la corriente de desplazamiento en el dieléctrico que aparece como resultado del proceso de polarización.

Por consiguiente, si entre las armaduras del condensador se coloca un dieléctrico, en éste aparecerá una corriente de desplazamiento capaz de crear un campo magnético. La experiencia demuestra que el campo magnético se engendra también en el caso de que entre las placas falta el dieléctrico y éstas se encuentran en el vacío. En correspondencia con la teoría de Maxwell en este caso aparece la corriente de desplazamiento en el vacío, cuyo vector de densidad es

$$\mathbf{J}'_{el.v} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \qquad (1.128)$$

Esta corriente la crean los fotones.

La densidad total de la corriente de desplazamiento es

$$\mathbf{J}_{des} = \partial \mathbf{D}/\partial t. \qquad (1.129)$$

De esta manera, en el caso general el campo magnético es definido por tres corrientes: la corriente eléctrica extrínseca I_{el} (1.109), la corriente de conducción $I_{el.c}$ (1.125) y la corriente de desplazamiento determinada por la fórmula

$$I_{des} = \int_{S_1} \mathbf{J}_{des}\, d\mathbf{S} = \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\, d\mathbf{S}. \qquad (1.130)$$

Si en el proceso de formación del campo magnético toman parte todas las tres corrientes, la ley de la corriente total (1 72) debe presentarse en forma ampliada:

$$\oint_{l_1} \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J}_{el}\, d\mathbf{S} + \int_{S_1} \gamma_{el}\mathbf{E}\, d\mathbf{S} + \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\, d\mathbf{S}. \qquad (1.131)$$

Esta expresión proporciona la relación matemática entre la corriente extrínseca creadora del campo y los vectores del mismo. Debido a que el vector D puede ser definido por medio del vector E, aprovechando las ecuaciones materiales del medio, la ecuación (1.131) para una densidad de la corriente y unos parámetros del medio conocidos, representa una ecuación en la cual las incógnitas son dos vectores del campo: **E** y **H**. Para resolverla es necesaria una segunda ecuación que relacione estos vectores

§ 1.7. Teorema de Gauss para la sustancia en el caso de un medio conductor

En el § 3 se ha demostrado que el teorema de Gauss para la sustancia (1.16) es justo en el caso de un medio no conductor, o sea, de un dieléctrico ideal. En la deducción de este teorema, además de la carga eléctrica extrínseca que engendra el campo se han tomado en consideración las cargas surgidas a costa de las corrientes de desplazamiento. Para un medio conductor también deben tenerse en cuenta las cargas que aparecen a expensas de las corrientes de conducción. Como base de los razonamientos se ha tomado la expresión (1.16).

Cuando existe la conductividad γ_{e1} en un medio limitado por una superficie acotada S_1 en la cual se encuentra la carga extrínseca Q_{e1} creadora del campo, hacia fuera de los límites de esta superficie fluirá la corriente de conducción $I_{e1\,c}$ definida por la expresión (1.125). A resultas de ello, la carga extrínseca Q_{e1} introducida en la superficie S_1 en el momento del tiempo $t = 0$, irá disminuyendo de acuerdo con la ley

$$Q_{e1} - \int_0^t I_{e1.c}\, dt = Q_{e1} - \oint_{S_1} \int_0^t \gamma_{e1} \mathbf{E}\, dt\, d\mathbf{S}.$$

Al sustituir esta expresión en el miembro derecho del teorema de Gauss (1.16), en lugar de la carga Q_{e1} obtenemos

$$\oint_{S_1} \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = Q_{e1} - \oint_{S_1} \int_0^t \gamma_{e1} \mathbf{E}\, dt\, d\mathbf{S}.$$

Seguidamente, al unir las integrales de superficie

$$\oint_{S_1} \left(\mathbf{D} + \int_0^t \gamma_{e1} \mathbf{E}\, dt \right) d\mathbf{S} = Q_{e1}, \tag{1.132}$$

hallamos la relación que representa el *teorema de Gauss para la sustancia en el caso de un medio conductor*. Si el medio no es anisótropo lineal y homogéneo, o bien, si el campo reviste carácter espectral, entonces, la corriente de conducción debe escribirse teniendo en cuenta la tercera ecuación material que expresa la relación entre la densidad de la corriente de conducción y el vector E en cada caso concreto.

§ 1.8. Ley de la inducción electromagnética de Faraday. Corriente magnética extrínseca. Permeancia del medio. Ley de la inducción electromagnética en forma ampliada. Dualidad de permutación de las ecuaciones integrales de electrodinámica

En 1831 Faraday descubrió el fenómeno de inducción electromagnética. Este consiste en que un campo magnético variable en el tiempo que corta el plano de la espira conductora crea en sus extremos una diferencia de potencial. Faraday estableció que la diferencia de potencial es proporcional a la velocidad de cambio del flujo del vector de la inducción magnética B. Expresemos este hecho matemáticamente:

$$U = -\partial \Phi_B / \partial t, \tag{1.133}$$

donde U es la diferencia de potencial en los extremos de la espira conductora, y Φ_B, el flujo del vector B a través del área de la espira S_1.

El signo «menos» significa que la diferencia de potencial que aparece engendra en la espira una corriente de dirección tal que el flujo magnético secundario creado por esta corriente alrededor de la espira está orientado en dirección contraria a la del flujo magnético primario (exterior). En este caso el flujo magnético total disminuye, lo cual se puede considerar como consecuencia del hecho de que al circuito de la fuente exterior creadora del campo primario se haya conectado una diferencia de potencial suplementaria. El signo de esta diferencia de potencial debe ser opuesto al signo de la tensión de la fuente que engendra el campo magnético primario.

Valiéndose de las expresiones (1.5) y (1.60), es posible escribir la relación (1.133) de la siguiente manera:

$$\oint_{l_1} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} \tag{1.134}$$

La integral del primer miembro se ha tomado a lo largo del contorno cerrado l_1 ya que la espira se considera cerrada. En la integral del segundo miembro el área S_1 representa el área de una espira cerrada. La expresión obtenida da la relación matemática entre los vectores de los campos eléctrico y magnético existente en los campos dinámicos, es decir, variables en el tiempo. Dicha expresión se denomina *ley de la inducción electromagnética de Faraday*. Junto con la expresión (1.131) y las ecuaciones del medio (1.19) y (1.79) esta relación forma un sistema de ecuaciones que enlaza los vectores eléctricos y magnéticos con las corrientes eléctricas extrínsecas.

Al comparar la forma matemática de las expresiones (1.131) y (1.134), podemos advertir la semejanza de ambas relaciones en el caso en que la conductividad eléctrica del medio γ_{el} es igual a cero y falta la corriente eléctrica extrínseca definida por la densidad $\mathbf{J}_{el}$.

En el § 1.5 nos hemos referido a la conveniencia de introducir en la electrodinámica, en algunas ocasiones, cargas magnéticas extrínsecas artificiales Q_m (1.99). Si en el cálculo se han introducido las cargas anteriormente citadas, entonces, basándose en la fórmula (1.104), se deben tomar en consideración las corrientes magnéticas extrínsecas I_m ligadas a la densidad J_m por medio de la relación (1.106).

Puesto que la corriente I_m se mide en voltios, la introducción de las cargas magnéticas extrínsecas puede considerarse como introducción adicional a la diferencia de potencial definida por la integral $\oint_{l_1} \mathbf{E}\, d\mathbf{l}$, de cierta tensión extrínseca exterior.

Esta tensión suscitada por fuentes exteriores existe en aquella zona del espacio en la cual se supone la presencia de una corriente magnética extrínseca I_m, corriente que, como se ha señalado ya, sería más correcto denominar tensión extrínseca. En este caso dicha corriente debe tenerse en cuenta en la ley de la inducción electromagnética, sumándola con la diferencia de potencial creada a base del campo magnético variable en el tiempo. Entonces, la expresión (1.134) toma la forma

$$\oint_{l_1} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} + I_m = -\int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, d\mathbf{S},$$

o bien

$$\oint_{l_1} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} + \int_{S_1} \mathbf{J}_m\, d\mathbf{S} = -\int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, d\mathbf{S}. \qquad (1.135)$$

Más adelante se aclarará de qué modo se realiza en la práctica la introducción de la corriente magnética y cuándo es racional aprovechar este concepto.

La expresión (1.135) puede escribirse en otra forma:

$$\oint_{l_1} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\int_{S_1} \mathbf{J}_m\, d\mathbf{S} - \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, d\mathbf{S}. \qquad (1.136)$$

Valiéndose de las ecuaciones materiales del medio (1.19) y (1.79) es posible escribir las leyes de la corriente total y de la inducción electromagnética (1.131), (1.136) en otra forma:

$$\oint_{l_1} \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J}_{el}\, d\mathbf{S} + \int_{S_1} \gamma_{el}\mathbf{E}\, d\mathbf{S} + \int_{S_1} \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\, d\mathbf{S}, \qquad (1.137)$$

$$\oint_{l_1} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\int_{S_1} \mathbf{J}_m\, d\mathbf{S} - \int_{S_1} \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\, d\mathbf{S}. \qquad (1.138)$$

Al tomar $\gamma_{el} = 0$ y comparar las dos expresiones, podemos advertir que para $\gamma_{el} = 0$ la transición de la una a la otra se realiza sustituyendo el vector H por el vector E, y viceversa; sustituyendo

la densidad de la corriente J_{el} por la densidad de la corriente J_m tomada con el signo «menos», y viceversa, así como cambiando la permitividad absoluta ε_a por la permeabilidad absoluta e_a tomada también con el signo «menos». Al verificar tales permutaciones la ecuación (1.137) (para $\gamma_{el} = 0$) se convierte en la (1.138) e, inversamente, la ecuación (1 138) en la (1.137). Esta propiedad de las ecuaciones electrodinámicas se llama *dualidad de permutación*.

Si $\gamma_{el} \neq 0$, la dualidad permutativa es válida siempre y cuando se añada a la ecuación (1.138) el término $-\int\limits_{S_1} \gamma_m H\, dS$.

En este caso convendría hacer una permutación más, a saber, sustituir la conductividad eléctrica γ_{el} por la permeancia γ_m tomada con el signo inverso, y viceversa.

Teniendo en cuenta que la integral introducida se mide en voltios, $H \to A/m$ y $dS \to m^2$, determinemos la unidad de medida de γ_m:

$$\gamma_m \to \frac{V \cdot m}{m^2 A} = \frac{\Omega}{m}. \qquad (1.139)$$

A la magnitud γ_m se da el nombre de *permeancia* (*conductividad magnética*), aunque sería más correcto denominarla resistencia específica magnética, o reluctancia.

La magnitud γ_m se ha introducido en la ecuación (1.138) formalmente, con el fin de escribir la ley de la inducción electromagnética en una forma semejante a la de la ley de la corriente total, lo que hubiera permitido pasar de transformar una ecuación a la otra valiéndose del principio de dualidad permutativa. Como se definirá en adelante, en el sentido físico γ_m caracteriza las pérdidas en la sustancia al actuar sobre ésta el campo magnético.

En el caso de admitir la existencia de la integral

$$\int\limits_{S_1} \gamma_m H\, dS_1$$

la ley de la inducción electromagnética debería escribirse de la siguiente manera:

$$\oint\limits_{l_1} E dl = -\int\limits_{S_1} J_m\, dS - \int\limits_{S_1} \gamma_m H\, dS - \int\limits_{S_1} \mu_a \frac{\partial H}{\partial t}\, dS. \qquad (1.140)$$

Introduzcamos la designación

$$\int\limits_{S_1} \gamma_m H\, dS = I_{m.p}. \qquad (1.141)$$

Esta integral, en correspondencia con la terminología utilizada, puede considerarse como corriente de permeancia.

Introduzcamos el concepto de vector de densidad de la corriente de permeancia:

$$J_{m.p} = \gamma_m H. \qquad (1.142)$$

Entonces

$$I_{m.p} = \int_{S_1} J_{m.p}\, dS. \tag{1.143}$$

La expresión (1.142) representa la *cuarta ecuación material del medio*. Del mismo modo como la relación (1.114) para la densidad de la corriente eléctrica de conducción esta expresión es justa para el caso de un medio isótropo lineal homogéneo que no posee dispersión.

Para otros medios podemos escribir relaciones obtenidas a partir de las fórmulas (1.115)—(1.124) recurriendo a conversiones: $\gamma_{el} \to -\gamma_m$,

$$J_{el.c} \to -J_{m.p}; \quad E \to H.$$

Para un medio heterogéneo

$$J_{m.p} = \gamma_m(\xi, \eta, \zeta)\, H. \tag{1.144}$$

Para un medio no lineal

$$J_{m.p} = \gamma_m(H)\, H. \tag{1.145}$$

Para un medio anisótropo

$$\left.\begin{aligned} J_{m.p\xi} &= \gamma_{m11} H_\xi + \gamma_{m12} H_\eta + \gamma_{m13} H_\zeta, \\ J_{m.p\eta} &= \gamma_{m21} H_\xi + \gamma_{m22} H_\eta + \gamma_{m23} H_\zeta, \\ J_{m.p\zeta} &= \gamma_{m31} H_\xi + \gamma_{m32} H_\eta + \gamma_{m33} H_\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{1.146}$$

o bien, en forma vectorial

$$J_{m.p} = (\gamma_m)\, H. \tag{1.147}$$

donde (γ_m) es el tensor de la permeancia:

$$(\gamma_m) = \begin{pmatrix} \gamma_{m11} & \gamma_{m12} & \gamma_{m13} \\ \gamma_{m21} & \gamma_{m22} & \gamma_{m23} \\ \gamma_{m31} & \gamma_{m32} & \gamma_{m33} \end{pmatrix}. \tag{1.148}$$

En el caso de un espectro de frecuencias discreto y la existencia de una dependencia de frecuencia $\gamma_m = \gamma_m(\omega)$, es justa la relación

$$J_{m.p} = \gamma_m(\omega_0) H_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \gamma_m(\omega_1) H_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \\ + \gamma_m(\omega_2) H_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \ldots + \gamma_m(\omega_n) H_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \ldots \tag{1.149}$$

Para el espectro de frecuencias continuo y la dependencia de frecuencia γ_m

$$J_{m.p}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_m(\omega)\, G_H(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega, \tag{1.150}$$

o bien

$$J_{m.p}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \gamma_m(p)\, H(p)\, e^{pt}\, dp, \tag{1.151}$$

donde $G_H(\omega)$, $H(p)$ y p se hallan a partir de las fórmulas (1.89), (1.92) y (1.34), respectivamente.

Para un medio paramétrico la cuarta ecuación material se escribe en la forma

$$J_{m\ p}(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma_m(t\quad\omega)\,G_H(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega, \tag{1.152}$$

o bien

$$J_{m.\ p}(t)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty}\gamma_m(t,\ p)\,H(p)\,e^{pt}\,dp. \tag{1.153}$$

Las ecuaciones (1.137) y (1.140) representan leyes generalizadas de la corriente total y de la inducción electromagnética y sirven de base para el análisis ulterior de los procesos electrodinámicos.

§ 1.9. Relación integral $\oint\limits_{S_1}\mathbf{B}\,dS = Q_m$ para el caso de un medio con permeancia

En el § 1.5 se ha demostrado que la expresión (1.99) es válida en ausencia de la permeancia γ_m. Si es que tenemos la permeancia, es necesario tomar en consideración la disminución de la carga magnética Q_m debido a la existencia de corrientes de permeancia como se ha hecho en el § 1.7. Para una superficie cerrada esta corriente se define por la fórmula (1.141).

Al suponer que todos los procesos se han iniciado en el momento $t = 0$, en lugar de la carga Q_m en el segundo miembro de la expresión (1.99) hay que poner la relación

$$Q_m-\int\limits_0^t I_{m.\ p}\,dt = Q_m-\oint\limits_{S_1}\int\limits_0^t\gamma_m\mathbf{H}\,dt\,dS.$$

En este caso la expresión (1.99) se escribe en la forma

$$\oint\limits_{S_1}\mathbf{B}\,dS = Q_m-\oint\limits_{S_1}\int\limits_0^t\gamma_m\mathbf{H}\,dt\,dS.$$

Al unir las integrales de superficie, obtenemos

$$\oint\limits_{S_1}\left(\mathbf{B}+\int\limits_0^t\gamma_m\mathbf{H}\,dt\right)dS = Q_m. \tag{1.154}$$

Si el medio no es homogéneo, lineal e isótropo, o bien, si el campo reviste carácter espectral, la corriente de conducción debe anotarse teniendo en cuenta la cuarta ecuación material del medio para cada caso concreto.

En ausencia de corrientes magnéticas extrínsecas y a condición de que $Q_m = 0$, la expresión (1.154) toma la forma

$$\oint\limits_{S_1}\left(\mathbf{B}+\int\limits_0^t\gamma_m\mathbf{H}\,dt\right)dS = 0. \tag{1.155}$$

§ 1.10. Amplitudes complejas de los vectores del campo, de las cargas y de las corrientes. Ecuaciones de electrodinámica para las amplitudes complejas en forma integral. Ecuaciones integrales de electrodinámica en el caso de señales espectrales

Las expresiones de la ley de la corriente total y de la ley de la inducción electromagnética (1.137) y (1.140) son relaciones complejas integral-diferenciales y por esta causa es necesario tratar de conseguir su simplificación. En la teoría de los circuitos eléctricos una simplificación sustancial de los cálculos la puede proporcionar la introducción del método complejo que también puede aprovecharse con éxito en la electrodinámica. Supongamos que el medio es lineal y que los vectores del campo son creados por una corriente monocromática, es decir, por una corriente que oscila con una frecuencia ω. La densidad de la corriente monocromática es

$$\mathbf{J}_{el} = \mathbf{J}_{el\,m} \cos(\omega t + \varphi_{J_{el}}),$$

o bien, en otra forma,

$$\mathbf{J}_{el} = \mathrm{Re}\{(\mathbf{J}_{elm} e^{j\varphi_{J_{el}}}) e^{j\omega t}\}.$$

Introduzcamos la designación

$$\mathbf{J}_{elm} e^{j\varphi_{J_{el}}} = \dot{\mathbf{J}}_{el}, \tag{1.156}$$

donde $\dot{\mathbf{J}}_{el}$ es la *amplitud compleja de la densidad de la corriente eléctrica extrínseca.*

Entonces

$$\mathbf{J}_{el} = \mathrm{Re}(\dot{\mathbf{J}}_{el} e^{j\omega t}).$$

De este modo, para obtener el valor instantáneo del vector de densidad de la corriente eléctrica extrínseca, si se conoce el valor de su amplitud compleja, es suficiente multiplicar la amplitud compleja por $e^{j\omega t}$ y tomar la parte real de este producto. De una manera análoga pueden presentarse todas las funciones que forman parte de las ecuaciones de electrodinámica:

$$\left.\begin{aligned} Q_{el} &= \mathrm{Re}(\dot{Q}_{el} e^{j\omega t}), & Q_m &= \mathrm{Re}(\dot{Q}_m e^{j\omega t}),\\ \rho_{el} &= \mathrm{Re}(\dot{\rho}_{el} e^{j\omega t}), & \rho_m &= \mathrm{Re}(\dot{\rho}_m e^{j\omega t}),\\ \mathbf{J}_{el} &= \mathrm{Re}(\dot{\mathbf{J}}_{el} e^{j\omega t}), & \mathbf{J}_m &= \mathrm{Re}(\dot{\mathbf{J}}_m e^{j\omega t}),\\ \mathbf{E} &= \mathrm{Re}(\dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}), & \mathbf{H} &= \mathrm{Re}(\dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t}),\\ \mathbf{D} &= \mathrm{Re}(\dot{\mathbf{D}} e^{j\omega t}), & \mathbf{B} &= \mathrm{Re}(\dot{\mathbf{B}} e^{j\omega t}). \end{aligned}\right\} \tag{1.157}$$

Las derivadas respecto al tiempo de los vectores del campo se escriben en la forma

$$\partial \mathbf{E}/\partial t = \mathrm{Re}(j\omega \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}), \quad \partial \mathbf{H}/\partial t = \mathrm{Re}(j\omega \dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t}). \tag{1.158}$$

Al sustituir los valores de la derivada del vector **E** y de las funciones que entran en la ecuación (1.137), obtenemos

$$\mathrm{Re}\oint_{l_1}\dot{\mathbf{H}}e^{j\omega t}d\mathbf{l}=\mathrm{Re}\int_{S_2}\dot{\mathbf{J}}_{e1}e^{j\omega t}\,d\mathbf{S}+\mathrm{Re}\int_{S_1}\gamma_{e1}\dot{\mathbf{E}}e^{j\omega t}\,d\mathbf{S}+\mathrm{Re}\int_{S_1}j\omega\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}e^{j\omega t}\,d\mathbf{S}.$$

Si sustituimos la igualdad de las partes reales por la igualdad de las magnitudes complejas, podemos despreciar el signo de Re que indica el carácter real y, seguidamente, simplificar toda la expresión por el factor $e^{j\omega t}$. Como resultado, obtenemos la ley de la corriente total para las amplitudes complejas de las funciones:

$$\oint_{l_1}\dot{\mathbf{H}}d\mathbf{l}=\int_{S_2}\dot{\mathbf{J}}_{e1}\,d\mathbf{S}+\int_{S_1}\gamma_{e1}\dot{\mathbf{E}}\,d\mathbf{S}+\int_{S_1}j\omega\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}\,d\mathbf{S}.$$

Al unir la tercera y la cuarta integral, obtenemos

$$\oint_{l_1}\dot{\mathbf{H}}d\mathbf{l}=\int_{S_2}\dot{\mathbf{J}}_{e1}\,d\mathbf{S}+\int_{S_1}(j\omega\varepsilon_a+\gamma_{e1})\,\dot{\mathbf{E}}\,d\mathbf{S},$$

o bien

$$\oint_{l_1}\dot{\mathbf{H}}d\mathbf{l}=\int_{S_2}\dot{\mathbf{J}}_{e1}\,d\mathbf{S}+\int_{S_1}j\omega\left(\varepsilon_a-j\frac{\gamma_{e1}}{\omega_a}\right)\dot{\mathbf{E}}\,d\mathbf{S}.$$

Al introducir la designación

$$\varepsilon_a-j\frac{\gamma_{e1}}{\omega}=\tilde{\varepsilon}_a, \tag{1.159}$$

donde $\tilde{\varepsilon}_a$ es la *permitividad absoluta compleja del medio*, escribimos la ley de la corriente total en la forma

$$\oint_{l_1}\dot{\mathbf{H}}d\mathbf{l}=\int_{S_2}\dot{\mathbf{J}}_{e1}\,d\mathbf{S}+\int_{S_1}j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}}\,d\mathbf{S}. \tag{1.160}$$

Transformaciones análogas pueden llevarse a cabo también para la ley de la inducción electromagnética (1.140):

$$\oint_{l_1}\mathbf{E}\,d\mathbf{l}=-\int_{S_2}\dot{\mathbf{J}}_m\,d\mathbf{S}-\int_{S_1}j\omega\left(\mu_a-j\frac{\gamma_m}{\omega}\right)\dot{\mathbf{H}}\,d\mathbf{S}.$$

Al designar

$$\mu_a-j\frac{\gamma_m}{\omega}=\tilde{\mu}_a, \tag{1.161}$$

donde $\tilde{\mu}_a$ es la *permeabilidad magnética absoluta compleja del medio*, obtenemos la ley de la inducción electromagnética en la forma

$$\oint_{l_2}\dot{\mathbf{E}}d\mathbf{l}=-\int_{S_2}\dot{\mathbf{J}}_m\,d\mathbf{S}-\int_{S_1}j\omega\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{H}}\,d\mathbf{S}. \tag{1.162}$$

Al comparar las leyes de la corriente total y de la inducción electromagnética para valores instantáneos de las funciones y las

amplitudes complejas es fácil advertir que la introducción de las amplitudes complejas simplifica sustancialmente la notación matemática, debido a que la diferenciación de las funciones respecto al tiempo se sustituye en el método complejo por la multiplicación por $j\omega$. De la misma manera, la integración puede sustituirse por la división por $j\omega$. Sobre la base de lo expuesto, las relaciones (1.132) y (1.154), en el caso de utilizar las amplitudes complejas, pueden escribirse en la siguiente forma:

$$\oint_{S_1} \left(\varepsilon_a \dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{j\omega} \gamma_{el} \dot{\mathbf{E}} \right) d\mathbf{S} = \dot{Q}_{el},$$

$$\oint_{S_1} \left(\mu_a \dot{\mathbf{H}} + \frac{1}{j\omega} \gamma_m \dot{\mathbf{H}} \right) d\mathbf{S} = \dot{Q}_m.$$

o bien

$$\oint_{S_1} \left(\varepsilon_a - j \frac{\gamma_{el}}{\omega} \right) \dot{\mathbf{E}}\, d\mathbf{S} = \dot{Q}_{el}, \tag{1.163}$$

$$\oint_{S_1} \left(\mu_a - j \frac{\gamma_m}{\omega} \right) \dot{\mathbf{H}}\, d\mathbf{S} = \dot{Q}_m \tag{1.164}$$

Teniendo en cuenta las fórmulas (1.159) y (1.161) podemos volver a escribir las expresiones (1.163) y (1.164) en la forma

$$\oint_{S_1} \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}}\, d\mathbf{S} = \dot{Q}_{el}, \tag{1.165}$$

$$\oint_{S_1} \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}\, d\mathbf{S} = \dot{Q}_m. \tag{1.166}$$

Igualmente fácil es escribir las ecuaciones del medio para las amplitudes complejas:

$$\dot{\mathbf{D}} = \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}, \tag{1.167}$$

$$\dot{\mathbf{B}} = \mu_a \dot{\mathbf{H}}. \tag{1.168}$$

La primera y la segunda ecuaciones de continuidad (1.55) y (1.108) para las amplitudes complejas se simplifican considerablemente, debido a que las derivadas respecto al tiempo se sustituyen por el factor $j\omega$:

$$\oint_{S_1} \dot{\mathbf{J}}_{el}\, d\mathbf{S} = -\int_{V_1} j\omega \dot{\rho}_{el}\, dV, \tag{1.169}$$

$$\oint_{S_1} \dot{\mathbf{J}}_m\, d\mathbf{S} = -\int_{V_1} j\omega \dot{\rho}_m\, dV. \tag{1.170}$$

Cuando las corrientes extrínsecas no son monocromáticas, también es posible utilizar las amplitudes complejas. En este caso, siendo lineal el medio, es necesario distinguir dos posibilidades fundamentales:

1. Las corrientes extrínsecas representan la suma de las componentes del espectro de frecuencias discreto.

En la solución del problema las ecuaciones de electrodinámica se escriben para cada una de las componentes del espectro de frecuencias discreto. Para un medio dispersivo en estas ecuaciones se introducen los parámetros del medio correspondientes al armónico de frecuencia analizado.

En este caso las principales ecuaciones integrales de electrodinámica toman la siguiente forma:

$$\oint_{l_1} \dot{H}_{\omega_n} dl = \int_{S_1} \dot{J}_{e\omega_n} dS + \int_{S_1} j\omega_n \tilde{\varepsilon}_a(\omega_n) \dot{E}_{\omega_n} dS, \tag{1.171}$$

$$\oint_{l_2} \dot{E}_{\omega_n} dl = -\int_{S_2} \dot{J}_{m\omega_n} dS - \int_{S_2} j\omega_n \tilde{\mu}_a(\omega_n) \dot{H}_{\omega_n} dS. \tag{1.172}$$

Aquí $\dot{E}_{\omega_n}$, $\dot{H}_{\omega_n}$, $\dot{J}_{e\omega_n}$ y $\dot{J}_{m\omega_n}$ son las amplitudes complejas de las componentes armónicas, y $\tilde{\varepsilon}_a(\omega_n)$ y $\tilde{\mu}_a(\omega_n)$, la permitividad absoluta compleja y la permeabilidad magnética absoluta compleja, respectivamente, para una frecuencia correspondiente al armónico examinado.

La solución del problema se reduce a la superposición de las componentes armónicas.

$$\dot{E}_\Sigma = \sum_{n=0}^{m} \dot{E}_{\omega_n}, \quad \dot{H}_\Sigma = \sum_{n=0}^{m} \dot{H}_{\omega_n}, \tag{1.173}$$

donde m es el número de armónicos considerados.

2. El espectro de frecuencias de las corrientes extrínsecas es continuo.

En este caso puede hacerse uso de la transformación de Fourier, o bien, de la transformación de Laplace. Señalemos la anotación de las ecuaciones de electrodinámica en el ejemplo de la transformación de Fourier.

Como es sabido, en el caso de un espectro continuo los vectores del campo pueden definirse por medio de las fórmulas (1.29) y (1.90).

De modo análogo pueden representarse los vectores de densidades de las corrientes extrínsecas:

$$J_{el}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{J_{el}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \tag{1.174}$$

$$J_m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{J_m}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{1.175}$$

Aquí $G_{J_{el}}(\omega)$ y $G_{J_m}(\omega)$ son los vectores de densidades espectrales de las corrientes eléctrica y magnética extrínsecas.

A continuación, introduciendo las relaciones (1.29), (1.90), (1.174) y (1.175) en las expresiones de las leyes de la corriente total (1.137) y de la inducción

electromagnética (1.138), obtenemos

$$\oint_{l_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_H(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega\, dl = \int_{S_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{J_{el}}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega\, dS +$$

$$+ \int_{S_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{el}(\omega)\, G_E(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega\, dS +$$

$$+ \int_{S_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left[\varepsilon_a(\omega)\, G_E(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega\right] dS,$$

$$\oint_{l_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_E(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega\, dl = -\int_{S_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{J_m}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega\, dS -$$

$$- \int_{S_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_m(\omega)\, G_H(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega\, dS - \int_{S_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left[\mu_a(\omega)\, G_H(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega\right] dS.$$

Simplificando por 2π, intercambiando de lugar las integrales interior y exterior y diferenciando respecto al tiempo, tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \oint_{l_1} G_H(\omega)\, e^{j\omega t} dl\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_1} G_{J_{el}}(\omega)\, e^{j\omega t}\, dS\, d\omega +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_1} \gamma_{el}(\omega)\, G_E(\omega)\, e^{j\omega t}\, dS\, d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_1} j\omega\varepsilon_a(\omega)\, G_E(\omega)\, e^{j\omega t}\, dS\, d\omega,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \oint_{l_1} G_E(\omega)\, e^{j\omega t} dl\, d\omega = -\int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_1} G_{J_m}(\omega)\, e^{j\omega t}\, dS\, d\omega -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_1} \gamma_m(\omega)\, G_H(\omega)\, e^{j\omega t}\, dS\, d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_1} j\omega\mu_a(\omega)\, G_H(\omega)\, e^{j\omega t}\, dS\, d\omega.$$

Debido a que la integración exterior de los miembros segundo y primero de estas ecuaciones se efectúa respecto a la misma variable y dentro de límites iguales, las expresiones bajo la integral pueden unirse y la integral exterior se puede omitir. Esta circunstancia permite simplificar las ecuaciones por el factor $e^{j\omega t}$.

Como resultado, las leyes de la corriente total y de la inducción electromagnética para las componentes espectrales de las funciones se escriben de la siguiente manera:

$$\oint_{l_1} G_H(\omega)\, dl = \int_{S_1} G_{J_{el}}(\omega)\, dS + \int_{S_1} \gamma_{el}(\omega)\, G_E(\omega)\, dS + \int_{S_1} j\omega\varepsilon_a(\omega)\, G_E(\omega)\, dS, \quad (1.176)$$

$$\oint_{l_1} G_E(\omega)\, dl = -\int_{S_1} G_{J_m}(\omega)\, dS - \int_{S_1} \gamma_m(\omega)\, G_H(\omega)\, dS - \int_{S_1} j\omega\mu_a(\omega)\, G_H(\omega)\, dS. \quad (1.177)$$

Al unir la segunda y la tercera integral en los segundos miembros de las ecuaciones obtenidas y hacer uso de las relaciones (1.159) y (1.161), hallamos

$$\oint_{l_1} G_H(\omega)\, dl = \int_{S_1} G_{J_{el}}(\omega)\, dS + \int_{S_1} j\omega\tilde{\varepsilon}_a G_E(\omega)\, dS, \qquad (1.178)$$

$$\oint_{l_1} G_E(\omega)\, dl = -\int_{S_1} G_{J_m}(\omega)\, dS - \int_{S_1} j\omega\tilde{\mu}_a G_H(\omega)\, dS. \qquad (1.179)$$

Al comparar estas ecuaciones con (1.171) y (1.172) no es difícil advertir su parecido. La diferencia consiste tan sólo en que las ecuaciones (1.171) y (1.172) están escritas para las amplitudes complejas de las funciones, mientras que las ecuaciones (1.178) y (1.179), para las componentes espectrales de estas funciones.

Después de determinadas las componentes espectrales, las funciones $E(t)$ y $H(t)$ pueden hallarse empleando la transformación inversa de Fourier (1.29) y (1.90).

De una manera análoga se obtienen las relaciones integrales para representar los vectores E y H en el caso de utilizar la transformación de Laplace:

$$\oint_{l_1} H(p)\, dl = \int_{S_1} J_{el}(p)\, dS + \int_{S_1} p\tilde{\varepsilon}_a(p)\, E(p)\, dS, \qquad (1.180)$$

$$\oint_{l_1} E(p)\, dl = -\int_{S_1} J_m(p)\, dS - \int_{S_1} p\tilde{\mu}_a(p)\, H(p)\, dS. \qquad (1.181)$$

El paso de la representación de $H(p)$ y $E(p)$ a los vectores del campo se realiza por medio de la transformación (1.35) para el vector $E(t)$ y, para el vector $H(t)$, valiéndose de la transformación del tipo

$$H(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} H(p)\, e^{pt}\, dp. \qquad (1.182)$$

CAPÍTULO 2

Ecuaciones diferenciales de electrodinámica

§ 2.1. Teorema de Ostrogradski—Gauss. Teorema de Stokes

Las ecuaciones integrales obtenidas en el capítulo 1 dan la posibilidad de resolver diferentes problemas de electrodinámica. En una serie de casos, sin embargo, es más fácil solucionar estos problemas recurriendo a ecuaciones diferenciales. Cuando es necesario elegir la forma de escribir las ecuaciones de electrodinámica, hay que partir del problema concreto. Se debe dar preferencia a la forma integral o diferencial de notación de las ecuaciones teniendo en cuenta cuál de estas formas asegura la resolución más fácil del

problema. El paso de las ecuaciones integrales a las diferenciales puede realizarse mediante dos teoremas del análisis vectorial, a saber: el teorema de Ostrogradski—Gauss y el teorema de Stokes [4], [5].

Teorema de Ostrogradski—Gauss. Dicho teorema liga la integral del vector a por la superficie cerrada S_1 a la integral de la divergencia de este vector por el volumen V_1 limitado por la superficie cerrada S_1:

$$\oint_{S_1} \mathbf{a}\, d\mathbf{S} = \oint_{V_1} \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV. \tag{2.1}$$

Vale recordar que la operación matemática de divergencia del vector (véase el Apendice I) se determina por el límite

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint \mathbf{a}\, d\mathbf{S}}{\Delta V}. \tag{2.2}$$

En el numerador de esta expresión se escribe el flujo del vector a a través de una pequeña superficie cerrada ΔS, mientras que en el denominador tenemos un pequeño volumen ΔV que se encuentra dentro de la superficie cerrada ΔS. Por el paso límite el volumen pequeño ΔV se contrae a un punto. De este modo, la divergencia del vector se determina por el carácter del flujo del vector a anotado en el numerador. Este flujo puede ser positivo, puede ser igual a cero o ser negativo. Respectivamente, la divergencia a puede ser positiva, igual a cero o negativa.

Según sea el sistema de coordenadas adoptado div a puede tener diferente forma matemática. En el Apéndice I se ofrece la deducción de div a en un sistema de coordenadas ortogonal curvilíneo generalizado ξ, η, ζ y se presentan sus expresiones matemáticas en los sistemas de coordenadas de uso más frecuente.

Teorema de Stokes. El teorema de Stokes relaciona la integral del vector a a lo largo del contorno cerrado l_1 con la integral del rotor de este vector por la superficie S_1 limitada por el contorno cerrado l_1:

$$\oint_{l_1} \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \int_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{a}\, d\mathbf{S}. \tag{2.3}$$

Recordemos que la operación matemática de rotor del vector (véase el Apéndice I) se determina por el límite

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \mathbf{a}\, d\mathbf{l}}{\Delta S} \mathbf{1}_n. \tag{2.4}$$

En el numerador de esta expresión se anota la circulación del vector a a lo largo del pequeño contorno cerrado Δl; en el denominador, la pequeña superficie ΔS acotada por el contorno cerrado Δl;

1_n, es la normal unitaria a la superficie ΔS relacionada por la regla del tornillo dextrógiro con la dirección del recorrido del contorno Δl (al moverse el tornillo en el sentido del recorrido del contorno la dirección de la normal unitaria debe coincidir con el movimiento de avance del tornillo).

La notación rot_n a significa que la expresión (2.4) define la componente del rotor orientada en dirección de la normal unitaria 1_n a la superficie ΔS.

Según sea el sistema de coordenadas adoptado la expresión matemática del rot a puede ser distinta. En el Apéndice I se da la deducción del rot a en el sistema de coordenadas ortogonal curvilíneo generalizado ξ, η, ζ y se ofrecen sus expresiones matemáticas en sistemas de coordenadas de uso más frecuente.

§ 2.2. Paso de las ecuaciones integrales de electrodinámica a las diferenciales. Aplicación del principio de dualidad de permutación a las ecuaciones diferenciales de electrodinámica

En el capítulo 1 fue deducida una serie de ecuaciones integrales que definían los procesos electrodinámicos en diferentes casos. Las ecuaciones fueron deducidas tanto para los valores instantáneos de las funciones, como para sus amplitudes complejas. Hagamos uso de estas relaciones para deducir las ecuaciones diferenciales de electrodinámica.

El paso de las ecuaciones integrales a las diferenciales es fácil realizarlo mediante los teoremas de Ostrogradski—Gauss y de Stokes. Al aplicar el teorema de Stokes (2.3) a la integral $\int_{l_1} \mathbf{H}\, dl =$ $= \int_{S_1} \mathrm{rot}\, \mathbf{H}\, d\mathbf{S}$ se puede escribir la relación (1.137) en la forma

$$\int_{S_1} \mathrm{rot}\, \mathbf{H}\, d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{J}_{el}\, d\mathbf{S} + \int_{S_1} \gamma_{el}\mathbf{E}\, d\mathbf{S} + \int_{S_1} \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\, d\mathbf{S}.$$

La integración se efectúa por la misma superficie arbitraria S_1. Omitiendo las integrales, obtenemos la ecuación diferencial (2.5) cuya notación se va a exponer más adelante.

Análogamente, se puede transformar la expresión de la ley de la inducción electromagnética (1.140), y como resultado obtenemos la ecuación (2.6). Para transformar las ecuaciones (1.132), (1.154), (1.155), (1.55) y (1.108) se utiliza el teorema de Ostrogradski—Gauss. La metodología de esta transformación se ilustra en el ejemplo de la ecuación (1.132).

Representemos la carga Q_{el} en forma de integral de volumen de la densidad volumétrica de la carga ρ_{el}, tal como fue realizado en la fórmula (1.51). Entonces, la relación (1.132) se escribirá de

la siguiente manera:

$$\oint_{S_1} \left(\mathbf{D} + \int_0^t \gamma_{el} \mathbf{E}\, dt \right) d\mathbf{S} = \int_{V_1} \rho_{el}\, dV.$$

Valiéndose del teorema de Ostrogradski—Gauss (2.1) para el primer miembro de la expresión obtenemos

$$\int_{V_1} \operatorname{div} \left(\mathbf{D} + \int_0^t \gamma_{el} \mathbf{E}\, dt \right) d\mathbf{S} = \int_{V_1} \rho_{el}\, dV.$$

La integración se efectúa respecto a un mismo volumen arbitrario V_1. Al omitir las integrales, obtenemos la relación (2.7). De una manera análoga se transforman las ecuaciones (1.154), (1.155), (1.55) y (1.108).

Como resultado de las transformaciones realizadas se forman ecuaciones diferenciales de electrodinámica para valores instantáneos de las funciones:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_{el} + \gamma_{el}\mathbf{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{2.5}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m - \gamma_m \mathbf{H} - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{2.6}$$

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{D} + \int_0^t \gamma_{el} \mathbf{E}\, dt \right) = \rho_{el}, \tag{2.7}$$

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{B} + \int_0^t \gamma_m \mathbf{H}\, dt \right) = \rho_m, \tag{2.8}$$

o bien, para $\rho_m = 0$

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{B} + \int_0^t \gamma_m \mathbf{H}\, dt \right) = 0, \tag{2.9}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_{el} = -\partial \rho_{el}/\partial t, \tag{2.10}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_m = -\partial \rho_m/\partial t. \tag{2.11}$$

De manera análoga pueden obtenerse las relaciones diferenciales de electrodinámica para las amplitudes complejas de las funciones:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}}_{el} + j\omega\tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}}, \tag{2.12}$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -\dot{\mathbf{J}}_m - j\omega\tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}, \tag{2.13}$$

$$\operatorname{div} (\tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}}) = \dot{\rho}_{el}, \tag{2.14}$$

$$\operatorname{div} (\tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}) = \dot{\rho}_m, \tag{2.15}$$

o bien, para $\rho_m = 0$

$$\operatorname{div}(\tilde{\mu}_a \dot{H}) = 0, \tag{2.16}$$

$$\operatorname{div} \dot{J}_{el} = -j\omega \dot{\rho}_{el}, \tag{2.17}$$

$$\operatorname{div} \dot{J}_m = -j\omega \dot{\rho}_m. \tag{2.18}$$

Las ecuaciones (2.5) y (2.12) se llaman *primera ecuación de Maxwell para los valores instantáneos de las funciones y de sus amplitudes complejas*, y las ecuaciones (2.6) y (2.13) llevan el nombre de *segunda ecuación de Maxwell para los valores instantáneos de las funciones y de sus amplitudes complejas.*

Respectivamente, las ecuaciones (2.10) y (2.17) se denominan *primera ecuación de continuidad* para los valores instantáneos y las amplitudes complejas, y las ecuaciones (2.11) y (2.18) llevan el nombre de *segunda ecuación de continuidad para los valores instantáneos de las funciones y de sus amplitudes complejas.*

Al igual que para las ecuaciones integrales, para las ecuaciones diferenciales de electrodinámica es válido el principio de dualidad de permutación. La ecuación (2.12) pasa a la (2.13), y viceversa; la (2.14) a la (2.15), y viceversa; la (2.17), a la (2.18), y viceversa, y la ecuación del medio (1.167), a la ecuación del medio (1.168), y viceversa, si se realizan las siguientes conversiones:

$$\begin{aligned} &\dot{E} \rightleftarrows \dot{H}, \quad \dot{J}_{el} \rightleftarrows -\dot{J}_m, \\ &\tilde{\varepsilon}_a \rightleftarrows -\tilde{\mu}_a, \quad \dot{\rho}_{el} \rightleftarrows -\dot{\rho}_m, \\ &\varepsilon_a \rightleftarrows -\mu_a, \quad \dot{D} \rightleftarrows -\dot{B}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Una conversión análoga se observa en las ecuaciones escritas para los valores instantáneos de las funciones electrodinámicas. En este caso son necesarias las conversiones del tipo

$$\begin{aligned} &E \rightleftarrows H, \qquad J_{el} \rightleftarrows -J_m, \\ &\gamma_{el} \rightleftarrows -\gamma_m, \qquad \varepsilon_a \rightleftarrows -\mu_a, \\ &D \rightleftarrows -B, \qquad \rho_{el} \rightleftarrows -\rho_m. \end{aligned} \tag{2.20}$$

§ 2.3. Ecuaciones diferenciales de electrodinámica para los casos de campos cuasiestáticos y estáticos

Las ecuaciones citadas de electrodinámica están deducidas en forma general que admite diferentes simplificaciones en los casos concretos. En primer término, conviene estudiar el caso de los campos cuasiestáticos en los cuales la frecuencia de oscilación es tan pequeña que podemos despreciar las corrientes de desplazamiento en comparación con las corrientes de conducción. Teniendo en cuenta lo expuesto, las ecuaciones (2.5), (2.6) y (2.12), (2.13) se escriben,

respectivamente, en la siguiente forma:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_{el} + \gamma_{el}\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m - \gamma_m \mathbf{H} - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \qquad (2\ 21)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}}_{el} + \gamma_{el}\dot{\mathbf{E}}, \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -\dot{\mathbf{J}}_m - j\omega\tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}. \qquad (2.22)$$

En el caso de campos estáticos la frecuencia de oscilación debe suponerse igual a cero, con lo cual las ecuaciones se simplifican todavía más:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_{el} + \gamma_{el}\mathbf{E}, \ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m - \gamma_m \mathbf{H}. \qquad (2\ 23)$$

Las ecuaciones para las amplitudes complejas se escriben de una manera análoga.

Si las conductividades del medio γ_{el} y γ_m son iguales a cero, entonces, los campos eléctrico y magnético llegan a ser totalmente independientes:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_{el}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m. \qquad (2\ 24)$$

Si en el cálculo no se introducen las corrientes magnéticas, se supone que

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0.$$

Semejante enfoque puede utilizarse en la notación de las ecuaciones integrales de electrodinámica.

De este modo, las ecuaciones generales de electrodinámica incluyen como casos particulares ecuaciones correspondientes a los campos cuasiestaticos y estaticos.

§ 2.4. Carácter dependiente de algunas ecuaciones de electrodinámica

Al analizar el sistema de ecuaciones de electrodinámica se puede advertir que además de las ecuaciones de Maxwell que relacionan los vectores **E** y **H** con las corrientes extrínsecas existen también las ecuaciones (2.7) y (2.8) para los valores instantáneos de los vectores del campo, así como las ecuaciones (2 14) y (2 15) para sus amplitudes complejas.

Para hallar los vectores del campo **E** y **H** son suficientes dos ecuaciones de Maxwell conteniendo estos vectores. Entonces surge la pregunta: ¿no será que las ecuaciones (2.7), (2.8), (2.14) y (2.15) sobran redeterminando el sistema de ecuaciones de Maxwell? En el ejemplo de las ecuaciones para las amplitudes complejas demostraremos que las ecuaciones (2.14) — y (2.15) pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de Maxwell (2.12) y (2.13).

Sometamos la ecuación (2.12) a la operación de divergencia:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \operatorname{div} \dot{\mathbf{J}}_{el} + j\omega \operatorname{div} (\tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}}).$$

En el Apéndice I se da la identidad vectorial div rot a = 0, en virtud de lo cual

$$\operatorname{div}(\tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}}) = \frac{1}{\omega} \operatorname{div} \dot{\mathbf{J}}_{el}. \tag{2.25}$$

Análogamente, a partir de la ecuación (2.13), hallamos

$$\operatorname{div}(\tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}) = \frac{1}{\omega} \operatorname{div} \dot{\mathbf{J}}_m. \tag{2.26}$$

Al sustituir en las fórmulas (2.25) y (2.26) las expresiones para div $\dot{\mathbf{J}}_{el}$ y div $\dot{\mathbf{J}}_m$ a partir de las ecuaciones de continuidad (2.17) y (2.18), obtenemos las relaciones (2.14) y (2.15).

De la misma manera puede demostrarse el carácter dependiente de las ecuaciones (2.7) y (2.8).

CAPITULO 3

Leyes fundamentales de electrotecnia como corolario de las ecuaciones de electrodinámica

§ 3.1. Deducción de la primera ley de Kirchhoff sobre la base de las ecuaciones de electrodinámica

Son leyes fundamentales de electrotecnia la ley de Ohm y la primera y la segunda leyes de Kirchhoff. La primera ley de Kirchhoff dice que la suma algebraica de las corrientes en el punto nodal del circuito es igual a cero. La segunda ley de Kirchhoff puede formularse de la siguiente manera: la suma algebraica de las fuerzas electromotrices (fem) de las fuentes extrínsecas en un circuito eléctrico cerrado es igual a la suma de caídas de tensiones en sus elementos.

Demostremos que estas leyes son el corolario de las ecuaciones fundamentales de electrodinámica. Como base de los razonamientos elijamos la ecuación (1.132). Diferenciando ambos miembros de esta ecuación respecto al tiempo obtenemos

$$\oint_{S_1} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \gamma_{el} \mathbf{E} \right) d\mathbf{S} = \frac{\partial Q_{el}}{\partial t}. \tag{3.1}$$

Si tomamos en consideración las correlaciones (1.129), (1.114), (1.53) y (1.54), la expresión (3.1) puede escribirse en la forma

$$\oint_{S_1} (\mathbf{J}_{des} + \mathbf{J}_{el.\,c} + \mathbf{J}_{el})\, d\mathbf{S} = 0. \tag{3.2}$$

Si examinamos punto nodal del circuito eléctrico que se compone de n conductores (fig. 3.1) y prescindimos de las corrientes de desplazamiento entre los conductores, la ecuación (3.2) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\oint_{S_1} (\dot{\mathbf{J}}_{\text{el. c}} - \dot{\mathbf{J}}_{\text{el}})\, d\mathbf{S} = 0. \tag{3.3}$$

En este caso S_1 es una superficie cerrada que rodea el punto nodal. Las densidades de las corrientes de conducción y de las corrientes de las fuentes existen en aquellos puntos del espacio en que están situados los conductores. A raíz de este hecho la integral a lo largo de una superficie cerrada puede representarse como suma de integrales por el área de la sección transversal de los conductores. En este caso, la ecuación (3.3) toma la forma

FIG. 3.1

$$\sum_{k=1}^{n_1} \int_{S_k} \mathbf{J}_{\text{el. ck}}\, d\mathbf{S} + \sum_{p=1}^{n_2} \int_{S_p} \mathbf{J}_{\text{el}\,p}\, d\mathbf{S} = 0, \tag{3.4}$$

donde

$$n_1 + n_2 = n.$$

Cada una de las integrales representa una corriente I_m que fluye por el conductor. Entonces, en lugar de la relación (3.4) podemos escribir

$$\sum_{m=1}^{n} I_m = 0. \tag{3.5}$$

La expresión (3.5) es la *primera ley de Kirchhoff deducida basándose en las ecuaciones de electrodinámica.*

§ 3.2. Deducción de la segunda ley de Kirchhoff sobre la base de las ecuaciones de electrodinámica

La diferencia de potencial U que surge en los extremos de la espira conductora cuando el flujo magnético Φ_B, variable en el tiempo, atraviesa el área de la espira se expresa por la relación (1.133). Teniendo en cuenta la fórmula (1.5) y considerando que el contorno l_1 es cerrado, obtenemos

$$\oint_{l_1} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}. \tag{3.6}$$

Consideremos como contorno cerrado l_1 un circuito eléctrico cerrado con constantes concentradas. En este caso, el flujo Φ_B puede engendrarse a costa de la corriente I_n en las inductancias L_n del

circuito cerrado, así como a costa de las corrientes I_m de otros circuitos cerrados enlazados con el circuito analizado por inductancias mutuas M_m. Si el número de espiras en las bobinas se diferencia de la unidad, el flujo Φ_B debe sustituirse por el flujo total (flujo embragado) Ψ_B.

En la teoría de los circuitos la inductancia L_n se define como coeficiente de proporcionalidad entre la corriente I_n en la bobina y el flujo del vector **B** embragado con las espiras de esta bobina:

$$\Psi_{BL} = L_n I_n. \tag{3.7}$$

La inductancia mutua M_m se define como coeficiente de proporcionalidad entre la corriente I_m en otro circuito conectado por inducción con la bobina del circuito dado y el flujo del vector **B** embragado con las espiras de esta bobina:

$$\Psi_{BM} = M_m I_m. \tag{3.8}$$

En el circuito analizado puede haber varias inductancias e inductancias mutuas que lo conectan con otros circuitos. El flujo total embragado con todos los elementos inductivos representa la suma de flujos parciales, por cuya razón podemos escribir

$$\Psi_B = \sum_{n=1}^{n_1} L_n I_n + \sum_{m=1}^{m_1} M_m I_m. \tag{3.9}$$

En correspondencia, la derivada parcial $\partial\Phi_B/\partial t$ que entra en el segundo miembro de la expresión (3.6) para un circuito con constantes concentradas puede sustituirse por la derivada $\partial\Psi_B/\partial t$ que, teniendo en cuenta la expresión (3.9) se presenta en la forma

$$\frac{d\Psi_B}{dt} = \sum_{n=1}^{n_1} L_n \frac{dI_n}{dt} + \sum_{m=1}^{m_1} M_m \frac{dI_m}{dt}. \tag{3.10}$$

Hay que subrayar otra vez que L_n son las inductancias que forman parte del contorno cerrado l_1 (circuito cerrado); M_m, las inductancias mutuas que conectan el contorno l_1 con las corrientes I_m en otros contornos.

La integral a lo largo del contorno cerrado l_1 en el primer miembro de la expresión (3.6) puede representarse por la suma de integrales que determinan la diferencia de potencial en las resistencias activas y capacidades del contorno l_1.

El vector de intensidad del campo eléctrico **E** en el circuito está enlazado con el vector de densidad de la corriente de conducción $\mathbf{J}_{e.c}$ en el contorno mediante la relación (1.114). Al determinar **E** a partir de esta relación y sustituirla en la integral $\int_{l_1} \mathbf{E}d\mathbf{l}$, obtenemos

$$\int_{l_1} \mathbf{E}d\mathbf{l} = \int_{l_1} \frac{\mathbf{J}_{el\ c}}{\gamma_{el}} d\mathbf{l}. \tag{3.11}$$

Multipliquemos y dividamos la fracción que está bajo la integral por el área de la sección transversal de los elementos del circuito que poseen conductibilidad activa:

$$\int_{l_1} \frac{\mathbf{J}_{\text{el. c}}}{\gamma_{\text{el}}}\, d\mathbf{l} = \int_{l_1} \frac{\mathbf{J}_{\text{el. c}} S}{\gamma_{\text{el}} S}\, \mathbf{1}_l\, dl. \qquad (3.12)$$

Aquí $\mathbf{1}_l$ es el vector unitario (versor) que coincide por su dirección con el vector $d\mathbf{l}$ y, evidentemente, con la normal unitaria al área de la sección transversal.

Por esto

$$\mathbf{1}_l S = \mathbf{S},$$

y la corriente de conducción en el circuito es

$$I_{\text{el. c}} = \mathbf{J}_{\text{el. c}} \mathbf{S}.$$

Entonces, la relación integral (3.11) puede escribirse en la forma

$$\int_{l_\gamma} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \frac{I_{\text{el. c}}}{\gamma_{\text{el}} S} \int_{l_\gamma} dl = \frac{I_{\text{el. c}} l_\gamma}{\gamma_{\text{el}} S}. \qquad (3.13)$$

Se entiende por longitud l_γ la longitud de los elementos del circuito que poseen una conductibilidad activa γ_{el}. En correspondencia con (1.112) la expresión (3.13) toma la forma

$$U_R = \int_{l_\gamma} \mathbf{E} d\mathbf{l} = I_{\text{el. c}} R. \qquad (3.14)$$

De este modo se ha hallado una parte de la integral a lo largo del contorno cerrado l_1 que corresponde a la diferencia de potencial U_R en los elementos del circuito que poseen conductibilidad activa. Si estos trayectos son varios, en vez de la expresión (3.14) obtenemos

$$\sum_{p=1}^{p_1} \int_{l_{\gamma p}} \mathbf{E}_p d\mathbf{l} = \sum_{p=1}^{p_1} I_{\text{el. c}p} R_p. \qquad (3.15)$$

La densidad de la corriente de desplazamiento J_{des} en los condensadores conectados al contorno l_1 se determina por medio de la relación (1.129), la cual, teniendo en cuenta la fórmula (1.19), puede presentarse de la siguiente manera:

$$\mathbf{J}_{\text{des}} = \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t},$$

de donde

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_a} \int_0^t \mathbf{J}_{\text{des}}\, dt.$$

En este caso la integral $\int_{l_1} \mathbf{E}\, dl$ se escribe en la forma

$$\int_{l_{des}} \mathbf{E} dl = \frac{1}{\varepsilon_a} \int_{l_{des}} \int_0^t \mathbf{J}_{des}\, dt\, dl = \frac{1}{\varepsilon_a} \int_0^t \int_{l_{des}} \mathbf{J}_{des} dl\, dt,$$

donde l_{des} es la longitud del trayecto de las corrientes de desplazamiento o la distancia entre las armaduras del condensador.

Al multiplicar y dividir esta expresión por el área de las armaduras del condensador S_{des}, obtenemos

$$\int_{l_{des}} \mathbf{E} dl = \frac{1}{\varepsilon_a} \int_0^t \int_{l_{des}} \frac{\mathbf{J}_{des} S_{des}}{S_{des}} dl\, dt = \frac{1}{\varepsilon_a} \int_0^t \int_{l_{des}} \frac{\mathbf{J}_{des} S_{des} \mathbf{1}_l}{S_{des}} dl\, dt, \quad (3.16)$$

Aquí $\mathbf{1}_l$ es el vector unitario (versor) orientado a lo largo del trayecto dl, y $\mathbf{J}_{des} S_{des} \mathbf{1}_l = I_C$, la corriente que circula por el condensador.

Entonces, en lugar de la expresión (3.16), obtenemos:

$$\int_{l_{des}} \mathbf{E} dl = \frac{1}{\varepsilon_a S_{des}} \int_0^t \int_{l_{des}} I_C\, dl\, dt = \frac{l_{des}}{\varepsilon_a S_{des}} \int_0^t I_C\, dt,$$

donde

$$\frac{l_{des}}{\varepsilon_a S_{des}} = \frac{1}{C};$$

C es la capacidad del condensador.

Por consiguiente, la caída de tensión en el condensador es igual a

$$\int_{l_0} \mathbf{E} dl = U_C = \frac{1}{C} \int_0^t I_C\, dt. \quad (3.17)$$

Al conectar al circuito eléctrico varios condensadores, la expresión debe presentarse en la siguiente forma:

$$\sum_{q=1}^{q_1} \int_{l_{Cq}} \mathbf{E}_q dl = \sum_{q=1}^{q_1} \frac{1}{C_q} \int_0^t I_{Cq}\, dt. \quad (3.18)$$

Además de la caída de tensión en las bobinas de inductancia, resistencias y condensadores, forman parte del circuito eléctrico las diferencias de potencial extrínsecas U_{el} creadas por las fuentes. En este caso, como de ordinario, es justa la relación

$$\int_{l_{el}} \mathbf{E}_{el} dl = U_{el}. \quad (3.19)$$

Cuando se tienen varias fuentes deben sumarse las diferencias de potencial que aquéllas engendran:

$$\sum_{k=1}^{k_1} \int_{l_{el\,k}} \mathbf{E}_{el\,k} d\mathbf{l} = \sum_{k=1}^{k_1} U_{el\,k}. \qquad (3.20)$$

De este modo, en la formación de la integral de contorno $\oint_{l_1} \mathbf{E}\, d\mathbf{l}$ en el primer miembro de la expresión para la ley de Faraday (3.6), en el caso general, participan las ecuaciones (3.15), (3.18) y (3.20). En el proceso de adición, las diferencias de potencial creadas por las fuentes extrínsecas deben tomarse con signos inversos:

$$\oint_{l_1} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\sum_{k=1}^{k_1} \int_{l_{el\,k}} \mathbf{E}_{el\,k} d\mathbf{l} + \sum_{p=1}^{p_1} \int_{l_{rp}} \mathbf{E}_p d\mathbf{l} + \sum_{q=1}^{q_1} \int_{l_{Cq}} \mathbf{E}_q d\mathbf{l}.$$

Al sustituir los valores de las integrales a partir de las fórmulas (3.15), (3.18) y (3.20), obtenemos

$$\oint_{l_1} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\sum_{k=1}^{k_1} U_{el\,k} + \sum_{p=1}^{p_1} I_{el.c\,p} R_p + \sum_{q=1}^{q_1} \frac{1}{C_q} \int_0^t I_{Cq}\, dt. \qquad (3.21)$$

El segundo miembro de la expresión para la ley de Faraday (3.6) se determina por la relación (3.10). Al sustituir en la expresión (3.6) las fórmulas (3.21) y (3.10), obtenemos

$$-\sum_{k=1}^{k_1} U_{el\,k} + \sum_{p=1}^{p_1} I_{el.c\,p} R_p + \sum_{q=1}^{q_1} \frac{1}{C_q} \int_0^t I_{Cq}\, dt =$$

$$= -\sum_{n=1}^{n_1} L_n \frac{dI_n}{dt} - \sum_{m=1}^{m_1} M_m \frac{dI_m}{dt},$$

o bien, omitiendo parte de los índices,

$$\sum_{k=1}^{k_1} U_{el\,k} = \sum_{p=1}^{p_1} I_p R_p + \sum_{q=1}^{q_1} \frac{1}{C_q} \int_0^t I_q\, dt + \sum_{n=1}^{n_1} L_n \frac{dI_n}{dt} + \sum_{m=1}^{m_1} M_m \frac{dI_m}{dt}. \qquad (3.22)$$

Dicha relación representa la *segunda ley de Kirchhoff para un circuito con constantes concentradas*, según la cual la suma de las fuerzas electromotrices (f.e.m.) de las fuentes extrínsecas de corriente en un circuito eléctrico cerrado es igual a la suma de caídas de tensiones en sus elementos.

CAPITULO 4

Correlaciones energéticas en electrodinámica

§ 4.1. Teorema de Poynting para los valores instantáneos de los vectores del campo

Analicemos la primera y la segunda ecuación de Maxwell para los valores instantáneos de los vectores del campo definidos por las ecuaciones (2.5) y (2.6).

Al multiplicar, escalarmente, la ecuación (2.5) por el vector $\mathbf{E}$, y la ecuación (2.6), por el vector $\mathbf{H}$ para sustraer luego el primer producto del segundo, obtenemos

$$\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} - \mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = -\mathbf{J}_m\mathbf{H} - \gamma_m H^2 - \mu_a \frac{\partial H}{\partial t} H - \\ - \mathbf{J}_{el}\mathbf{E} - \gamma_{el} E^2 - \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} E. \qquad (4.1)$$

En el Apéndice I se expone la identidad vectorial $\mathrm{div}\,[\mathbf{ab}] = \mathbf{b}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a} - \mathbf{a}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{b}$ en cuyo primer miembro se halla la divergencia del producto vectorial del vector $\mathbf{a}$ por el vector $\mathbf{b}$.

Basándose en la identidad vectorial podemos escribir la ecuación (4.1) en la forma

$$\mathrm{div}\,[\mathbf{EH}] + \mathbf{J}_m\mathbf{H} + \gamma_m H^2 + \mu_a \frac{\partial H}{\partial t} H + \mathbf{J}_{el}\mathbf{E} + \gamma_{el} E^2 + \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} E = 0. \qquad (4.2)$$

La ecuación obtenida lleva el nombre de *teorema de Poynting en su forma diferencial para los valores instantáneos de los vectores del campo.*

Integremos la expresión (4.2) por el volumen V_1 que comprende todas las fuentes de las corrientes extrínsecas consideradas al escribir las ecuaciones de Maxwell:

$$\int_{V_1} \mathrm{div}\,[\mathbf{EH}]\,dV + \int_{V_1} \mathbf{J}_m\mathbf{H}\,dV + \int_{V_1} \gamma_m H^2\,dV + \\ + \int_{V_1} \mu_a \frac{\partial H}{\partial t} H\,dV + \int_{V_1} \mathbf{J}_{el}\mathbf{E}\,dV + \int_{V_1} \gamma_{el} E^2\,dV + \int_{V_1} \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} E\,dV = 0. \qquad (4.3)$$

Sobre la base del teorema de Ostrogradski-Gauss (2.1) y teniendo en cuenta que el producto vectorial

$$[\mathbf{EH}] = \Pi \qquad (4.4)$$

representa un vector, la ecuación (4.3), después de reagrupar sus términos, puede presentarse en la forma

$$\oint_{S_2} \Pi\, dS + \int_{V_1} \mathbf{J}_m \mathbf{H}\, dV + \int_{V_1} \mathbf{J}_{e1} \mathbf{E}\, dV + \int_{V_1} \gamma_m H^2\, dV + \\ + \int_{V_1} \gamma_{e1} E^2\, dV + \int_{V_1} \mu_a \frac{\partial H}{\partial t} H\, dV + \int_{V_1} \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} E\, dV = 0. \qquad (4.5)$$

La ecuación (4.5) se llama *teorema de Poynting en forma integral para los valores instantáneos de los vectores del campo, y el vector* Π *se denomina valor instantáneo del vector de Poynting.*

Es necesario determinar el sentido físico de la expresión (4.5). Con este fin hay que definir las unidades de medida de las integrales que forman parte de ésta:

$$\mathbf{E} \to \text{V/m}, \quad \mathbf{H} \to \text{A/m}, \quad \Pi \to \frac{\text{V} \cdot \text{A}}{\text{m}^2} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \qquad (4.6)$$

De este modo, la unidad para medir el vector de Poynting es el vatio por metro cuadrado. En otras palabras, el vector de Poynting representa la densidad de la potencia, o bien, la potencia del campo electromagnético que atraviesa la superficie de un metro cuadrado que se encuentra en un plano paralelo a otro plano en que están dispuestos los vectores $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$. La integral $\oint_{S_2} \Pi dS$ medida en vatios puede interpretarse como la potencia del campo electromagnético que atraviesa una superficie acotada que comprende el volumen V_1 en el cual están concentradas todas las fuentes extrínsecas del campo.

La potencia de las fuentes del campo se caracteriza por las integrales $\int_{V_1} \mathbf{J}_m \mathbf{H}\, dV$ y $\int_{V_1} \mathbf{J}_{e1} \mathbf{E}\, dV$.

La primera integral representa la potencia creada por las corrientes magnéticas extrínsecas, y la segunda integral, por las corrientes eléctricas extrínsecas. Estas integrales se toman por todo el volumen V_1, sin embargo, éstas serán diferentes de cero tan sólo dentro de los límites de los volúmenes en los cuales existen las densidades de las corrientes $\mathbf{J}_m$ y $\mathbf{J}_{e1}$. Es posible la situación en que el campo sea engendrado ya por las corrientes magnéticas extrínsecas, ya por las eléctricas extrínsecas. Entonces, una de las integrales se anula.

Las integrales $\int_{V_1} \gamma_m H^2 dV$ y $\int_{V_1} \gamma_{e1} E^2 dV$ se diferencian de cero si el medio posee permeancia o conductibilidad eléctrica. Dichas integrales pueden considerarse como potencias consumidas en calentar el medio a costa de las pérdidas magnéticas o eléctricas. En el caso de existir permeancia o conductibilidad eléctrica se engendran corrientes y, en correspondencia, se consume la potencia de las fuen-

tes. En los casos prácticos, es posible a veces, despreciar las pérdidas magnéticas o las eléctricas (o las unas y las otras), como, por ejemplo, cuando se trata de dieléctricos lo suficientemente perfectos.

La integral

$$\int_{V_1} \mu_a \frac{\partial H}{\partial t} H \, dV = P_m \tag{4.7}$$

caracteriza la potencia del campo magnético concentrada en el volumen V_1, o bien, la potencia consumida para formar el campo magnético, mientras que la integral

$$\int_{V_1} \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} E \, dV = P_{el} \tag{4.8}$$

define la potencia del campo magnético concentrada en el volumen V_1, o bien, la potencia consumida para formar el campo eléctrico.

La potencia total del campo electromagnético concentrada en el volumen V_1 puede presentarse como la suma de las potencias P_m y P_{el}:

$$P = \int_{V_1} \mu_a \frac{\partial H}{\partial t} H \, dV + \int_{V_1} \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} E \, dV. \tag{4.9}$$

De este modo, en la expresión (4.5) entra la suma de potencias de las fuentes del campo, de potencias de las pérdidas, de potencias de los campos magnético y eléctrico, concentrados en el volumen V_1, y de la potencia que sale fuera de los límites de este volumen a través de la superficie S_1. Esta suma es igual a cero, lo que permite considerar esta expresión como la ecuación del balance de las potencias instantáneas en el espacio delimitado por la superficie S_1. El teorema de Poynting representa una de las más importantes ecuaciones de electrodinámica, empleando la cual se puede efectuar distintos cálculos prácticos. Así, por ejemplo, si se conoce el vector de Poynting, ello da la posibilidad de determinar la potencia interceptada por los paraboloides de los radiotelescopios. Es de sustancial interés la determinación de la energía del campo electromagnético concentrada en el volumen V_1, así como de la energía de las pérdidas en el medio, lo que permite, por ejemplo, calcular el factor de mérito (factor Q) de los resonadores de cavidad (circuitos oscilantes utilizados en frecuencias ultraelevadas).

Se puede hallar la energía del campo electromagnético acumulada en el volumen V_1 o la energía consumida en formar este campo, integrando respecto al tiempo las expresiones (4.7) y (4.8) que definen las potencias de los campos magnético y eléctrico:

$$W_m = \int_0^t P_m \, dt = \int_0^t \int_{V_1} \mu_a \frac{\partial H}{\partial t} H \, dV \, dt. \tag{4.10}$$

La expresión $\frac{\partial H}{\partial t} dt = dH$ es la diferencial del campo H. En este caso, la integral por el tiempo pasa a la integral por el campo H.

Si se supone que en el momento $t = 0$ el campo no existía, y en el momento t era igual a H, la expresión para la energía magnética puede escribirse en la forma

$$W_m = \int_{V_1} \int_0^H \mu_a H \, dH \, dV.$$

Al efectuar la integración interna respecto a la variable H, obtenemos

$$W_m = \int_{V_1} \frac{\mu_a H^2}{2} dV. \tag{4.11}$$

Razonamientos análogos son válidos también para la energía del campo eléctrico cuya potencia se determina por la fórmula (4.8):

$$W_{el} = \int_0^t P_{el} \, dt = \int_0^t \int_{V_1} \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} E \, dV \, dt,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} dt = dE,$$

$$W_{el} = \int_{V_1} \int_0^E \varepsilon_a E \, dE \, dV, \tag{4.12}$$

$$W_{el} = \int_{V_1} \frac{\varepsilon_a E^2}{2} dV. \tag{4.13}$$

Las expresiones (4.11) y (4.13) dan el valor de la energía de los campos magnético y eléctrico concentrada en el volumen V_1. Las expresiones subintegrales representan las densidades volumétricas de las energías magnética ΔW_m y eléctrica ΔW_{el}:

$$\Delta W_m = \frac{\mu_a H^2}{2}, \tag{4.14}$$

$$\Delta W_{el} = \frac{\varepsilon_a E^2}{2}. \tag{4.15}$$

En el sistema MKSA las energías W_m y W_{el} se miden en julios:

$$W_m \to \text{J}, \quad W_{el} \to \text{J}, \tag{4.16}$$

y las densidades de estas energías, en julios por metro cúbico:

$$\Delta W_m \to \text{J/m}^3, \quad \Delta W_{el} \to \text{J/m}^3. \tag{4.17}$$

La energía total del campo electromagnético concentrada en el volumen V_1 es igual a la suma de las energías W_m y W_{el}:

$$W = W_m + W_{el} = \int_{V_1} \left(\frac{\mu_a H^2}{2} + \frac{\varepsilon_a E^2}{2} \right) dV. \qquad (4.18)$$

§ 4.2. Teorema de Poynting para las amplitudes complejas de los vectores del campo

Como base de los razonamientos elijamos las ecuaciones de Maxwell para las amplitudes complejas de los vectores del campo (2.12) y (2.13).

Al calcular los valores de $\tilde{\varepsilon}_a$ y $\tilde{\mu}_a$ empleando las fórmulas (1.159) y (1.161), obtenemos

$$\operatorname{rot} \dot{H} = \dot{J}_{el} + \gamma_{el} \dot{E} + j\omega\varepsilon_a \dot{E}, \qquad (4.19)$$

$$\operatorname{rot} \dot{E} = -\dot{J}_m - \gamma_m H - j\omega\mu_a \dot{H}. \qquad (4.20)$$

Sea que $\dot{H}^*$, $\dot{J}^*_{el}$ y $\dot{E}^*$ designan los valores conjugados de las amplitudes complejas de los vectores $\dot{H}$, $\dot{J}_{el}$ y $\dot{E}$, es decir, unos valores para los cuales los signos ante las partes imaginarias de las amplitudes complejas se han cambiado por los inversos.

Entonces, la ecuación (4.19) para las amplitudes complejas conjugadas toma la forma

$$\operatorname{rot} \dot{H}^* = \dot{J}^*_{el} + \gamma_{el} \dot{E}^* - j\omega\varepsilon_a \dot{E}^*. \qquad (4.21)$$

En correspondencia con las reglas de la transición a valores conjugados, el signo delante del último sumando del segundo miembro de la ecuación (4.19) se ha cambiado por el contrario.

A continuación, multiplicando escalarmente la ecuación (4.20) por el vector $\dot{H}^*$ y la ecuación (4.21) por el vector $\dot{E}$, y sustrayendo el segundo producto del primero, obtenemos

$$\dot{H}^* \operatorname{rot} \dot{E} - \dot{E} \operatorname{rot} \dot{H}^* = -\dot{J}_m \dot{H}^* - \gamma_m \dot{H}\dot{H}^* - j\omega\mu_a \dot{H}\dot{H}^* - \\ - \dot{J}^*_{el} \dot{E} - \gamma_{el} \dot{E}^* \dot{E} + j\omega\varepsilon_a \dot{E}^* \dot{E}. \qquad (4.22)$$

En virtud de la identidad vectorial $\mathbf{H}^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \operatorname{rot} \mathbf{H}^* = \operatorname{div} [\mathbf{E}\dot{\mathbf{H}}^*]$, así como teniendo en cuenta que el producto de una magnitud compleja por su valor conjugado da el cuadrado de la amplitud del módulo $\dot{H}\dot{H}^* = |\dot{H}|^2$, $\dot{E}^*\dot{E} = |\dot{E}|^2$, la expresión (4.22) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\operatorname{div} [\dot{E}\dot{H}^*] + \dot{J}_m \dot{H}^* + \dot{J}^*_{el} \dot{E} + \gamma_m |\dot{H}|^2 + \gamma_{el} |\dot{E}|^2 + \\ + j\omega\mu_a |\dot{H}|^2 - j\omega\varepsilon_a |\dot{E}|^2 = 0. \qquad (4.23$$

Por analogía con la ecuación (4.2) la ecuación (4.23) se denomina *teorema de Poynting en su forma diferencial para las amplitudes complejas de los vectores del campo.*

Al integrar la ecuación obtenida por el volumen V_1 que incluye las fuentes de las corrientes eléctricas y magnéticas extrínsecas y valiéndose del teorema de Ostrogradski—Gauss (2.1) sobre cuya base

$$\int_{V_1} \operatorname{div} [\dot{E}\dot{H}^*]\, dV = \oint_{S_1} [\dot{E}\dot{H}^*]\, dS,$$

representemos la ecuación (4.23) en forma integral:

$$\oint_{S_1} [\dot{E}\dot{H}^*]\, dS + \int_{V_1} \dot{J}_m \dot{H}^*\, dV + \int_{V_1} \dot{J}^*_{e1} \dot{E}\, dV + \int_{V_1} \gamma_m |\dot{H}|^2\, dV +$$

$$+ \int_{V_1} \gamma_{e1} |\dot{E}|^2\, dV + \int_{V_1} j\omega\mu_a |\dot{H}|^2\, dV - \int_{V_1} j\omega\varepsilon_a |\dot{E}|^2\, dV = 0. \quad (4.24)$$

La primera, la segunda y la tercera integral de la ecuación (4.24) representan, en el caso general, magnitudes complejas, es decir, pueden expresarse mediante la suma de las partes real e imaginaria. Debido a que las conductividades γ_m y γ_{e1} son magnitudes reales, lo mismo que son magnitudes reales los cuadrados de los módulos $|\dot{H}|^2$ y $|\dot{E}|^2$, las integrales cuarta y quinta son reales. También lo son las magnitudes ω, μ_a, $|\dot{H}|^2$, ε_a y $|\dot{E}|^2$. Por consiguiente las últimas dos integrales representan magnitudes imaginarias.

La expresión (4.24), por analogía con la (4.5) puede considerarse como ecuación del balance de potencias en el espacio, mas no de potencias instantáneas, sino de potencias complejas, activas y reactivas. En forma desarrollada esta expresión dividida por dos (lo que tiene, como se verá en adelante, un sentido determinado) se escribe así:

$$\oint_{S_1} \operatorname{Re} \tfrac{1}{2} [\dot{E}\dot{H}^*]\, dS + j \oint_{S_1} \operatorname{Im} \tfrac{1}{2} [\dot{E}\dot{H}^*]\, dS + \int_{V_1} \operatorname{Re} \tfrac{1}{2} \dot{J}_m \dot{H}^*\, dV +$$

$$+ j \int_{V_1} \operatorname{Im} \tfrac{1}{2} \dot{J}_m \dot{H}^*\, dV + \int_{V_1} \operatorname{Re} \tfrac{1}{2} \dot{J}^*_{e1} \dot{E}\, dV +$$

$$+ j \int_{V_1} \operatorname{Im} \tfrac{1}{2} \dot{J}^*_{e1} \dot{E}\, dV + \int_{V_1} \tfrac{1}{2} \gamma_m |\dot{H}|^2\, dV + \int_{V_1} \tfrac{1}{2} \gamma_{e1} |\dot{E}|^2\, dV +$$

$$+ \int_{V_1} \tfrac{1}{2} j\omega\mu_a |\dot{H}|^2\, dV - \int_{V} \tfrac{1}{2} j\omega\varepsilon_a |\dot{E}|^2\, dV = 0. \quad (4.25)$$

Al separar las partes reales e imaginarias hallemos aisladamente el balance de las potencias activas y reactivas en el espacio:

$$\oint_{S_2} \operatorname{Re} \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*]\, dS + \int_{V_1} \operatorname{Re} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{J}}_m \dot{\mathbf{H}}^*\, dV + \int_{V_1} \operatorname{Re} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{J}}_{el}^* \dot{\mathbf{E}}\, dV + \\ + \int_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_m |\dot{\mathbf{H}}|^2\, dV + \int_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_{el} |\dot{\mathbf{E}}|^2\, dV = 0, \qquad (4.26)$$

$$\oint_{S_2} \operatorname{Im} \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*]\, dS + \int_{V_1} \operatorname{Im} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{J}}_m \dot{\mathbf{H}}\, dV + \int_{V_1} \operatorname{Im} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{J}}_{el}^* \dot{\mathbf{E}}\, dV + \\ + \int_{V_1} \frac{1}{2} \omega \mu_a |\dot{\mathbf{H}}|^2\, dV - \int_{V_1} \frac{1}{2} \omega \varepsilon_a |\dot{\mathbf{E}}|^2\, dV = 0. \qquad (4.27)$$

Analicemos más detalladamente una de las integrales que forman parte de la expresión (4.26), en particular, la integral $\int_{V_1} \gamma_{el} |\dot{\mathbf{E}}|^2\, dV$.

En esta integral $|\dot{\mathbf{E}}|^2$ es el *cuadrado del módulo de la amplitud compleja del vector de intensidad del campo eléctrico*. Compongamos una integral parecida: $\int_{V_1} \gamma_{el} \mathbf{E}^2\, dV$, en el la cual $\mathbf{E}^2$ es el *cuadrado del valor instantáneo del vector* $\mathbf{E}$. Supongamos que el vector E cambia de acuerdo con la ley $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t + \varphi_E)$ Entonces

$$\int_{V_1} \gamma_{el} \mathbf{E}^2\, dV = \int_{V_1} \gamma_{el} E_m^2 \frac{1 + \cos 2(\omega t + \varphi_E)}{2}\, dV.$$

La relación obtenida caracteriza la potencia instantánea que se pierde en el volumen V_1 para calentar el medio a costa de la conductividad eléctrica γ_{el}. La potencia promediada respecto al período puede obtenerse empleando la siguiente integración:

$$P_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{V_1} \gamma_{el} \mathbf{E}^2\, dV\, dt = \frac{1}{\omega T} \int_0^{2\pi} \int_{V_1} \gamma_{el} \mathbf{E}^2\, dV\, d(\omega t),$$

$$\omega = 2\pi f, \quad T = 1/f,$$

$$P_{med} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{V_1} \gamma_{el} \mathbf{E}^2\, dV\, d(\omega t),$$

$$P_{med} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{V_1} \gamma_{el} E_m^2 \frac{1 + \cos 2(\omega t + \varphi_E)}{2}\, dV\, d(\omega t) = \int_{V_1} \frac{\gamma_{el} E_m^2}{2}\, dV.$$

En el caso examinado, la amplitud compleja $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_m e^{j\psi_E}$, $|\dot{\mathbf{E}}| = E_m$. El cuadrado del módulo de la amplitud compleja $|\dot{\mathbf{E}}|^2 = E_m^2$. Por consiguiente, la integral

$$\int_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_{e1} |\dot{\mathbf{E}}|^2 \, dV = \int_{V_1} \frac{\gamma_{e1} E_m^2}{2} \, dV$$

representa la potencia promediada en el período de oscilación la cual se pierde para calentar el medio.

La integral $\oint_{S_1} \operatorname{Re} \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*] \, d\mathbf{S}$ puede considerarse como potencia activa promediada en el período de oscilación, la cual pasa a través de la superficie acotada S_1, mientras que las integrales $\int_{V_1} \operatorname{Re} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{J}}_m \dot{\mathbf{H}}^* \, dV$ y $\int_{V_1} \operatorname{Re} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{J}}_{e1}^* \mathbf{E} \, dV$, pueden considerarse, respectivamente, como las potencias activas promediadas suministradas por las fuentes de las corrientes magnéticas y eléctricas extrínsecas al volumen V_1. Finalmente, la integral $\int_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_m |\dot{\mathbf{H}}|^2 \, dV$ puede considerarse como potencia activa promediada en el período de oscilación, la cual aparece a condición de existir la conductividad magnética, o bien, como potencia de las pérdidas en la sustancia al actuar sobre ésta el campo magnético.

En una serie de casos, cuando la permeabilidad magnética de la sustancia es una magnitud real, de conformidad con la expresión (1.161) conviene suponer que $\gamma_m = 0$, es decir, que no existe la mencionada potencia de las pérdidas.

La primera integral de la expresión (4.27) caracteriza la potencia reactiva promediada en el período de oscilación, la cual pasa a través de la superficie S_1, mientras que la segunda y la tercera integral definen las potencias reactivas promediadas de las fuentes de las corrientes magnética y eléctrica extrínsecas. Dichas potencias se asemejan a la potencia reactiva en la teoría de los circuitos que aparece cuando no existe la concordancia entre las resistencias de las fuentes y las resistencias de entrada de los dispositivos alimentados por ésas.

Las integrales $\int_{V_1} \frac{1}{2} \omega \mu_a |\dot{\mathbf{H}}|^2 \, dV$, $\int_{V_1} \frac{1}{2} \omega \varepsilon_a |\dot{\mathbf{E}}|^2 \, dV$ representan potencias promediadas consumidas para crear campos magnético y eléctrico en el volumen V_1. Por analogía con la expresión (4.4) el producto vectorial

$$\frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*] = \dot{\Pi} \tag{4.28}$$

se denomina *vector complejo de Poynting* que consta de las partes real e imaginaria:

$$\frac{1}{2}\operatorname{Re}[\dot{E}\dot{H}^*] = \dot{\Pi}_{Re}, \tag{4.29}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{Im}[\dot{E}\dot{H}^*] = \dot{\Pi}_{Im}. \tag{4.30}$$

J. Poynting publicó su trabajo [13] en 1884. En 1874, N. A. Umov [14] introdujo el concepto de flujo de energía. Hizo la definición del flujo de energía como el producto de la densidad de la energía transferida $\Delta W = dW/dV$ por el vector de velocidad **v**. Esta función lleva el nombre de *valor instantáneo del vector de Umov*:

$$\Delta W\mathbf{v} = \mathcal{Y}$$

N. A. Umov dedujo correlaciones importantes para las fuerzas de presión engendradas por el flujo de energía. Sin embargo, a diferencia de Poynting, no se ocupaba del problema de la transferencia de energía del campo electromagnético. Debe tenerse muy en cuenta que, en el caso general, el vector de Poynting y el vector de Umov no son la misma cosa. Estos vectores pueden ser iguales si se determina la parte correspondiente a la densidad total de la energía ΔW que participa en la transferencia y constituye el flujo del campo electromagnético. Al designar esta parte por ΔW_1 obtenemos

$$\mathcal{Y}_1 = \Delta W_1\mathbf{v} = \Pi.$$

CAPÍTULO 5

Teorema de unicidad de solución de las ecuaciones de Maxwell

§ 5.1. Planteamiento del problema

En los capítulos anteriores fueron fundamentadas las ecuaciones electrodinámicas que son la expresión matemática de los hechos experimentales. En el presente capítulo se determinan las condiciones al cumplirse las cuales la solución de dichas ecuaciones obtenida por cualquier método puede considerarse única. De ordinario, el teorema de unicidad se demuestra inicialmente para un volumen limitado V_1 rodeado por una superficie acotada S_1 y, a continuación, se extiende a un volumen ilimitado.

§ 5.2. Teorema de unicidad de solución de las ecuaciones de Maxwell para un volumen limitado

El teorema puede demostrarse en el caso de observar las siguientes condiciones:

1) en el momento inicial de tiempo $t = 0$ están dados los valores de los vectores del campo $\mathbf{E}(0)$ y $\mathbf{H}(0)$ dentro de todo el volumen limitado V_1;

2) en la superficie S_1 que acota el volumen considerado V_1 están prefijados los valores de las componentes del campo $E_\tau(t)$ o bien $H_\tau(t)$ tangenciales a S_1 en el intervalo de tiempo t durante el cual se estudian los procesos electrodinámicos.

El teorema se demuestra por reducción al absurdo. Supongamos que existen dos soluciones distintas de las ecuaciones de Maxwell para los campos $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ y $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ que satisfacen las ecuaciones (2.5) y (2.6). Escribamos estas ecuaciones para cada una de las dos soluciones:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_{e1} + \gamma_{e1}\mathbf{E}_1 + \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t}, \tag{5.1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = -\mathbf{J}_m - \gamma_m \mathbf{H}_1 - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t}, \tag{5.2}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_{e1} + \gamma_{e1}\mathbf{E}_2 + \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t}, \tag{5.3}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = -\mathbf{J}_m - \gamma_m \mathbf{H}_2 - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial t}. \tag{5.4}$$

Las ecuaciones para la primera y la segunda solución están escritas ateniéndose a un mismo volumen V_1. Los vectores del campo correspondientes a la primera y la segunda solución se crean por las mismas corrientes extrínsecas. Debido a esta circunstancia en las ecuaciones citadas son los mismos los parámetros del medio y las corrientes de excitación.

En virtud de la veracidad del principio de superposición para un medio lineal, las ecuaciones (2.5) y (2.6) deben satisfacerse por una tercera solución, la de diferencia:

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{H}_3 = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2. \tag{5.5}$$

Al sustraer término a término la ecuación (5.3) de la ecuación (5.1) y la ecuación (5.4) de la ecuación (5.2), así como teniendo en cuenta que la diferencia de los rotores de dos vectores es igual al rotor de diferencia de estos vectores, obtenemos las siguientes relaciones:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \gamma_{e1}(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) + \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2),$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \gamma_m(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) - \mu_a \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2).$$

o bien, definitivamente, después de sustituir en estas la expresión (5.5)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_3 = \gamma_{e1}\mathbf{E}_3 + \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}_3}{\partial t}, \tag{5.6}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_3 = -\gamma_m \mathbf{H}_3 - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}_3}{\partial t}. \tag{5.7}$$

Como se infiere de las ecuaciones (5.6) y (5.7) la tercera solución no tiene manantiales del campo y no puede realizarse físicamente. Estudiemos el problema de un modo más riguroso.

Puesto que en las ecuaciones de Maxwell (5.6) y (5.7) faltan corrientes extrínsecas, éstas tampoco estarán presentes en el teorema de Poynting (4.5) escrito para la tercera solución:

$$\oint_{S_1} [\mathbf{E}_3\mathbf{H}_3]\, dS + \int_V \gamma_m H_3^2\, dV + \int_V \gamma_{e1} E_3^2\, dV + \\ + \int_{V_1} \mu_a \frac{\partial H_3}{\partial t} H_3\, dV + \int_{V_1} \varepsilon_a \frac{\partial E_3}{\partial t} E_3\, dV = 0. \tag{5.8}$$

El producto $[\mathbf{E}_3\mathbf{H}_3]\, dS$ representa la proyección del vector de Poynting sobre la dirección de la normal a la superficie S_1 multiplicada por el elemento de la superficie dS. La proyección del vector $[\mathbf{E}_3\mathbf{H}_3]$ sobre la normal a la superficie S_1 o la componente —normal a S_1— del vector de Poynting se crea por las componentes tangenciales a esta superficie de los vectores $\mathbf{E}_{\tau 3}$ y $\mathbf{H}_{\tau 3}$. En virtud de la condición 2) puesta como base de la demostración del teorema de unicidad en la superficie S_1, los valores de las componentes tangenciales del vector $\mathbf{E}_\tau$, o bien, del vector $\mathbf{H}_\tau$ están dados unívocamente, en consecuencia,

$$E_{\tau 1} = \mathbf{E}_{\tau 2} = \mathbf{E}_\tau,$$

o bien

$$\mathbf{H}_{\tau 1} = \mathbf{H}_{\tau 2} = \mathbf{H}_\tau,$$

$$\mathbf{E}_{\tau 3} = \mathbf{E}_{\tau 1} - \mathbf{E}_{\tau 2} = 0, \tag{5.9}$$

o bien

$$\mathbf{H}_{\tau 3} = \mathbf{H}_{\tau 1} - \mathbf{H}_{\tau 2} = 0. \tag{5.10}$$

De este modo, si se observa la condición (5.9) o la (5.10), el producto

$$[\mathbf{E}_3\mathbf{H}_3]\, dS = 0 \tag{5.11}$$

y el teorema de Poynting (5.8) pueden escribirse en la siguiente forma:

$$\int_{V_1} \gamma_m H_3^2 dV \quad \int_{V_1} \gamma_{e1} E_3^2\, dV + \int_{V_1} \mu_a \frac{\partial H_3}{\partial t} H_3\, dV + \int_{V_1} \varepsilon_a \frac{\partial E_3}{\partial t} E_3\, dV = 0. \tag{5.12}$$

En correspondencia con la expresión (4.9) las dos últimas integrales representan la potencia de los campos magnético y eléctrico concentrada en el volumen V_1. Esta potencia puede representarse

como derivada respecto al tiempo de la energía del campo electromagnético W_3 acumulada en el volumen V_1:

$$P = \partial W_3/\partial t. \tag{5.13}$$

Entonces, la ecuación (5.12) puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial W_3}{\partial t} = -\int_{V_1} \gamma_m H_3^2\, dV - \int_{V_1} \gamma_{e1} E_3^2\, dV. \tag{5.14}$$

Las integrales del segundo miembro al existir el campo H_3, E_3 son esencialmente positivas. Por consiguiente, para que la igualdad (5.14) sea justa es necesario que se cumpla la condición

$$\partial W_3/\partial t < 0 \tag{5.15}$$

o bien

$$\partial W_3/\partial t = 0. \tag{5.16}$$

En el último caso el campo H_3, E_3 no existe. Conforme a la condición 1) de la demostración del teorema en el momento inicial de tiempo, dentro de los límites de todo el volumen V_1 están prefijados unívocamente los campos E (0) y H (0). En otras palabras, en el momento inicial de tiempo

$$\mathbf{E}_1(0) = \mathbf{E}_2(0) = \mathbf{E}(0),\ \mathbf{H}_1(0) = \mathbf{H}_2(0) = \mathbf{H}(0),$$

es decir, en el momento inicial de tiempo no existe campo que corresponda a la tercera solución:

$$\mathbf{E}_3(0) = \mathbf{E}_1(0) - \mathbf{E}_2(0) = 0,\ \mathbf{H}_3(0) = \mathbf{H}_1(0) - \mathbf{H}_2(0) = 0. \tag{5.17}$$

En el momento inicial de tiempo la energía del campo electromagnético correspondiente a la tercera solución es igual a cero en virtud de la relación (5.17). Es imposible la ulterior disminución de energía, por lo tanto tampoco es posible observar la desigualdad (5.15).

De este modo llegamos a la conclusión de que la desigualdad (5.15) es justa, lo cual conduce a la condición

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{H}_3 = 0, \tag{5.18}$$

bien, teniendo en cuenta las relaciones (5.5),

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2,\ \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2. \tag{5.19}$$

En el caso de observarse las condiciones 1) y 2) es posible la existencia de un solo campo electromagnético que satisfaga las ecuaciones de Maxwell. De este modo podemos considerar demostrado el teorema de unicidad de solución de las ecuaciones de Maxwell para un volumen limitado V_1.

§ 5.3. Teorema de unicidad de solución de las ecuaciones de Maxwell para un volumen ilimitado

En el caso de un volumen ilimitado no se puede exigir que se cumpla la condición 2), puesto que la superficie S_2 se encuentra a una distancia infinitamente alejada y es imposible prefijar las componentes del campo tangenciales a esta superficie. La condición 2) es necesaria para demostrar que es igual a cero la integral $\oint\limits_{S_1} [\mathbf{E}_3\mathbf{H}_3]\, d\mathbf{S}$ del teorema de Poynting (5.8). La condición 1) puede prefijarse (habitualmente como condición cero, o sea, como la ausencia del campo en el momento inicial de tiempo). La igualdad a cero de la primera integral en la ecuación (5.8), siendo ilimitado el volumen V_1, se reduce a la relación límite:

$$\lim_{S_1 \to \infty} \oint\limits_{S_1} [\mathbf{E}_3\mathbf{H}_3]\, d\mathbf{S} = 0. \tag{5.20}$$

Puesto que el área S_1 aumenta proporcionalmente al cuadrado de la distancia r, esta igualdad puede observarse si el decrecimiento de los vectores del campo con la distancia se realiza conforme a la ley

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{E}/r^k, \quad \mathbf{H}(r) = \mathbf{H}/r^k, \tag{5.21}$$

donde

$$k > 1. \tag{5.22}$$

En este caso conviene suponer que todas las fuentes del campo se encuentran a una distancia finita del origen de coordenadas.

Si se cumplen la condición 1) y las relaciones (5.21), (5.22) la demostración del teorema de unicidad para un volumen ilimitado V_1 no se diferencia de la demostración expuesta para un volumen limitado. Como se señalará más adelante, en un espacio libre, sin pérdidas, en el cual

$$\gamma_m = \gamma_{e1} = 0 \tag{5.23}$$

los vectores del campo decrecen proporcionalmente al primer grado de distancia. En este caso, teniendo en cuenta la relación (5.23) el teorema de Poynting (5.8) se escribe en la forma

$$\partial W_3/\partial t = -\oint\limits_{S_1} [\mathbf{E}_3\mathbf{H}_3]\, d\mathbf{S} \tag{5.24}$$

Puesto que todos los manantiales del campo están situados dentro del volumen V_1, el campo electromagnético se propaga en dirección a la superficie S_1 y, por consiguiente, la integral del segundo miembro es positiva o igual a cero. Como se ha indicado, al observarse la condición 1) de la demostración del teorema, la derivada de la energía respecto al tiempo no puede ser negativa. En consecuencia, la igualdad $\partial W_3/\partial t = 0$ es justa, siendo imposible el crecimiento de

la energía W_3 correspondiente a la tercera solución respecto al valor cero inicial. La tercera solución no existe.

Para un medio con pérdidas, como se señalará más adelante, se observan las condiciones (5 21) y (5 22) y el teorema de unicidad también se demuestra.

Es posible proponer otro curso de razonamientos, aceptable para el caso en que los procesos electromagnéticos se examinan en un intervalo de tiempo limitado, no infinitamente grande. En estas condiciones, el campo que se propaga en el espacio con velocidad luminal limitada no podrá alcanzar —*en un intervalo de tiempo limitado*— la superficie S_1 infinitamente alejada. De este modo, si el tiempo no es infinitamente grande, $\oint_{S_1} [\mathbf{E}_3 \mathbf{H}_3]\, dS \quad 0$

CAPÍTULO 6

Ecuaciones de onda y ecuaciones de Helmholtz para los vectores del campo

§ 6.1. Planteamiento del problema

Las ecuaciones electrodinámicas de Maxwell, para corrientes extrínsecas y parámetros del medio prefijados, representan un sistema de dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden con dos vectores incógnitos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$. Estas ecuaciones pueden resolverse ya sea eliminando uno de los dos vectores incógnitos del campo con la subsiguiente solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden, o bien directamente. La ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden escrita para los valores instantáneos de alguno de los vectores del campo se llama *ecuación de onda*, y cuando se trata de amplitudes complejas recibe el nombre de ecuación de Helmholtz

En este capítulo se estudia la metodología de obtención de ecuaciones de onda y ecuaciones de Helmholtz para los vectores del campo.

§ 6.2. Ecuaciones de onda para los vectores del campo

El sistema de ecuaciones de Maxwell para los valores instantáneos de los vectores del campo se escribe en forma de relaciones (2.5) y (2.6).

Para eliminar alguno de los vectores del campo, por ejemplo el vector $\mathbf{E}$, se toma el rotor de ambos miembros de la ecuación (2.5),

cambiándose el orden de la diferenciación en el último término:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{J}_{el} + \gamma_{el}\operatorname{rot}\mathbf{E} + \varepsilon_a\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{E}. \qquad (6.1)$$

En este caso los parámetros del medio se suponen constantes e independientes de las coordenadas.

En el Apéndice I se aduce la identidad vectorial rot rot **a** = grad div **a** — $\nabla^2\mathbf{a}$, donde ∇^2 es el operador de Laplace.

Al aplicar esta identidad en la ecuación (6.1), obtenemos

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{H} \quad \nabla^2\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{J}_{el} + \gamma_{el}\operatorname{rot}\mathbf{E} + \varepsilon_a\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{E}.$$

Seguidamente, sustituimos en esta ecuación el valor del rot **E** a partir de la segunda ecuación de Maxwell (2.6):

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{H} - \nabla^2\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{J}_{el} + \gamma_{el}\left(-\mathbf{J}_m - \gamma_m\mathbf{H} - \mu_a\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right) +$$

$$+\varepsilon_a\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mathbf{J}_m - \gamma_m\mathbf{H} - \mu_a\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right).$$

Agrupando los términos, cambiando los signos por los inversos y abriendo los paréntesis, hallamos

$$\nabla^2\mathbf{H} - \gamma_{el}\gamma_m\mathbf{H} - \gamma_{el}\mu_a\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} - \gamma_m\varepsilon_a\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} - \mu_a\varepsilon_a\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} -$$

$$-\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{H} = -\operatorname{rot}\mathbf{J}_{el} + \gamma_{el}\mathbf{J}_m + \varepsilon_a\frac{\partial\mathbf{J}_m}{\partial t},$$

o bien

$$\nabla^2\mathbf{H} - \mu_a\varepsilon_a\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} - (\gamma_{el}\mu_a + \gamma_m\varepsilon_a)\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} - \gamma_{el}\gamma_m\mathbf{H} -$$

$$-\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{H} = -\operatorname{rot}\mathbf{J}_{el} + \gamma_{el}\mathbf{J}_m + \varepsilon_{el}\frac{\partial\mathbf{J}_m}{\partial t}. \qquad (6.2)$$

Haciendo uso de las permutaciones (2.20), obtenemos la ecuación para el vector **E**:

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu_a\varepsilon_a\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - (\gamma_{el}\mu_a + \gamma_m\varepsilon_a)\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - \gamma_{el}\gamma_m\mathbf{E} -$$

$$-\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} = \operatorname{rot}\mathbf{J}_m + \gamma_m\mathbf{J}_{el} + \mu_a\frac{\partial\mathbf{J}_{el}}{\partial t}. \qquad (6.3)$$

La resolución de las ecuaciones (6.2) y (6.3) da la posibilidad de determinar —siendo prefijados los parámetros del medio y las corrientes extrínsecas— los vectores **H** y **E**. Estas ecuaciones vienen escritas teniendo en cuenta todos los factores potencialmente posibles que determinan el proceso electrodinámico. Atrae la atención la gran complejidad de los segundos miembros de estas ecuaciones. A continuación, se señalarán los caminos para simplificar los segundos miembros que determinan la excitación de los vectores del campo.

Para un medio sin pérdidas las ecuaciones se simplifican esencialmente

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \text{grad div } \mathbf{H} = -\text{rot } \mathbf{J}_{el} + \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{J}_m}{\partial t}, \quad (6\,4)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \text{grad div } \mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{J}_m + \mu_a \frac{\partial \mathbf{J}_{el}}{\partial t}. \quad (6\,5)$$

Si no hay pérdidas pueden hallarse fácilmente las expresiones para div H y div E. Cuando $\gamma_{el} = \gamma_m = 0$, las relaciones (2.7) y (2.8), teniendo en cuenta las fórmulas (1.19) y (1.79), se escriben en la forma

$$\text{div } (\varepsilon_a \mathbf{E}) = \rho_{el},$$

$$\text{div } (\mu_a \mathbf{H}) = \rho_m,$$

o bien

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_a} \rho_{el}, \quad (6.6)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \rho_m. \quad (6.7)$$

De las ecuaciones de continuidad (2.10) y (2.11) se desprende que

$$\rho_{el} = -\int_0^t \text{div } \mathbf{J}_{el}\, dt, \quad (6.8)$$

$$\rho_m = -\int_0^t \text{div } \mathbf{J}_m\, dt, \quad (6.9)$$

de donde

$$\text{div } \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_a} \int_0^t \text{div } \mathbf{J}_{el}\, dt, \quad (6.10)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = -\frac{1}{\mu_a} \int_0^t \text{div } \mathbf{J}_m\, dt \quad (6.11)$$

Al sustituir los valores de div H y div E en las ecuaciones (6.4) y (6.5), obtenemos las ecuaciones de onda:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu_a} \int_0^t \text{grad div } \mathbf{J}_m\, dt - \text{rot } \mathbf{J}_{el} + \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{J}_m}{\partial t}, \quad (6.12)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_a} \int_0^t \text{grad div } \mathbf{J}_{el}\, dt + \text{rot } \mathbf{J}_m + \mu_a \frac{\partial \mathbf{J}_{el}}{\partial t} \quad (6.13)$$

Las ecuaciones (6.2), (6.3), (6.12) y (6.13) se utilizan en los casos en que el sistema de las corrientes está dado y es necesario determinar los vectores del campo. Si se investigan los procesos de propagación

de las ondas electromagnéticas en un medio con parámetros prefijados, y las corrientes extrínsecas que excitan el campo se encuentran fuera de los límites de la parte analizada del espacio, los segundos miembros de las ecuaciones indicadas se anulan.

En este caso las ecuaciones (6.12) y (6.13) se escriben en forma de ecuaciones de onda más simples conocidas:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \tag{6.14}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{6.15}$$

En el caso de un campo estático ($\partial/\partial t = 0$) las ecuaciones de onda se convierten en ecuaciones de Laplace:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = 0, \tag{6.16}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = 0. \tag{6.17}$$

Las ecuaciones presentadas están escritas en forma general aceptable para cualquier sistema de coordenadas. En un sistema de coordenadas concreto el operador de Laplace aplicado al vector a se determina mediante la identidad $\nabla^2 \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \text{rot rot } \mathbf{a}$.

En un sistema de coordenadas concreto se calculan los operadores grad div a y rot rot a, lo que permite hallar $\nabla^2 \mathbf{a}$. En el Apéndice I se da la fórmula para $\nabla^2 \mathbf{a}$ escrita en el sistema de coordenadas curvilíneo ortogonal generalizado. Poniendo el valor de los coeficientes de Lamé es posible obtener las ecuaciones para $\nabla^2 \mathbf{a}$ en cualesquiera de los sistemas de coordenadas concreto.

§ 6.8. Ecuaciones de Helmholtz para los vectores del campo

El sistema de ecuaciones de Maxwell para las amplitudes complejas de los vectores del campo se escribe en forma de relaciones (2.12) y (2.13).

Al someter la primera ecuación a la operación del rotor, hallamos

$$\text{rot rot } \dot{\mathbf{H}} = \text{rot } \dot{\mathbf{J}}_{el} + j\omega \tilde{\varepsilon}_a \text{ rot } \dot{\mathbf{E}}.$$

Sustituyendo el valor de rot $\dot{\mathbf{E}}$ a partir de la segunda ecuación, obtenemos

$$\text{rot rot } \dot{\mathbf{H}} = \text{rot } \dot{\mathbf{J}}_{el} + j\omega \tilde{\varepsilon}_a (-\dot{\mathbf{J}}_m - j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}),$$

o bien

$$\text{rot rot } \dot{\mathbf{H}} = \text{rot } \dot{\mathbf{J}}_{el} - j\omega \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{J}}_m + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{H}}.$$

Haciendo uso de la identidad $\nabla^2 \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \text{rot rot } \mathbf{a}$, obtenemos

$$\text{grad div } \dot{\mathbf{H}} - \nabla^2 \dot{\mathbf{H}} = \text{rot } \dot{\mathbf{J}}_{el} - j\omega \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{J}}_m + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{H}}.$$

o bien, después de agrupar los términos

$$\nabla^2\dot{\mathbf{H}} + \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{H}} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{H}} = -\operatorname{rot}\dot{\mathbf{J}}_{et} + j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{J}}_m. \qquad (6.18)$$

Valiéndose de la expresión (2.15), se puede revelar la forma de div $\dot{\mathbf{H}}$:

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_a}\dot{\rho}_m. \qquad (6.19)$$

partir de la ecuación de continuidad (2.18) es posible hallar ρ_m:

$$\rho_m = \frac{j}{\omega}\operatorname{div}\dot{\mathbf{J}}_m.$$

Después de sustituir ρ_m en la expresión (6.19), obtenemos

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{H}} = \frac{j}{\omega\mu_a}\operatorname{div}\dot{\mathbf{J}}_m. \qquad (6.20)$$

Poniendo el valor de div $\mathbf{H}$ en la ecuación (6.18) y agrupando los términos, obtenemos la ecuación de Helmholtz para el vector $\dot{\mathbf{H}}$ en su forma definitiva:

$$\nabla^2\dot{\mathbf{H}} + \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{H}} = \frac{j}{\omega\mu_a}\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{J}}_m - \operatorname{rot}\dot{\mathbf{J}}_{et} + j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{J}}_m. \qquad (6.21)$$

La ecuación para el vector $\dot{\mathbf{E}}$ puede obtenerse por medio de permutaciones (2.19):

$$\nabla^2\dot{\mathbf{E}} + \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}} = \frac{j}{\omega\varepsilon_a}\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\mathbf{J}}_{et} + \operatorname{rot}\dot{\mathbf{J}}_m + j\omega\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{J}}_{et}. \qquad (6.22)$$

Las ecuaciones (6.21) y (6.22) representan las ecuaciones de Helmholtz y son ecuaciones diferenciales no homogéneas en derivadas parciales de segundo orden con el segundo miembro complejo.

En los casos en que se investigan los procesos de propagación de ondas electromagnéticas, y las corrientes extrínsecas $\dot{\mathbf{J}}_{et}$ y $\dot{\mathbf{J}}_m$ que excitan el campo se encuentran fuera de los límites de la parte analizada del espacio las ecuaciones no homogéneas de Helmholtz se transforman en ecuaciones homogéneas del tipo

$$\nabla^2\dot{\mathbf{H}} + \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{H}} = 0, \qquad (6.23)$$

$$\nabla^2\dot{\mathbf{E}} + \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}} = 0. \qquad (6.24)$$

CAPÍTULO 7

Solución de las ecuaciones homogéneas de Helmholtz en el caso elemental de un medio isótropo homogéneo. Ondas planas

§ 7.1. Planteamiento del problema

Las ecuaciones homogéneas de Helmholtz (6.23) y (6.24) se han deducido suponiendo que el medio en que se propagan las ondas electromagnéticas es homogéneo, lineal e isótropo. Estas ecuaciones están escritas en forma vectorial general y su solución puede verificarse en cualquier sistema de coordenadas. Con este fin es necesario calcular el operador de Laplace ∇^2 en un sistema de coordenadas concreto y representar las ecuaciones vectoriales de Helmholtz por el sistema de ecuaciones escalares. El operador de Laplace tiene la forma más simple en el sistema de coordenadas cartesiano, lo que determina el carácter simple de las ecuaciones escalares correspondientes a la ecuación de Helmholtz. Esta es la razón de que es racional comenzar el estudio de los métodos de solución de las ecuaciones de Helmholtz valiéndose del sistema de coordenadas cartesiano.

§ 7.2. Determinación del tipo de las ecuaciones escalares correspondientes a las ecuaciones de Helmholtz en el sistema de coordenadas cartesianas

En el Apéndice I se muestra la forma de la operación $\nabla^2\mathbf{a}$ en el sistema de coordenadas curvilíneas. Al sustituir los coeficientes de Lamé correspondientes al sistema de coordenadas cartesianas, obtenemos la expresión para la operación $\nabla^2\mathbf{a}$ en este sistema:

$$\nabla^2\mathbf{a} = \mathbf{1}_x\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right)+$$

$$+\mathbf{1}_y\left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}\right)+\mathbf{1}_z\left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right).$$

Al sustituir la expresión para el operador de Laplace en la ecuación (6.23) y representar el vector $\dot{\mathbf{H}}$ en la forma

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{1}_x\dot{H}_x + \mathbf{1}_y\dot{H}_y + \mathbf{1}_z\dot{H}_z, \tag{7.1}$$

obtenemos

$$\mathbf{1}_x\left(\frac{\partial^2\dot{H}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\dot{H}_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\dot{H}_x}{\partial z^2}\right)-\mathbf{1}_y\left(\frac{\partial^2\dot{H}_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\dot{H}_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\dot{H}_y}{\partial z^2}\right)+$$

$$+\mathbf{1}_z\left(\frac{\partial^2\dot{H}_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\dot{H}_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\dot{H}_z}{\partial z^2}\right)+\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a(\mathbf{1}_x\dot{H}_x+\mathbf{1}_y\dot{H}_y+\mathbf{1}_z\dot{H}_z)=0. \tag{7.2}$$

Igualando a cero los factores de los versores idénticos, escribimos el sistema de ecuaciones escalares para el vector $\dot{\mathbf{H}}$:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\dot{H}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\dot{H}_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\dot{H}_x}{\partial z^2}+\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{H}_x=0,\\
&\frac{\partial^2\dot{H}_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\dot{H}_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\dot{H}_y}{\partial z^2}+\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{H}_y=0,\\
&\frac{\partial^2\dot{H}_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\dot{H}_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\dot{H}_z}{\partial z^2}+\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{H}_z=0.
\end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

En este sistema tenemos una división de las funciones, es decir, cada ecuación escalar contiene tan sólo una componente del vector $\dot{\mathbf{H}}$. Cabe señalar que tal división es posible solamente en un sistema de coordenadas rectilíneas (cartesianas).

El sistema de ecuaciones escalares para el vector $\dot{\mathbf{E}}$ se escribe análogamente a (7.3):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\dot{E}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\dot{E}_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\dot{E}_x}{\partial z^2}+\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{E}_x=0,\\
&\frac{\partial^2\dot{E}_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\dot{E}_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\dot{E}_y}{\partial z^2}+\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{E}_y=0,\\
&\frac{\partial^2\dot{E}_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\dot{E}_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\dot{E}_z}{\partial z^2}+\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{E}_z=0.
\end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

§ 7.3. Ondas planas

Los sistemas de ecuaciones escalares (7.3) y (7.4) adquieren la forma más simple en el caso de ondas planas.

Se llama plana una onda que se propaga a lo largo de cierta coordenada lineal y es, en cada momento fijado del tiempo, invariable en un plano perpendicular a dicha coordenada. Desde el punto de vista físico no existen ondas estrictamente planas, ya que el frente de tal onda que se encuentra en el plano perpendicular a la dirección de propagación debería extenderse hasta el infinito. Para el caso de manantiales de pequeñas dimensiones, en la realidad, existen ondas esféricas las cuales pueden considerarse como planas para grandes

valores del radio dentro de un tramo de onda limitado. En una serie de casos, cuando se trata de la solución de problemas prácticos, la representación de la onda electromagnética como plana es una idealización racional, que ofrece la posibilidad de obtener datos valiosos referentes al proceso.

Al suponer que el vector de Poynting de la onda plana esta orientado a lo largo del eje z del sistema de coordenadas cartesianas:

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{E}\dot{H}^*] = \dot{\Pi}_z, \tag{7.5}$$

podemos afirmar que éste debe ser creado por las componentes del campo en el plano xy. Las componentes del campo orientadas a lo largo del eje z deben faltar. Semejante campo se denomina a veces campo electromagnético transversal o campo del tipo T. Puesto que las componentes del campo deben ser invariables en el plano perpendicular a la dirección de propagación, o sea, en el plano xy, las derivadas respecto a estas coordenadas deben ser iguales a cero. De este modo es posible escribir las siguientes condiciones matemáticas del problema planteado:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{E}_z = \dot{H}_z = 0, \ \dot{E}_x, \ \dot{E}_y, \ \dot{H}_x, \ \dot{H}_y \neq 0, \\ &\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial}{\partial z} \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

Los sistemas de ecuaciones escalares (7.3) y (7.4) en derivadas parciales se transforman en ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con coeficientes constantes:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\dot{H}_x}{dz^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{H}_x = 0, \\ &\frac{d^2\dot{H}_y}{dz^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{H}_y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\dot{E}_x}{dz^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{E}_x = 0, \\ &\frac{d^2\dot{E}_y}{dz^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{E}_y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

La solución de cualquier par de ecuaciones, por ejemplo el (7.8), puede escribirse en la forma

$$\left.\begin{aligned} &\dot{E}_x = A_1 e^{-j\gamma z} + A_2 e^{j\gamma z}, \\ &\dot{E}_y = B_1 e^{-j\gamma z} + B_2 e^{j\gamma z}, \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

donde

$$\gamma = \omega \sqrt{\tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \tag{7.10}$$

es el *coeficiente (factor) de propagación*

Si el medio presenta pérdidas eléctricas o magnéticas, las permeabilidades $\tilde{\varepsilon}_a$ o $\tilde{\mu}_a$ son magnitudes complejas y, por consiguiente, también es complejo el coeficiente de propagación γ. Si, inicialmente, se ha escrito la solución de las ecuaciones (7.8) y han sido introducidas las constantes de integración A y B, entonces, al escribir las soluciones de las ecuaciones (7.7) no conviene introducir nuevas constantes de integración a raíz de que los vectores del campo $\dot{\mathbf{E}}$ y $\dot{\mathbf{H}}$ están relacionados por las ecuaciones de Maxwell, y la solución de las ecuaciones (7.7) puede escribirse mediante las soluciones conocidas para las componentes del campo $\dot{E}_x$, $\dot{E}_y$. El proceso de búsqueda de soluciones para las componentes del campo $\dot{\mathbf{H}}_x$, $\dot{\mathbf{H}}_y$ se basa en las ecuaciones de Maxwell (2.12) y (2.13).

Para buscar el vector $\dot{\mathbf{H}}$, siendo conocido el vector $\dot{\mathbf{E}}$, en principio, se puede utilizar cualesquiera de estas ecuaciones. Al hacer uso de la ecuación (2.12) en la cual el vector $\dot{\mathbf{H}}$ se halla bajo el signo del operador diferencial, o sea el rotor, para determinar el vector $\dot{\mathbf{H}}$ sería necesario resolver una ecuación diferencial. Si se aplica la ecuación (2.13) es preciso tomar solamente el rotor de la solución conocida, lo cual es bastante sencillo. Esta es la razón por la cual para hallar el vector $\dot{\mathbf{H}}$ basándose en el vector conocido $\dot{\mathbf{E}}$ es racional valerse de la segunda ecuación de Maxwell, mientras que para determinar el vector $\dot{\mathbf{E}}$ por medio del vector hallado $\dot{\mathbf{H}}$ conviene más emplear la primera ecuación de Maxwell.

En el caso de ondas planas no existen las corrientes extrínsecas y el sistema de ecuaciones de Maxwell debe escribirse en la forma

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}}, \tag{7.11}$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{H}}. \tag{7.12}$$

A partir de la ecuación (7.12) se desprende que

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}. \tag{7.13}$$

En el Apéndice I se da la siguiente expresión para el rotor en el sistema de coordenadas cartesianas:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = 1_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + 1_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + 1_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right).$$

Teniendo en cuenta las relaciones (7.6) podemos escribir la siguiente expresión para rot $\dot{\mathbf{E}}$:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -1_x \frac{d\dot{E}_y}{dz} + 1_y \frac{d\dot{E}_x}{dz}.$$

Al sustituir el valor del rot $\dot{\mathbf{E}}$ en (7.13) obtenemos la fórmula para el vector $\dot{\mathbf{H}}$:

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{1}_x \frac{1}{j\omega\mu_a} \cdot \frac{d\dot{E}_y}{dz} - \mathbf{1}_y \frac{1}{j\omega\mu_a} \cdot \frac{d\dot{E}_x}{dz}. \qquad (7.14)$$

Debe prestarse atención a que la componente del campo H_x se forma a costa de la componente $\dot{E}_y$ ortogonal a la primera, mientras que la componente del campo $\dot{H}_y$, a costa de la componente $\dot{E}_x$ ortogonal a la última. Las componentes del campo $\dot{H}_x$, $\dot{E}_y$ y $\dot{H}_y$, $\dot{E}_x$ forman vectores de Poynting dirigidos a lo largo del eje z que determinan la propagación de ondas electromagnéticas en el sentido prefijado. Utilizando las expresiones (7.14) y (7.9), se puede obtener la relación para la componente del campo $\dot{\mathbf{H}}_x$:

$$\dot{H}_x = \frac{1}{j\omega\mu_a} (-j\gamma B_1 e^{-j\gamma z} + j\gamma B_2 e^{j\gamma z}).$$

Poniendo el valor de γ a partir de (7.10), obtenemos

$$\dot{H}_x = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} (-B_1 e^{-j\gamma z} + B_2 e^{j\gamma z}).$$

Seguidamente, introduciendo la designación

$$Z_{med} = \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}, \qquad (7.15)$$

podemos volver a escribir la expresión para $\dot{H}_x$ en la forma

$$\dot{H}_x = \frac{1}{Z_{med}} (-B_1 e^{-j\gamma z} + B_2 e^{j\gamma z}). \qquad (7.16)$$

Analogamente, se halla la relación para la componente del campo $\dot{H}_y$:

$$\dot{H}_y = -\frac{1}{Z_{pred}} (A_1 e^{-j\gamma z} - A_2 e^{j\gamma z}). \qquad (7.17)$$

Determinemos las unidades para medir la magnitud Z_{med}:

$$Z_{med} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \to \sqrt{\frac{\text{H m}}{\text{m } \Phi}} = \sqrt{\frac{\text{H}}{\Phi}}.$$

En virtud de que $\omega L \to \Omega = \text{H/s}$ y $\frac{1}{\omega C} \to \Omega = \text{s/}\Phi$,

$$\text{H} = \Omega \cdot \text{s} \text{ y } \Phi = \text{s/}\Omega.$$

Por consiguiente,

$$Z_{med} \to \sqrt{\frac{\text{H}}{\Phi}} = \sqrt{\frac{\Omega \text{ s} \cdot \Omega}{\text{s}}} \quad \Omega. \qquad (7.18)$$

La magnitud Z_{med} se mide en ohmios y se denomina *resistencia característica del medio.*

Al poner en la fórmula (7.15) las expresiones (1.159) y (1.161), obtenemos

$$Z_{med} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_a}{\tilde{\varepsilon}_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a - j\frac{\gamma_m}{\omega}}{\varepsilon_a - j\frac{\gamma_e}{\omega}}}. \qquad (7.19)$$

Si presentamos $\tilde{\varepsilon}_a$ y $\tilde{\mu}_a$ en forma de

$$\tilde{\varepsilon}_a = |\tilde{\varepsilon}_a| e^{-j\alpha_\varepsilon}, \quad \tilde{\mu}_a = |\tilde{\mu}_a| e^{-j\alpha_\mu}, \qquad (7.20)$$

donde

$$|\tilde{\varepsilon}_a| = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \left(\frac{\gamma_e}{\omega}\right)^2}, \quad \alpha_\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{\gamma_e}{\omega\varepsilon_a}, \qquad (7.21)$$

$$|\tilde{\mu}_a| = \sqrt{\mu_a^2 + \left(\frac{\gamma_m}{\omega}\right)^2}, \quad \alpha_\mu = \operatorname{arctg} \frac{\gamma_m}{\omega\mu_a}, \qquad (7.22)$$

hallamos

$$Z_{med} = \sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a| e^{-j\alpha_\mu}}{|\tilde{\varepsilon}_a| e^{-j\alpha_\varepsilon}}} = \sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\varepsilon}_a|}} e^{-j\frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}}. \qquad (7.23)$$

En un medio con pérdidas la resistencia de onda es una magnitud compleja. Los ángulos α_μ y α_ε se llaman *ángulos de pérdidas magnéticas y eléctricas.*

Como se infiere de las fórmulas (7.9) y (7.16) la conducta de las ondas planas se determina en gran medida por el coeficiente de propagación γ. Teniendo en cuenta las expresiones (7.10) y (7.20) se puede escribir

$$\gamma = \omega \sqrt{\tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} = \omega \sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\varepsilon}_a| e^{-j(\alpha_\mu + \alpha_\varepsilon)}} = \omega \sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\varepsilon}_a|} e^{-j\frac{\alpha_\mu + \alpha_\varepsilon}{2}}, \qquad (7.24)$$

o bien

$$\gamma = \omega \sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\varepsilon}_a|} \left(\cos \frac{\alpha_\mu + \alpha_\varepsilon}{2} - j \operatorname{sen} \frac{\alpha_\mu + \alpha_\varepsilon}{2}\right). \qquad (7.25)$$

De esta manera, en el caso general, el coeficiente de propagación es complejo. Al igual que cualquier otra magnitud este coeficiente puede representarse como suma de las partes real e imaginaria:

$$\gamma = \beta - j\alpha, \qquad (7.26)$$

donde

$$\beta = \omega \sqrt{|\tilde{\mu}_a| |\tilde{\varepsilon}_a|} \cos \frac{\alpha_\mu + \alpha_\varepsilon}{2} \qquad (7.27)$$

es la constante de fase, mientras que

$$\alpha = \omega \sqrt{|\widetilde{\mu}_a|\,|\widetilde{\varepsilon}_a|}\,\operatorname{sen}\frac{\alpha_\mu + \alpha_\varepsilon}{2} \tag{7.28}$$

es la constante de amortiguación (atenuación), o constante de amplitud.

El sentido de estas denominaciones se aclara después de sustituir la igualdad (7.26) en cualesquiera de las expresiones para las componentes del campo, por ejemplo, en la expresión para $\dot{E}_x$ (7.9):

$$\dot{E}_x = A_1 e^{-\gamma z} + A_2 e^{\gamma z} = A_1 e^{-j(\beta - j\alpha)z} + A_2 e^{j(\beta - j\alpha)z} = \\ = A_1 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + A_2 e^{\alpha z} e^{j\beta z}. \tag{7.29}$$

De esta expresión se deduce que el coeficiente α influye en la amplitud de las componentes del campo y el coeficiente β determina la fase de oscilación. Como se advierte de las expresiones (7.21) y (7.22), para un medio con pérdidas, los módulos $|\widetilde{\varepsilon}_a|$, $|\widetilde{\mu}_a|$ y los ángulos de las pérdidas α_ε, α_μ son funciones de la frecuencia ω. Por consiguiente, el coeficiente de propagación γ es función de la frecuencia.

Las soluciones obtenidas para las componentes del campo contienen dos sumandos con dos constantes de integración. Matemáticamente esto se determina por el hecho de que se han resuelto las ecuaciones diferenciales de segundo orden. Es necesario esclarecer el sentido físico de cada sumando. Con este fin es racional pasar de las amplitudes complejas a los valores instantáneos de los vectores del campo. Esta transición puede llevarse a cabo mediante las fórmulas (1.157). Al sentar como base de los razonamientos la expresión (7.29), obtenemos

$$E_x(t) = \operatorname{Re}(\dot{E}_x e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(A_1 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} + A_2 e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\omega t}) = \\ = A_1 e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) + A_2 e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z). \tag{7.30}$$

Examinemos los argumentos de los cosenos $\omega t - \beta z$ y $\omega t + \beta z$. Fijemos el tiempo $t = t_1$ y el punto en el eje $z = z_1$. Entonces, el primer argumento o fase tomará el valor $\omega t_1 - \beta z_1$, y el segundo argumento, respectivamente, $\omega t_1 + \beta z_1$. Impartiendo al tiempo t el incremento dt, hallemos a qué distancia dz se desplazarán los puntos con las fases $\omega t_1 - \beta z_1$ y $\omega t_1 + \beta z_1$, o sea, se requiere la observancia de las igualdades:

$$\omega(t_1 + dt) - \beta(z_1 + dz) = \omega t_1 - \beta z_1,$$
$$\omega(t_1 + dt) + \beta(z_1 + dz) = \omega t_1 + \beta z_1.$$

Al simplificar los miembros iguales, obtenemos

$$\omega dt - \beta dz = 0, \quad \omega dt + \beta dz = 0,$$

de donde

$$dz/dt = \omega/\beta \text{ y } dz/dt = -\omega/\beta.$$

Las derivadas $dz/dt = v_f$ representan la velocidad de desplazamiento del valor fijado de la fase a lo largo del eje z. Esta velocidad se llama *velocidad de fase*. La velocidad correspondiente a la fase $\omega t - \beta z$ se determina por la expresión

$$v_f = \omega/\beta. \tag{7.31}$$

Esta velocidad es positiva, o sea, el primer sumando en la expresión (7.30) corresponde a la onda que se propaga en dirección de los valores positivos del eje z. Es la llamada *onda incidente*. En un medio con pérdidas la amplitud de esta onda decrece a medida de su desplazamiento conforme a la ley $e^{-\alpha z}$.

Al sustituir la expresión general para β (7.27) en la fórmula (7.31), obtenemos

$$v_f = \frac{\omega}{\omega \sqrt{|\tilde{\mu}_a|\,|\tilde{\varepsilon}_a|}\cos\dfrac{\alpha_\varepsilon + \alpha_\mu}{2}},$$

o bien

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{|\tilde{\mu}_a|\,|\tilde{\varepsilon}_a|}\cos\dfrac{\alpha_\varepsilon + \alpha_\mu}{2}}. \tag{7.32}$$

Para un medio con pérdidas el denominador de esta expresión depende de la frecuencia ω.

De este modo, en los medios que poseen dispersión la velocidad de fase es función de la frecuencia.

La velocidad de fase correspondiente a la fase $\omega t + \beta z$ se determina por la expresión

$$v_f = -\omega/\beta. \tag{7.33}$$

Esta velocidad es negativa, es decir, el segundo sumando en la expresión (7.30) corresponde a la onda que se propaga en dirección de los valores negativos del eje z. Es la llamada *onda reflejada*. Dicha onda aparece cuando en la trayectoria de la onda incidente hay un obstáculo que refleja toda la onda o parte de ella en dirección inversa. Si no hay obstáculo, tampoco aparece la onda reflejada. La constante de integración A_2 en este caso debe ser igual a cero. Existe tan sólo una onda incidente. Al engendrarse la onda reflejada, su amplitud es $A_2 e^{\alpha z_0}$, donde z_0 es la coordenada del obstáculo reflector que se determina por la amplitud de la onda incidente $A_1 e^{-\alpha z_0}$ y las condiciones de reflexión. En este caso es justa la relación

$$A_2 e^{\alpha z_0} = \dot{M}^{\text{refl}} A_1 e^{-\alpha z_0}. \tag{7.34}$$

El coeficiente $\dot{M}^{\text{refl}}$ que en el caso general es una magnitud compleja se llama *coeficiente (factor) de reflexión*.

En un medio absorbente la amplitud de la onda reflejada debe tener su valor máximo junto al obstáculo reflector y disminuir a medida que se aleja de éste, es decir, a medida que va disminuyendo la coordenada z. Ello se determina por el factor $e^{\alpha z}$ que alcanza su expresión más alta cuando es máximo el valor de la coordenada

$z = z_0$, correspondiente al lugar de disposición del obstáculo reflector. El factor indicado decrece a medida que disminuye la coordenada z, o sea, a medida que se propaga la onda reflejada en dirección inversa: hacia el origen de coordenadas.

Si se conoce el coeficiente de reflexión $\dot{M}^{\text{refl}}$, entonces, valiéndose de la relación (7.34) es posible expresar la constante de integración A_2 por medio de la constante A_1. Entonces, en la expresión (7.30) para la componente del campo E_x queda desconocida tan sólo una constante de integración, la constante A_1, que es la constante de amplitud imposible de determinar en principio, ya que en las ecuaciones iniciales de Helmholtz no fueron introducidas las corrientes extrínsecas.

§ 7.4. Velocidad en grupo

Como es sabido, no se puede transmitir información por medio de oscilación monocromática. La transmisión de la información está vinculada inevitablemente a la modulación y el espectro de frecuencias. Este último puede ser discreto o continuo según sea el tipo de la modulación y de la señal. La velocidad de propagación de un grupo de ondas electromagnéticas que poseen un espectro de frecuencias y portan la información transmitida se llama *velocidad en grupo*.

Velocidad en grupo para el caso de espectro de frecuencias discreto (discontinuo). En el caso de un espectro de frecuencias discreto las amplitudes complejas de los vectores del campo contienen una serie de diferentes componentes de frecuencia. La amplitud compleja del vector $\dot{E}_x$ de la onda incidente se escribe en este caso, teniendo en cuenta la expresión (7.29), en la siguiente forma:

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{x0}e^{-\alpha_0 z}e^{-j\beta_0 z} + \dot{E}_{x1}e^{-\alpha_1 z}e^{-j\beta_1 z} + \dot{E}_{x2}e^{-\alpha_2 z}e^{-j\beta_2 z} + \ldots$$
$$\ldots + \dot{E}_{xn}e^{-\alpha_n z}e^{-j\beta_n z}, \qquad (7.35)$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ son constantes de amortiguación y constantes de fase, respectivamente, definidas por las fórmulas (7.27) y (7.28) y correspondientes a las frecuencias del espectro discreto $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

Para pasar de las amplitudes complejas a los valores instantáneos de los vectores se utilizan las fórmulas del tipo (1.157). En este caso la expresión (7.35) se convierte en la correlación

$$E_x(t) = \operatorname{Re}(\dot{E}_{x0}e^{-\alpha_0 z}e^{-j\beta_0 z}e^{j\omega_0 t} + E_{x1}e^{-\alpha_1 z}e^{-j\beta_1 z}e^{j\omega_1 t} +$$
$$+ \dot{E}_{x2}e^{-\alpha_2 z}e^{-j\beta_2 z}e^{j\omega_2 t} + \ldots + \dot{E}_{xn}e^{-\alpha_n z}e^{-j\beta_n z}e^{j\omega_n t}) =$$
$$= \operatorname{Re}(\dot{E}_{x0}e^{-\alpha_0 z}e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} + \dot{E}_{x1}e^{-\alpha_1 z}e^{j(\omega_1 t - \beta_1 z)} +$$
$$+ \dot{E}_{x2}e^{-\alpha_2 z}e^{j(\omega_2 t - \beta_2 z)} + \ldots + \dot{E}_{xn}e^{-\alpha_n z}e^{j(\omega_n t - \beta_n z)}).$$

Destacando en calidad de factor la oscilación de la frecuencia fundamental del espectro ω_0, obtenemos

$$\mathbf{E}_x(t) = \mathrm{Re}\,(\dot{E}_{x0}e^{j(\omega_0 t-\beta_0 z)}(\dot{E}_{x0}e^{-\alpha_0 z} + \dot{E}_{x1}e^{-\alpha_1 z}e^{j((\omega_1-\omega_0)t-(\beta_1-\beta_0)z)} + \\ + \dot{E}_{x2}e^{-\alpha_2 z}e^{j((\omega_2-\omega_0)t-(\beta_2-\beta_0)z)} + \ldots + \dot{E}_{xn}e^{-\alpha_n z}e^{j((\omega_n-\omega_0)t-(\beta_n-\beta_0)z)}). \tag{7.36}$$

Al introducir la designación

$$\dot{E}_{x0}e^{-\alpha_0 z} + \dot{E}_{x1}e^{-\alpha_1 z}e^{j((\omega_1-\omega_0)t-(\beta_1-\beta_0)z)} + \dot{E}_{x2}e^{-\alpha_2 z}e^{j((\omega_2-\omega_0)t-(\beta_2-\beta_0)z)} + \\ + \ldots + \dot{E}_{xn}e^{-\alpha_n z}e^{j((\omega_n-\omega_0)t-(\beta_n-\beta_0)z)} = \dot{F}, \tag{7.37}$$

obtenemos

$$\dot{E}_x = \mathrm{Re}\,(\dot{F}e^{j(\omega_0 t-\beta_0 z)}). \tag{7.38}$$

Las componentes del campo portadoras de información están relacionadas con las frecuencias del espectro $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Estas componentes forman parte del vector $\dot{F}$. Determinemos la velocidad de propagación de este vector a lo largo del eje z.

La función $\dot{F}$ puede representarse en la forma

$$\dot{F} = \dot{E}_{x0}e^{-\alpha_0 z} + \dot{E}_{x1}e^{-\alpha_1 z}e^{j(\beta_1-\beta_0)\left(\frac{\omega_1-\omega_0}{\beta_1-\beta_0}t-z\right)} + \\ + \dot{E}_{x2}e^{-\alpha_2 z}e^{j(\beta_2-\beta_0)\left(\frac{\omega_2-\omega_0}{\beta_2-\beta_0}t-z\right)} + \ldots + \\ + \dot{E}_{xn}e^{-\alpha_n z}e^{j(\beta_n-\beta_0)\left(\frac{\omega_n-\omega_0}{\beta_n-\beta_0}t-z\right)}, \tag{7.39}$$

donde la constante de fase β es definida por la expresión (7.27).

En cierta aproximación el coeficiente β puede considerarse proporcional a la frecuencia ω. Entonces, si el espectro es lo suficientemente estrecho, se puede escribir la siguiente igualdad aproximada de las fracciones:

$$\frac{\omega_1-\omega_0}{\beta_1-\beta_0} \approx \frac{\omega_2-\omega_0}{\beta_2-\beta_0} \approx \ldots \approx \frac{\omega_n-\omega_0}{\beta_n-\beta_0} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} \approx \left.\frac{d\omega}{d\beta}\right|_{\substack{\omega=\omega_0\\ \beta=\beta_0}}. \tag{7.40}$$

Con cierto grado de exactitud podemos igualar estas fracciones a la derivada $d\omega/d\beta$ tomada para $\omega = \omega_0$, $\beta = \beta_0$. Es fácil determinar las unidades de medida de esta derivada:

$$\frac{d\omega}{d\beta} - \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

La derivada $d\omega/d\beta$ se mide en las mismas unidades que la velocidad.

Al introducir la designación

$$\left.\frac{d\omega}{d\beta}\right|_{\substack{\omega=\omega_0\\ \beta=\beta_0}} = v_{gr} \tag{7.41}$$

y aprovecharla en la expresión (7.39), obtenemos

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{E}}_{x0} e^{-\alpha_0 z} + \dot{\mathbf{E}}_{x1} e^{-\alpha_1 z} e^{j(\beta_1 - \beta_0)(v_{gr} t - z)} + \dot{\mathbf{E}}_{x2} e^{-\alpha_2 z} \times$$

$$\times e^{j(\beta_2 - \beta_0)(v_{gr} t - z)} + \ldots + \dot{\mathbf{E}}_{xn} e^{-\alpha_n z} e^{j(\beta_n - \beta_0)(v_{gr} t - z)}. \qquad (7.42)$$

La dependencia de la función $\dot{\mathbf{F}}$, que encierra en sí la información transmitida, respecto a la coordenada z se determina por la diferencia $v_{gr}t - z$.

Fijemos el tiempo $t = t_1$ y el punto en el eje $z = z_1$. Entonces, la diferencia $v_{gr}t - z$ obtiene un valor determinado $v_{gr}t_1 - z_1$. Atribuyamos al tiempo t_1 un incremento dt y determinemos la nueva posición del punto en el eje $z + dz$, para la cual el valor de la diferencia queda el mismo. Con este fin compongamos la igualdad

$$v_{gr}(t_1 + dt) - (z_1 + dz) = v_{gr}t_1 - z_1,$$

de donde

$$v_{gr}dt = dz, \quad dz/dt = v_{gr}. \qquad (7.43)$$

De este modo, v_{gr} determina la velocidad de translación de los valores fijados de la función $\dot{\mathbf{F}}$ a lo largo del eje z. En otras palabras, v_{gr} determina la velocidad de desplazamiento a lo largo del eje z de un grupo de componentes del espectro de frecuencias que porta información. Esta es la razón por la cual la magnitud v_{gr} recibió el nombre de velocidad en grupo.

La velocidad de fase se determina por la correlación (7.31). Si el medio no posee dispersión, la velocidad de fase no depende de la frecuencia ω. En este caso para las frecuencias del espectro ω_0, ω_1, ω_2, ..., ω_n es justa la relación

$$v_f = \text{const} = \frac{\omega_0}{\beta_0} = \frac{\omega_1}{\beta_1} = \frac{\omega_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{\omega_n}{\beta_n}, \qquad (7.44)$$

de donde

$$\omega_0 = v_f\beta_0, \quad \omega_1 = v_f\beta_1, \quad \omega_2 = v_f\beta_2, \quad \ldots, \quad \omega_n = v_f\beta_n. \qquad (7.45)$$

Al sustituir la expresión (7.45) en (7.40), obtenemos

$$\frac{v_f(\beta_1 - \beta_0)}{\beta_1 - \beta_0} = \frac{v_f(\beta_2 - \beta_0)}{\beta_2 - \beta_0} = \ldots = \frac{v_f(\beta_n - \beta_0)}{\beta_n - \beta_0} = \frac{d\omega}{d\beta}\bigg|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ \beta=\beta_0}} = v_{gr}$$

De aquí se infiere que $v_f = v_{gr}$, o sea, en un medio sin dispersión la velocidad en grupo es igual a la velocidad de fase.

Velocidad en grupo para el caso de un espectro de frecuencias continuo. Cuando se trata de un espectro de frecuencias continuo, los vectores del campo pueden representarse por medio de la transformación inversa de Fourier (1.29). Para la onda plana el argumento ωt en el exponente de la potencia se sustituye por $\omega t - \beta z$, y la

transformación inversa de Fourier se escribe en la forma

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_E(\omega)\, e^{j(\omega t - \beta z)}\, d\omega. \qquad (7.46)$$

En el caso de un medio dispersivo la constante de fase β es función de la frecuencia ω. En virtud de ello β puede desarrollarse en una serie respecto a la frecuencia fundamental ω_0. Si el espectro es estrecho, entonces, en el desarrollo se puede limitarse a dos primeros términos de la serie:

$$\beta \approx \beta_0 + \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)\Big|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ \beta=\beta_0}} (\omega - \omega_0). \qquad (7.47)$$

Valiéndonos de la relación (7.41), obtenemos

$$\beta \approx \beta_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v_{gr}}. \qquad (7.48)$$

Entonces

$$e^{j(\omega t - \beta z)} = e^{j\left(\omega_0 t - \omega_0 t + \omega t - \beta_0 z - \frac{\omega - \omega_0}{v_{gr}} z\right)} =$$

$$= e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} e^{j\left(\omega t - \omega_0 t - \frac{\omega - \omega_0}{v_{gr}} z\right)} = e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \times$$

$$\times e^{j(\omega - \omega_0)\left(t - \frac{z}{v_{gr}}\right)} = e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} e^{j\frac{\omega - \omega_0}{v_{gr}}(v_{gr} t - z)}. \qquad (7.49)$$

Sustituyamos la relación (7.49) en (7.46)

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_E(\omega)\, e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} e^{j\frac{\omega - \omega_0}{v_{gr}}(v_{gr} t - z)}\, d\omega. \qquad (7.50)$$

Introduzcamos la designación

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\, e^{j\frac{\omega - \omega_0}{v_{gr}}(v_{gr} t - z)}\, d\omega = F_1(v_{gr} t - z). \qquad (7.51)$$

Entonces, la expresión (7.50) puede representarse en la forma

$$E(t) = F_1(v_{gr} t - z)\, e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)}.$$

La función $F_1(v_{gr} t - z)$ desempeña el papel de amplitud de la oscilación que porta la información.

Los puntos del valor fijado de la función $F_1(v_{gr} t - z)$ se desplazan a lo largo del eje z a la velocidad v_{gr}.

De este modo, en el caso de los espectros discreto y continuo de frecuencias la velocidad de transmisión de la información a lo largo del eje z es igual a la velocidad en grupo determinada por la fórmula (7.41).

§ 7.5. Propagación de ondas planas en distintos medios

Analicemos la propagación de ondas planas en tres medios característicos: en el vacío, en un medio con pérdidas y en el metal.

Propagación de ondas planas en el vacío. En el vacío $\tilde{\mu}_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m, $\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ Φ/m

$$\gamma = \omega \sqrt{\tilde{\mu}_0 \tilde{\varepsilon}_a} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \beta, \quad \alpha = 0. \tag{7.52}$$

De esta manera, en el vacío, la onda plana no sufre amortiguación. La velocidad de fase es

$$v_f = \omega/\beta = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = c_0, \tag{7.53}$$

donde c_0 es la velocidad de la luz en el vacío.

En el vacío, la velocidad de fase es igual a la velocidad de la luz y no depende de la frecuencia, por lo tanto, el vacío es un medio no dispersivo. La velocidad en grupo es

$$v_{gr} = \left.\frac{d\omega}{d\beta}\right|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ \beta=\beta_0}} = \left.\frac{1}{d\beta/d\omega}\right|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ \beta=\beta_0}} = \frac{1}{d\,d\omega\,(\omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0})} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = v_f.$$

En el vacío, tal como debe suceder en un medio no dispersivo, la velocidad en grupo es igual a la velocidad de fase.

Si el vacío se sustituye por un dieléctrico ideal con los parámetros ε_a, μ_a, el coeficiente de propagación es

$$\gamma = \beta = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a}, \tag{7.54}$$

mientras que la velocidad de fase y la velocidad en grupo son iguales entre sí:

$$v_f = v_{gr} = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = c. \tag{7.55}$$

Aquí c es la velocidad de la luz en un medio con los parámetros μ_a, ε_a.

Propagación de ondas planas en un medio con pérdidas. Para un medio con pérdidas son justas las relaciones (7.27) y (7.28). La onda electromagnética sufre una amortiguación determinada por la magnitud de las pérdidas.

La velocidad de fase es

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{|\mu_a|\,|\varepsilon_a|}\cos\dfrac{\alpha_\mu + \alpha_\varepsilon}{2}}. \tag{7.56}$$

Puesto que todas las magnitudes en la fórmula (7.56) son funciones de la frecuencia, la velocidad de fase también es una función de la frecuencia, lo que indica que existe dispersión.

La velocidad en grupo

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{d\beta}\Big|_{\substack{\omega=\omega_0\\ \beta=\beta_0}} = \frac{1}{\dfrac{d\beta}{d\omega}\Big|_{\substack{\omega=\omega_0\\ \beta=\beta_0}}} = \frac{1}{d\,d\omega\left(\omega\sqrt{|\mu_a|\,|\varepsilon_a|}\cos\dfrac{\alpha_\mu+\alpha_\varepsilon}{2}\right)}$$

$$(\text{para } \omega = \omega_0). \qquad (7.57)$$

En este caso la velocidad en grupo no es igual a la velocidad de fase. La dependencia de la velocidad de fase respecto a la frecuencia acarrea distintas velocidades de propagación de la fase de las componentes del espectro de frecuencia, y como resultado, la señal en un medio con pérdidas está sujeta a distorsiones.

Más adelante se señalará la posible existencia de medios electrodinámicos sin pérdidas los cuales, sin embargo, son dispersivos.

Propagación de ondas planas en los metales. Para los metales con buena conductibilidad, incluso para las más altas frecuencias utilizadas actualmente en la radiotecnia, se observa la desigualdad

$$\gamma_{el}/\omega \gg \varepsilon_a = \varepsilon_0. \qquad (7.58)$$

Demostremos la veracidad de esta afirmación tomando como ejemplo el cobre y una oscilación con longitud de onda $\lambda = 1$ mm $= 10^{-3}$ m.

Para el cobre ($\gamma_{el} \approx 5 \cdot 10^7$ S m)

$$\frac{\gamma_{el}}{\omega} = \frac{5\cdot 10^7}{6{,}28\cdot 3\cdot 10^{11}} = 2{,}65\cdot 10^{-4} \gg \varepsilon_0 = 8{,}854\cdot 10^{-12}.$$

De este modo con un alto grado de precisión podemos considerar que

$$\tilde{\varepsilon}_a = -j\frac{\gamma_{el}}{\omega}. \qquad (7.59)$$

Entonces, la constante de propagación para $\tilde{\mu}_a = \mu_a$:

$$\gamma = \omega\sqrt{\mu_a\left(-j\frac{\gamma_{el}}{\omega}\right)} = \sqrt{-j\omega\mu_a\gamma_{el}}.$$

Puesto que $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - j\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}$, resulta

$$\gamma = \sqrt{\omega\mu_a\gamma_{el}e^{-j\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{\omega\mu_a\gamma_{el}}\,e^{-j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\omega\mu_a\gamma_{el}}\times$$
$$\times\left(\cos\frac{\pi}{4} - j\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\omega\mu_a\gamma_{el}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

y definitivamente

$$\gamma = \sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_{el}}{2}}(1-j). \qquad (7.60)$$

Para los metales es justa la igualdad

$$\beta = \alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_{el}}{2}}, \tag{7.61}$$

La velocidad de fase es

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_{el}}{2}}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a\gamma_{el}}}. \tag{7.62}$$

La velocidad en grupo es

$$v_{gr} = \frac{1}{\left.\frac{d\beta}{d\omega}\right|_{\substack{\omega=\omega_0\\ \beta=\beta_0}}} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega}\left(\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_{el}}{2}}\right)} \quad (\text{para } \omega = \omega_0),$$

o, después de la diferenciación,

$$v_{gr} = 2\sqrt{\frac{2\omega_0}{\mu_a\gamma_{el}}}. \tag{7.63}$$

De este modo, la velocidad en grupo supera dos veces la de fase. Para

$$\gamma_{el} \to \infty \qquad \alpha \to \infty \tag{7.64}$$

En un metal de conductibilidad ideal la amortiguación del campo es infinitamente grande, debido a lo cual el campo es igual a cero. Para

$$\gamma_{el} \to \infty \; \mathbf{E}; \qquad \mathbf{H} \to 0. \tag{7.65}$$

Basándose en la correlación (7.58) en el metal se pueden despreciar las corrientes de desplazamiento en comparación con las corrientes de conduccion, y la primera ecuación de Maxwell (2.12) puede escribirse en la forma

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}}_{el} + j\omega\left(\varepsilon_0 - j\frac{\gamma_{el}}{\omega}\right)\dot{\mathbf{E}} \approx \dot{\mathbf{J}}_{el} + \gamma_{el}\dot{\mathbf{E}}. \tag{7.66}$$

Si consideramos como campo $\dot{\mathbf{H}}$ la componente $\dot{\mathbf{H}}_y$ de la onda incidente (7.17) podemos escribir

$$\dot{\mathbf{H}}_y = \mathbf{1}_y \frac{A_1}{Z_{med}} e^{-j\gamma z},$$

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_y = -\mathbf{1}_x \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = \frac{-\mathbf{1}_x A_1}{Z_{med}}(-j)\gamma e^{-j\gamma z}. \tag{7.67}$$

Al sustituir el valor de rot $\dot{\mathbf{H}}_y$ en la ecuación (7.66), obtenemos

$$j\frac{A_1}{Z_{med}}\gamma e^{-j\gamma z} = \dot{J}_{el\,x} + \gamma_{el}\dot{E}_x,$$

o bien

$$j\frac{A_1}{Z_{med}}(\beta - j\alpha)e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} = \dot{J}_{el\,x} + \gamma_{el}\dot{E}_x. \tag{7.68}$$

En el segundo miembro de la expresión (7.68) se encuentra la suma de densidades de la corriente eléctrica extrínseca y de la corriente de conducción. Las densidades de la corriente decrecen de la misma manera que el campo, de acuerdo con la ley $e^{-\alpha z}$. Sin embargo, debido a que en el primer miembro α es un factor, es imposible indicar inmediatamente cómo cambiarán las densidades de las corrientes, cuando α tiende al infinito en un metal ideal.

Para aclarar el comportamiento de las densidades de las corrientes hay que transformar la expresión (7.68). Ante todo, empleando las expresiones (7.15) y (7.59), determinemos el tipo de la resistencia característica Z_{med} para los metales:

$$Z_{med} = Z_m \sqrt{\frac{\dot{\mu}_a}{\dot{\varepsilon}_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{-j\frac{\gamma_{el}}{\omega}}} = \sqrt{\frac{j\mu_a\omega}{\gamma_{el}}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma_{el}}}(1+j). \tag{7.69}$$

Teniendo en cuenta las expresiones (7.69) y (7.61), la relación (7.68) puede escribirse de nuevo en la forma

$$j\frac{A_1}{\sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma_{el}}}(1+j)}\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_{el}}{2}}(1-j)\,e^{-\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_{el}}{2}}z}e^{-j\beta z} =$$

$$= \dot{j}_{el\,x} + \gamma_{el}\dot{E}_x,$$

o bien

$$j\frac{A_1(1-j)\,e^{-j\beta z}\gamma_{el}}{(1+j)\,e^{\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_{el}}{2}}z}} = \dot{j}_{el\,x} + \gamma_{el}\dot{E}_x. \tag{7.70}$$

En el caso de un metal ideal γ_{el} tiende al infinito. También tienden al infinito el numerador y el denominador del primer miembro de la expresión (7.70). Calculemos el límite indeterminador en la expresión $\frac{\gamma_{el}}{e^{\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_{el}}{2}}z}}$ empleando la regla de L'Hospital:

$$\lim_{\gamma_{el}\to\infty}\frac{\gamma_{el}}{e^{\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_{el}}{2}}z}} = \lim_{\gamma_{el}\to\infty}\frac{\frac{d}{d\gamma_{el}}(\gamma_{el})}{\frac{d}{d\gamma_{el}}e^{\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_{el}}{2}}z}} =$$

$$= \lim_{\gamma_{el}\to\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_{el}}{2}}z}\sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2}}z\frac{1}{2\sqrt{\gamma_{el}}}} = \lim_{\gamma_{el}\to\infty}\frac{2\sqrt{\gamma_{el}}}{e^{\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_{el}}{2}}z}\sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2}}z}.$$

Aplicando nuevamente la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{\gamma_{el}\to\infty} \frac{2\sqrt{\gamma_{el}}}{e^{\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_{el}}{2}}z}\sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2}}z} =$$

$$= \lim_{\gamma_{el}\to\infty} \frac{\frac{d}{d\gamma_{el}}(2\sqrt{\gamma_{el}})}{\frac{d}{d\gamma_{el}}\left(e^{\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_{el}}{2}}z}\sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2}}z\right)} =$$

$$= \lim_{\gamma_{el}\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\gamma_{el}}\, e^{\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_{el}}{2}}z}\frac{\omega\mu_a}{2}z^2\frac{1}{2\sqrt{\gamma_{el}}}}$$

$$= \lim_{\gamma_{el}\to\infty} \frac{2}{e^{\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma_{el}}{2}}z}\frac{\omega\mu_a}{2}z^2} = 0. \qquad (7.71)$$

De esta forma, el cálculo del límite indeterminado en el primer miembro de la expresión (7.70) demuestra que las densidades de las corrientes en un metal perfecto tienden a cero para cualquier valor de z, por pequeño que sea, y cuando z tiende a cero las densidades de las corrientes aumentan hasta el infinito. En otras palabras, en un metal ideal la corriente circula en una capa de espesor cero, siendo su densidad infinitamente grande. Este fenómeno se denomina *efecto de carga superficial o efecto pelicular*.

Al examinar la propagación del campo electromagnético en los metales reales se introduce el concepto de profundidad de penetración del campo en el metal, entendiéndose por tal la distancia que asegura la amortiguación del campo en $e = 2{,}718$ veces. Matemáticamente, esta condición puede expresarse de la siguiente forma: $e^{-\alpha d} = \frac{1}{e} = e^{-1}$, de donde para la profundidad de penetración se puede escribir [véase la expresión (7.61)]

$$d = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_a\gamma_{el}}}. \qquad (7.72)$$

§ 7.6. Polarización de ondas planas

Se entiende por polarización la ley de variación de la dirección y magnitud del vector de intensidad del campo eléctrico en un punto dado del espacio por un período de oscilación. Tomando como base la onda incidente determinemos los casos posibles de polarización de las ondas planas. Basándose en la relación (7.9) escribamos las siguientes expresiones para las componentes del campo de la onda incidente:

$$\dot{E}_x = A_1 e^{-i\gamma z}, \quad \dot{E}_y = B_1 e^{-i\gamma z}.$$

Las constantes A_1 y B_1 pueden ser magnitudes complejas, es decir,

$$A_1 = |A_1|\, e^{j\varphi_x}, \quad B_1 = |B_1|\, e^{j\varphi_y}.$$

En un medio con pérdidas el coeficiente de propagación es complejo debido a lo cual las componentes del campo se escriben en la forma

$$\dot{E}_x = |A_1|\, e^{j\varphi_x} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z},$$

$$\dot{E}_y = |B_1|\, e^{j\varphi_y} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}.$$

Al pasar de las amplitudes complejas a los valores instantáneos obtenemos

$$\begin{aligned} E_x(t) &= |A_1|\, e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_x), \\ E_y(t) &= |B_1|\, e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_y). \end{aligned} \tag{7.73}$$

Introduzcamos las designaciones

$$\varphi = \varphi_x - \varphi_y, \quad \psi = \omega t - \beta z. \tag{7.74}$$

Al dividir las expresiones (7.73) por los módulos $|A_1|$, $|B_1|$ y utilizar las designaciones (7.74), obtenemos

$$\frac{E_x(t)}{|A_1|} = e^{-\alpha z} \cos(\psi + \varphi_x),$$

$$\frac{E_y(t)}{|B_1|} = e^{-\alpha z} \cos\left((\psi + \varphi_x) - \varphi\right) =$$

$$= e^{-\alpha z} \cos(\psi + \varphi_x) \cos\varphi + e^{-\alpha z} \operatorname{sen}(\psi + \varphi_x) \operatorname{sen}\varphi = \frac{E_x(t)}{|A_1|} \cos\varphi +$$

$$+ e^{-\alpha z} \sqrt{1 - \left(\frac{E_x(t)}{|A_1|}\right)^2 e^{2\alpha z}}\, \operatorname{sen}\varphi,$$

o bien

$$\sqrt{1 - \left(\frac{E_x(t)}{|A_1|}\right)^2 e^{2\alpha z}}\, \operatorname{sen}\varphi \frac{E_y(t)}{B_1} - \frac{E_x(t)}{A_1} \cos\varphi = e^{-\alpha z} \times$$

$$\times \sqrt{1 - \left(\frac{E_x(t)}{|A_1|}\right)^2 e^{2\alpha z}}\, \operatorname{sen}\varphi.$$

Al elevar esta expresión al cuadrado hallamos

$$\left(\frac{E_y(t)}{|B_1|}\right)^2 - 2\frac{E_y(t)}{|B_1|} \cdot \frac{E_x(t)}{|A_1|} \cos\varphi + \left(\frac{E_x(t)}{|A_1|}\right)^2 \cos^2\varphi =$$

$$= e^{-2\alpha z} \operatorname{sen}^2\varphi - \left(\frac{E_x(t)}{|A_1|}\right)^2 \operatorname{sen}^2\varphi,$$

de donde

$$\left(\frac{E_y(t)}{|B_1|}\right)^2 - 2\frac{E_y(t)}{|B_1|} \cdot \frac{E_x(t)}{|A_1|} \cos\varphi + \left(\frac{E_x(t)}{|A_1|}\right)^2 -$$

$$- e^{-2\alpha z} \operatorname{sen}^2\varphi = 0. \tag{7.75}$$

Las componentes $E_x(t)$, $E_y(t)$ del vector de intensidad del campo eléctrico pueden considerarse como coordenadas del extremo del vector $\mathbf{E}(t)$ en el plano xy. La posición de este vector determina el carácter de la polarización del campo. Simplifiquemos la escritura de la expresión (7.75) introduciendo las siguientes designaciones:

$$E_y(t) = y,\ E_x(t) = x,\quad \frac{1}{|B_1|^2} = \alpha_1,\quad \frac{1}{|B_1|}\cdot\frac{1}{|A_1|}\cos\varphi = \alpha_2,$$

$$\frac{1}{|A_1|^2} = \alpha_3,\quad -e^{-2\alpha z}\operatorname{sen}^2\varphi = \alpha_4. \tag{7.76}$$

Entonces la expresión (7.75) se escribe como

$$\alpha_1 y^2 + 2\alpha_2 yx + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 = 0. \tag{7.77}$$

La expresión obtenida representa la ecuación de la curva de segundo orden en coordenadas $y = E_y(t)$ y $x = E_x(t)$. De este

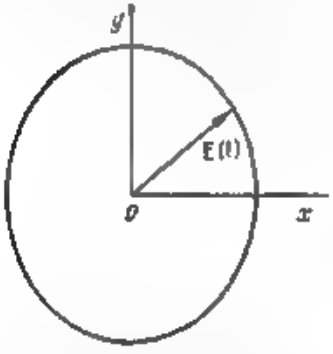

FIG. 7.1

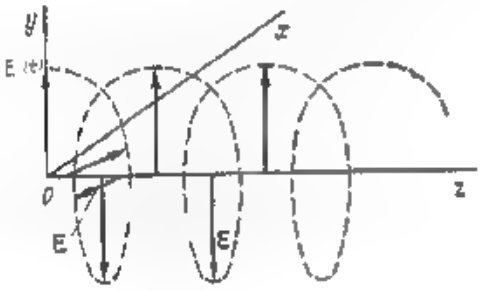

FIG. 7.2

modo, en el caso general, el extremo del vector $\mathbf{E}(t)$ se desplaza según la curva de segundo orden. En la geometría analítica se demuestra que el carácter de esta curva se define con el signo del determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2^2 = \frac{1}{(|B_1|\,|A_1|)^2} - \frac{\cos^2\varphi}{(|B_1|\,|A_1|)^2}. \tag{7.78}$$

Si el determinante es mayor de cero la curva representa una elipse o, en el caso particular, una circunferencia. Si el determinante es igual a cero, la elipse degenera en línea recta.

Examinemos los casos posibles:

1) $0 < |\varphi| < \pi/2$ o bien $0 < |\varphi_x - \varphi_y| < \pi/2$. (7.79)

El determinante es mayor de cero, el extremo del vector $\mathbf{E}(t)$ se desplaza por la elipse y surge una polarización elíptica. Las componentes $E_x(t)$, $E_y(t)$ del vector $\mathbf{E}(t)$, como se ve de la expresión (7.73), cambian con la variación del tiempo t y de la coordenada z. Lo uno y lo otro provoca la rotación del vector $\mathbf{E}(t)$ por la elipse (figs. 7.1 y 7.2). En un medio absorbente, cuando $\alpha = 0$, las

dimensiones de la elipse en su traslación a lo largo del eje z disminuyen.

$$2)\ |\varphi| = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{|B_1|} - \frac{1}{|A_1|}. \tag{7.80}$$

La ecuación (7.75) se escribe en la forma

$$E_y^2(t) + E_x^2(t) = |A_1|^2 e^{-2\alpha z}, \tag{7.81}$$

Esta expresión representa la ecuación de una circunferencia En un medio no absorbente, cuando $\alpha = 0$, el radio de la circunferencia es constante. En un medio absorbente el radio de la circunferencia, igual a $|A_1| e^{-\alpha z}$, disminuye a medida de desplazarse a lo largo del eje z. Surge la polarización circular, y el extremo del vector $\mathbf{E}(t)$, cuando varía el tiempo t y la coordenada z, gira por la circunferencia.

$$3)\ \varphi = 0. \tag{7.82}$$

La ecuación (7.75) se escribe en la forma

$$\left(\frac{E_y(t)}{|B_1|}\right)^2 - 2\frac{E_y(t)}{|B_1|} \cdot \frac{E_x(t)}{|A_1|} + \left(\frac{E_x(t)}{|A_1|}\right)^2 = 0.$$

o bien

$$\left(\frac{E_y(t)}{|B_1|} - \frac{E_x(t)}{|A_1|}\right)^2 = 0.$$

$$E_y(t) = \frac{|B_1|}{|A_1|} E_x(t). \tag{7.83}$$

Esta ecuación es la ecuación de una recta cuya inclinación respecto a los ejes se determina por el coeficiente angular $\frac{|B_1|}{|A_1|}$. En este caso el vector $\mathbf{E}(t)$ es inmóvil en el espacio al variar el tiempo t y la coordenada z. Aparece la polarización lineal.

§ 7.7. Ortogonalidad de los vectores E (t) y H (t)

Las componentes del campo de una onda incidente plana pueden hallarse mediante las relaciones (7.9), (7.16) y (7.17):

$$\dot{E}_x = A_1 e^{-ikz},\ \dot{E}_y = B_1 e^{-ikz},$$

$$\dot{H}_x = -\frac{B_1}{Z_{med}} e^{-ikz},\ \dot{H}_y = \frac{A_1}{Z_{med}} e^{-ikz}. \tag{7.84}$$

Para un medio absorbente son justas las fórmulas (7.23) y (7.26). Las amplitudes A_1 y B_1 pueden ser complejas:

$$A_1 = |A_1| e^{i\varphi_A},\ |B_1| = |B_1| e^{i\varphi_B}. \tag{7.85}$$

Entonces, para las amplitudes complejas de los vectores $\dot{\mathbf{E}}$ y $\dot{\mathbf{H}}$ se puede escribir

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{1}_x |A_1| e^{j\varphi_A} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \mathbf{1}_y |B_1| e^{j\varphi_B} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}, \qquad (7.86)$$

$$\dot{H} = -\mathbf{1}_x \frac{|B_1| e^{j\varphi_B}}{\sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\varepsilon}_a|}}} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}} +$$

$$+ \mathbf{1}_y \frac{|A_1| e^{j\varphi_A}}{\sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\varepsilon}_a|}}} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}}. \qquad (7.87)$$

Al multiplicar las amplitudes complejas por $e^{j\omega t}$ y tomar las partes reales, obtenemos los valores instantáneos de los vectores del campo:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{1}_x |A_1| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_A) +$$

$$+ \mathbf{1}_y |B_1| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_B), \qquad (7.88)$$

$$\mathbf{H}(t) = -\mathbf{1}_x \frac{|B_1|}{\sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\varepsilon}_a|}}} e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z + \varphi_B + \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) +$$

$$+ \mathbf{1}_y \frac{|A_1|}{\sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\varepsilon}_a|}}} e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z + \varphi_A + \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right). \qquad (7.89)$$

Para determinar la ortogonalidad de los vectores $\mathbf{E}(t)$ y $\mathbf{H}(t)$ es suficiente escribir su producto escalar. Si el producto escalar es igual a cero, los vectores son ortogonales:

$$\mathbf{E}(t)\,\mathbf{H}(t) = -\frac{|A_1|\,|B_1|}{\sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\varepsilon}_a|}}} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_A) \times$$

$$\times \cos\left(\omega t - \beta z + \varphi_B + \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) + \frac{|A_1|\,|B_1|}{\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_a}{\tilde{\varepsilon}_a}}} e^{-2\alpha z} \times$$

$$\times \cos(\omega t - \beta z + \varphi_B) \cos\left(\omega t - \beta z + \varphi_A \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right). \qquad (7\ 90)$$

Puesto que $\cos\psi_1 \cos\psi_2 = \frac{1}{2}\{\cos(\Psi_1 - \Psi_2) + \cos(\Psi_1 + \Psi_2)\}$, resulta

$$\mathbf{E}(t)\,\mathbf{H}(t) = \frac{|A_1|\,|B_1|}{2\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_a}{\tilde{\varepsilon}_a}}} e^{-2\alpha z}\left\{-\cos\left(\varphi_A - \varphi_B - \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) - \right.$$

$$-\cos\left(2\omega t - 2\beta z + \varphi_A + \varphi_B + \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) - \cos\left(\varphi_B - \varphi_A\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) + \cos\left(2\omega t - 2\beta z + \varphi_B - \varphi_A + \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right)\right\},$$

$$\mathbf{E}(t)\,\mathbf{H}(t) = \frac{|A_1|\,|B_1|}{2\sqrt{\frac{|\tilde{\mu}_a|}{|\tilde{\varepsilon}_a|}}} e^{-2\alpha z}\left\{-\cos\left(\varphi_A - \varphi_B - \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \cos\left(\varphi_B - \varphi_A - \frac{\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon}{2}\right)\right\}. \qquad (7.91)$$

Dado que el coseno es una función par, de la ecuación (7.91) se desprende que el producto escalar es igual a cero y los valores instantáneos de los vectores $\mathbf{E}(t)$ y $\mathbf{H}(t)$ son ortogonales en los siguientes casos:

a) el medio es sin pérdidas: $\alpha_\mu = \alpha_\varepsilon = 0$;
b) las pérdidas son tales que $\alpha_\mu = \alpha_\varepsilon$ y $(\alpha_\mu - \alpha_\varepsilon)/2 = 0$;
c) las fases de las amplitudes son iguales: $\varphi_A = \varphi_B$.

CAPÍTULO 8

Condiciones límites para los vectores del campo

§ 8.1. Planteamiento del problema

En la resolución de los problemas prácticos es necesario cada vez afrontar la situación en que los parámetros del medio varían a saltos pasando de unos valores a otros. Una situación semejante surge al introducir en un medio homogéneo superficies dieléctricas, semiconductoras y metálicas, al transmitir ondas electromagnéticas por medio de guías de ondas, así como al solucionar problemas de radiolocalización y en muchos otros casos. Cabe esperar que la variación a saltos de los parámetros de medio puede acarrear un cambio idén

tico de los vectores del campo, lo que a su vez provocará la aparición de derivadas infinitamente grandes de estos vectores respecto a las coordenadas. En tales circunstancias los valores de los rotores de los vectores del campo que forman parte de las ecuaciones de Maxwell llegarán a ser infinitamente grandes y la aplicación directa de estas ecuaciones para resolver los problemas electrodinámicos se verá dificultada.

Evidentemente, es necesario conocer las leyes del comportamiento de los vectores del campo en la superficie de separación de dos medios o sea, las llamadas condiciones límites. Estas leyes se deducen de las ecuaciones de electrodinámica empleando el siguiente procedimiento. Se supone que la superficie de separación de dos medios posee cierto espesor pequeño dentro de cuyos límites tiene lugar un paso no a saltos sino ininterrumpido desde los parámetros del primer medio hacia los parametros del segundo medio. Un cambio continuo de la misma índole se opera con los vectores del campo. Con estas suposiciones se efectúa el análisis del proceso, aprovechando las ecuaciones existentes de electrodinámica. Seguidamente, llevando el espesor de la superficie de separación a cero, se realiza el paso límite y se obtienen las condiciones límites que determinan la conducta de los vectores del campo en la superficie de separación.

Debido a que cualquier vector del campo orientado arbitrariamente respecto a la superficie de separación puede presentarse en forma de suma de componentes: una normal a la superficie de separación y otra tangencial a ésta el análisis se realiza separadamente para las componentes normales y tangenciales del campo, lo que facilita esencialmente el problema.

§ 8.2. Condiciones límites para las componentes normales de los vectores del campo

Consideremos la superficie de separación de dos medios, siendo que el primero de éstos posee los parámetros $\tilde{\mu}_{a1}$, $\tilde{\varepsilon}_{a1}$, y el segundo, $\tilde{\mu}_{a2}$, $\tilde{\varepsilon}_{a2}$. Supongamos que el espesor de la superficie de separación es igual a Δd (fig. 8.1).

Aislemos de dicha superficie de separación un pequeño volumen cuya altura es Δd y cuyas áreas de las bases superior e inferior son ΔS. Sea 1_{n1} la normal unitaria a la base superior, y 1_{n2}, la normal unitaria a la base inferior. Asentemos nuestros razonamientos en la relación integral (1.165).

Elijamos como superficie S_1 una superficie cerrada que acota el volumen situado dentro del límite. Supongamos que en el primer medio el valor del vector $\dot{E}$ es igual a $\dot{E}_1$, mientras que en el segundo medio es igual a $\dot{E}_2$. En virtud de lo pequeñas que son las áreas de las bases ΔS, admitamos que dentro de los límites de estas bases los vectores $\dot{E}_1$ y $\dot{E}_2$ pueden considerarse invariables.

En estas condiciones la expresión (1.165) puede escribirse en la forma

$$\oint_{S_1} \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}}\, d\mathbf{S} = (\tilde{\varepsilon}_{a1}\dot{\mathbf{E}}_1 \mathbf{1}_{n1} + \tilde{\varepsilon}_{a2}\dot{\mathbf{E}}_2 \mathbf{1}_{n2})\,\Delta S + \Psi_{\text{ES}} = \dot{Q}_{\text{el}},$$

donde Ψ_{ES} es la parte del flujo que interseca la zona lateral de la superficie S_1.

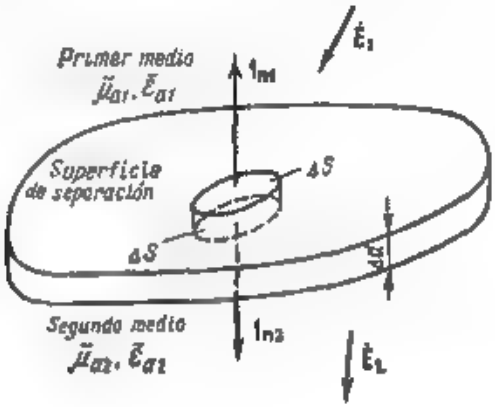

FIG. 8.1

Cuando $\Delta d \to 0$, $\Psi_{\text{ES}} \to 0$, y para la superficie de separación infinitamente delgada es válida la correlación

$$\oint_{S_1} \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}}\, d\mathbf{S} = (\tilde{\varepsilon}_{a1}\dot{\mathbf{E}}_1 \mathbf{1}_{n1} + \tilde{\varepsilon}_{a2}\dot{\mathbf{E}}_2 \mathbf{1}_{n2})\,\Delta S = \dot{Q}_{\text{el}}.$$

Para la dirección de los vectores $\dot{\mathbf{E}}_1$ y $\dot{\mathbf{E}}_2$ elegida en la fig. 8.1 se puede escribir

$$\dot{\mathbf{E}}_1 \mathbf{1}_{n1} = -\dot{E}_{1n}, \quad \dot{\mathbf{E}}_2 \mathbf{1}_{n2} = \dot{E}_{2n}.$$

Entonces

$$\oint_{S_1} \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}}\, d\mathbf{S} = (-\tilde{\varepsilon}_{a1}\dot{E}_{1n} + \tilde{\varepsilon}_{a2}\dot{E}_{2n})\,\Delta S = \dot{Q}_{\text{el}},$$

de donde

$$-\tilde{\varepsilon}_{a1}\dot{E}_{1n} + \tilde{\varepsilon}_{a2}\dot{E}_{2n} = \dot{Q}_{\text{el}}/\Delta S = \dot{\sigma}_{\text{el}}. \tag{8.1}$$

Es fácil determinar las unidades de medida de $\dot{\sigma}_{\text{el}}$:

$$\dot{\sigma}_{\text{el}} \to \text{C/m}^2. \tag{8.2}$$

La magnitud $\dot{\sigma}_{\text{el}}$ lleva el nombre de *amplitud compleja de la densidad superficial de las cargas eléctricas extrínsecas.*

La expresión (8.1) es condición límite para los vectores $\dot{\mathbf{E}}_{1n}$ y $\dot{\mathbf{E}}_{2n}$.

Si en la superficie de separación no existe la densidad superficial de las cargas eléctricas ($\dot{\sigma}_{el} = 0$), entonces

$$\tilde{\varepsilon}_{a2}\dot{E}_{2n} = \tilde{\varepsilon}_{a1}\dot{E}_{1n}, \tag{8.3}$$

o bien

$$\dot{E}_{2n}/\dot{E}_{1n} = \tilde{\varepsilon}_{a1}/\tilde{\varepsilon}_{a2}. \tag{8.4}$$

En el caso general las componentes normales de los vectores $\dot{\mathbf{E}}_1$ y $\dot{\mathbf{E}}_2$, al atravesar la superficie de separación, experimentan cambios a saltos.

Al aplicar la propiedad de dualidad permutativa de las ecuaciones electrodinámicas en la expresión (8.1):

$$\dot{E}_{1n} \to \dot{H}_{1n},\ \dot{E}_{2n} \to \dot{H}_{2n},\ \tilde{\varepsilon}_{a1} \to -\tilde{\mu}_{a1},$$
$$\tilde{\varepsilon}_{a2} \to -\tilde{\mu}_{a2},\ \dot{Q}_{el} \to -\dot{Q}_m,\ \dot{\sigma}_{el} \to -\dot{\sigma}_m,$$

obtenemos las siguientes condiciones límites para las componentes normales de los vectores $\dot{\mathbf{H}}_1$ y $\dot{\mathbf{H}}_2$:

$$-\tilde{\mu}_{a1}\dot{H}_{1n} + \tilde{\mu}_{a2}\dot{H}_{2n} = \dot{Q}_m/\Delta S = \dot{\sigma}_m. \tag{8.5}$$

Determinemos la unidad de medida de $\dot{\sigma}_m$:

$$\dot{\sigma}_m \to \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}. \tag{8.6}$$

La magnitud $\dot{\sigma}_m$ se denomina *amplitud compleja de la densidad superficial de las cargas magnéticas extrínsecas.*

Si en la superficie de separación falta la densidad superficial de las cargas magnéticas ($\dot{\sigma}_m = 0$), la expresión (8.5) se escribe en la forma

$$\dot{H}_{2n}/\dot{H}_{1n} = \tilde{\mu}_{a1}/\tilde{\mu}_{a2}. \tag{8.7}$$

En el caso general las componentes normales de los vectores $\dot{H}_1$ y $\dot{H}_2$, al atravesar la superficie de separación, experimentan cambios a saltos.

§ 8.3. Condiciones límites para las componentes tangenciales de los vectores del campo

Consideremos la parte lateral de una superficie de separación cuyo espesor es Δd (fig. 8.2). Como base de los razonamientos elijamos la relación integral (1.160).

Tomemos en calidad de contorno de recorrido (contorno de circulación) l_1 el contorno elemental de lados Δd y Δh. Introduzcamos vectores unitarios $\mathbf{1}_{\tau 1}$ y $\mathbf{1}_{\tau 2}$ tangenciales a la superficie de separación, y un vector unitario $\mathbf{1}_n$ normal al plano del contorno de recorrido.

Además, introduzcamos el vector unitario 1_{n1} dirigido en el sentido del primer medio y normal a la superficie de separación. Debido a la pequeñez del contorno de recorrido supongamos que los vectores $\dot{\mathbf{H}}_1$ y $\dot{\mathbf{H}}_2$ son invariables dentro de los límites de los lados Δh del con-

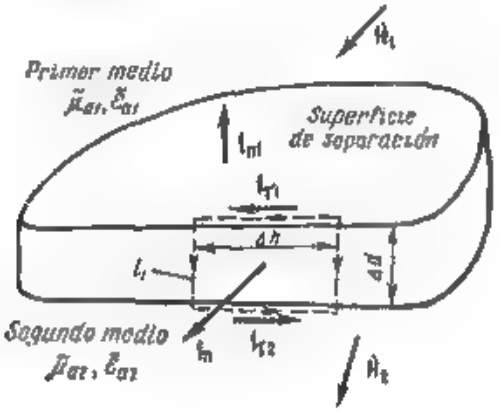

FIG. 8.2

torno de recorrido. Escribamos la expresión (1.160) teniendo en cuenta las suposiciones admitidas:

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}}\, dl = (\dot{\mathbf{H}}_1 1_{\tau 1} + \dot{\mathbf{H}}_2 1_{\tau 2})\, \Delta h + \Psi_{\Delta d} = (\dot{\mathbf{J}}_{e1} + j\omega \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}})\, \Delta\, d\Delta h 1_n,$$

donde $\Psi_{\Delta d}$ es la parte de la integral al recorrer los lados Δd del contorno de circulación.

Para $\Delta d \to 0$ también $\Psi_{\Delta d} \to 0$, y la integral

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}}\, dl = (\dot{\mathbf{H}}_1 1_{\tau 1} + \dot{\mathbf{H}}_2 1_{\tau 2})\, \Delta h = \lim_{\Delta d \to 0} (\dot{\mathbf{J}}_{e1} + j\omega \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}})\, \Delta\, d\Delta h 1_n.$$

Para las direcciones de los vectores del campo admitidos en la fig. 8.2 pueden escribirse las igualdades

$$\dot{\mathbf{H}}_1 1_{\tau 1} = \dot{H}_{1\tau}, \quad \dot{\mathbf{H}}_2 1_{\tau 2} = -\dot{H}_{2\tau},$$

donde $\dot{H}_{1\tau}$, $\dot{H}_{2\tau}$ son componentes tangenciales de los vectores $\dot{\mathbf{H}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_2$.

Al calcular la expresión para $\tilde{\varepsilon}_a$ mediante la fórmula (1.159), obtenemos

$$\dot{H}_{1\tau} - \dot{H}_{2\tau} = \lim_{\Delta d \to 0} (\dot{\mathbf{J}}_{e1} + j\omega \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}} + \gamma_{e1} \dot{\mathbf{E}})\, \Delta\, d 1_n. \qquad (8.8)$$

La función $j\omega\varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}$ siempre es finita en virtud del carácter limitado de la frecuencia $\widetilde{\omega}$ y del vector $\dot{\mathbf{E}}$, por eso

$$\lim_{\Delta d \to 0} (j\omega \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}})\, \Delta\, d 1_n = 0.$$

Para valores finitos del vector de densidad de la corriente $\dot{J}_{e}$ y la conductividad γ_{e}, lo que corresponde a todos los medios posibles, excepto un medio metálico ideal, es justa la relación

$$\lim_{\Delta d \to 0} (\dot{J}_{e} + \gamma_{e}\dot{E})\,\Delta d l_{n} = 0,$$

y las condiciones límites para las componentes tangenciales de los vectores $\dot{H}_1$ y $\dot{H}_2$ se escriben en la forma

$$\dot{H}_{1\tau} = \dot{H}_{2\tau}. \tag{8.9}$$

Las componentes tangenciales de los vectores $\dot{H}_1$ y $\dot{H}_2$ al pasar a través de la superficie de separación no experimentan cambios. En un medio de conducción ideal, debido al efecto pelicular (véase el § 7.5) las densidades de la corriente eléctrica extrínseca $\dot{J}_{e}$ y de la corriente de conducción $\gamma_{e}\dot{E}$ aumentan hasta el infinito:

$$\lim_{\Delta d \to 0} (\dot{J}_{e} + \gamma_{e}\dot{E})\,\Delta d l_{n} = \dot{v}_{e} + \dot{v}_{e.c} = \dot{v}_{e\Sigma} \tag{8.10}$$

Aquí $\dot{v}_{e}$ es la amplitud compleja de la densidad de la corriente eléctrica extrínseca superficial; $\dot{v}_{e.c}$, la amplitud compleja de la densidad de la corriente eléctrica superficial de conducción, y $\dot{v}_{e\Sigma}$, la amplitud compleja de la densidad de la corriente eléctrica superficial total.

Es fácil establecer las unidades para medir las densidades de las corrientes superficiales:

$$\dot{v}_{e}, \dot{v}_{e.c}, \dot{v}_{e\Sigma} \to \frac{\text{A}\cdot\text{m}}{\text{m}^2} = \frac{\text{A}}{\text{m}}. \tag{8.11}$$

Para un medio metálico ideal, como se ha demostrado en el § 7.5, el campo en el metal es igual a cero, lo que corresponde a la expresión

$$\dot{H}_{2\tau} = 0. \tag{8.12}$$

Las condiciones límites para las componentes tangenciales (8.8) en el caso de que el segundo medio es un metal ideal se esriben de la siguiente manera:

$$\dot{H}_{1\tau} = \dot{v}_{e} + \dot{v}_{e.c} = \dot{v}_{e\Sigma}. \tag{8.13}$$

Si no existe la corriente eléctrica extrínseca, será válida la correlación

$$H_{1\tau} = \dot{v}_{e.c}. \tag{8.14}$$

Teniendo en cuenta el hecho de que la corriente y el campo engendrado por ésta están enlazados por la regla del tornillo dextrógiro,

la expresión (8.13) puede escribirse en la forma vectorial:

$$\dot{\mathbf{H}}_{1\tau} = [(\dot{\mathbf{v}}_{e1} + \dot{\mathbf{v}}_{e1\,c})\,1_{n1}] = [\dot{\mathbf{v}}_{e1\,\Sigma}1_{n1}] \tag{8.15}$$

y sin corriente extrínseca

$$\dot{\mathbf{H}}_{1\tau} = [\dot{\mathbf{v}}_{e1.c}1_{n1}]. \tag{8.16}$$

La utilización de las permutaciones del tipo

$$\dot{\mathbf{H}}_{1\tau} \to \dot{\mathbf{E}}_{1\tau},\ \dot{\mathbf{H}}_{2\tau} \to \dot{\mathbf{E}}_{2\tau},\ \dot{\mathbf{v}}_{e1} \to -\dot{\mathbf{v}}_{m},$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{e1.c} \to -\dot{\mathbf{v}}_{m\,c},\ \dot{\mathbf{v}}_{e1\,\Sigma} \to -\dot{\mathbf{v}}_{m\,\Sigma},$$

donde

$$\dot{\mathbf{v}}_{m} = \lim_{\Delta d \to 0} (\dot{\mathbf{J}}_{m}\Delta\, d1_{n}), \tag{8.17}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{m.c} = \lim_{\Delta d \to 0} (\gamma_{m}\mathbf{H}\Delta\, d1_{n}), \tag{8.18}$$

ofrece las condiciones límites para las componentes tangenciales de los vectores del campo eléctrico $\dot{\mathbf{E}}_1$ y $\dot{\mathbf{E}}_2$

Para todos los medios, a excepción de los medios imaginarios con permeancia infinita γ_m y el caso en que se introduce en el cálculo la densidad de la corriente extrínseca $\dot{\mathbf{v}}_m$, son válidas las condiciones límites obtenidas como resultado de las permutaciones del tipo (8.9):

$$\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau}. \tag{8.19}$$

Las componentes tangenciales del campo eléctrico, al pasar a través de la superficie de separación, no experimentan cambios.

Cuando en el cálculo se introduce la corriente magnética extrínseca y un medio imaginario con permeancia infinita γ_m (lo que es una admisión artificial cómodo para aplicar en su totalidad el principio de dualidad de permutación), como resultado de permutaciones del tipo (8.13) podemos escribir la relación

$$\dot{E}_{1\tau} = -\dot{\mathbf{v}}_{m} - \dot{\mathbf{v}}_{m\,c} = -\dot{\mathbf{v}}_{m\Sigma}. \tag{8.20}$$

Si, como ocurre con frecuencia, no se ha introducido en el cálculo la corriente magnética extrínseca y el medio posee permeancia finita y conductividad eléctrica infinitamente grande ($\gamma_{e1} \to \infty$)

$$\dot{E}_{1\tau} = 0, \tag{8.21}$$

puesto que para $\gamma_{e1} \to \infty$ $E_{2\tau} = 0$ y en el segundo medio no hay campo.

Sin corriente magnética extrínseca no puede haber componentes tangenciales del campo eléctrico junto a la superficie del metal ideal.

De este modo, si el segundo medio es un metal ideal, junto a la superficie de éste sólo existen la componente normal del campo $\dot{E}$ y la componente tangencial del campo $\dot{H}$. El vector de Poynting (4.28) está orientado en este caso a lo largo de la superficie de separación entre el primer medio y el medio metálico ideal.

Análogamente a la relación (8.14), las condiciones límites para el metal (8.18), al introducir en el cálculo unas corrientes magnéticas extrínsecas y un medio imaginario con permeancia infinita, se pueden escribir en forma vectorial:

$$\dot{E}_{1\tau} = [1_{n1}(\dot{v}_m + \dot{v}_{m\,c})] = [1_{n1}\dot{v}_{m\,\tau}]. \qquad (8.22)$$

CAPITULO 9

Incidencia de una onda plana sobre la superficie de separación plana de dos medios como ejemplo de aplicación de las condiciones límites a la solución de un problema de contorno elemental

§ 9.1. Planteamiento del problema

El espacio que consta de dos medios de parámetros distintos separados por una superficie divisoria plana es un medio no homogéneo elemental con variación a saltos de las propiedades. Los problemas electrodinámicos para tales medios se resuelven haciendo uso de las condiciones límites deducidas en el cap. 8.

Los problemas de este tipo se denominan problemas de contorno o problemas del valor límite. El problema de contorno más simple analizado en este capítulo es el de incidencia de una onda plana en la superficie de separación plana de dos medios.

§ 9.2. Deducción de las ecuaciones fundamentales. Leyes de Snell. Coeficientes de reflexión y de refracción

Sea que la onda plana parte del primer medio con los parámetros $\tilde{\varepsilon}_{a1}$, $\tilde{\mu}_{a1}$ e incide sobre la superficie de separación plana con el segundo medio que posee los parámetros $\tilde{\varepsilon}_{a2}$, $\tilde{\mu}_{a2}$. Se llama plano

de incidencia un plano que contiene la normal a la superficie de separación y el vector de Poynting de la onda incidente. El ángulo de incidencia φ es un ángulo entre el vector de Poynting $\dot{\Pi}$ de la onda incidente y la normal a la superficie de separación.

Cuando se examina la onda plana incidente sobre la superficie de separación plana es conveniente valerse del sistema de coordenadas cartesianas (fig. 9.1).

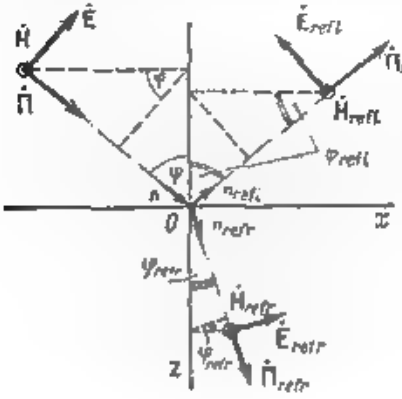

FIG. 9.1

Se llama ángulo de reflexión φ_{refl} el ángulo formado por el vector de Poynting $\dot{\Pi}_{refl}$ de la onda reflejada y la normal a la superficie de separación, y el ángulo de refracción φ_{refr} es el ángulo entre el vector de Poynting $\dot{\Pi}_{refr}$ de la onda refractada y la normal a la superficie de separación.

Los vectores $\dot{E}$ y $\dot{H}$ se encuentran en el plano perpendicular al vector de Poynting. La orientación en este plano del vector $\dot{E}$ y del vector $\dot{H}$, ortogonal al primero, puede ser arbitraria. El vector $\dot{E}$ de la onda incidente siempre puede representarse como suma de dos componentes: la componente que se encuentra en el plano de incidencia y la perpendicular a éste. Al analizar el problema electrodinámico para los dos casos indicados es posible, por medio de la superposición de los resultados, obtener la solución para cualquier disposición prefijada del vector $\dot{E}$ (para cualquier polarización) y, en correspondencia, para cualquier disposición del vector $\dot{H}$ ortogonal al vector $\dot{E}$.

Consideremos el primer caso en que el vector $\dot{E}$ está situado en el plano de incidencia xz (fig. 9.1). El vector $\dot{H}$ está orientado a lo largo del eje y. Designemos los ejes de propagación de las ondas incidente, reflejada y refractada por n, n_{refl} y n_{refr}, respectivamente. Para el análisis es racional elegir el vector del campo que contiene menos componentes en el sistema de coordenadas dado. En el primer caso este vector es $\dot{H}$ orientado a lo largo del eje y. En el caso de una onda incidente que se propaga a lo largo del eje n, de acuerdo con las fórmulas (7.9), (7.16) y (7.17) para el vector $\dot{H}$ es justa la expresión

$$\dot{H}_y = C_1 e^{-jv_1 n}. \qquad (9.1)$$

Considerando que, en virtud de la homogeneidad de cada uno de los dos medios, el vector $\dot{H}$ en las ondas reflejada y refractada no

cambia la orientación a lo largo del eje y, y solamente puede variar la amplitud y la fase, podemos escribir las siguientes relaciones para estos vectores:

$$\dot{H}_{y\,\mathrm{refl}} = C_1 \dot{M}_{H_y}^{\mathrm{refl}} e^{-j\gamma_1 n_{\mathrm{refl}}}, \tag{9.2}$$

$$\dot{H}_{y\,\mathrm{refr}} = C_1 \dot{M}_{H_y}^{\mathrm{refr}} e^{-j\gamma_2 n_{\mathrm{refr}}}. \tag{9.3}$$

De conformidad con la fórmula (7.10)

$$\gamma_1 = \omega \sqrt{\dot{\mu}_{a1}\dot{\varepsilon}_{a1}}, \tag{9.4}$$

$$\gamma_2 = \omega \sqrt{\dot{\mu}_{a2}\dot{\varepsilon}_{a2}}. \tag{9.5}$$

En el caso general los coeficientes $\dot{M}_{H_y}^{\mathrm{refl}}$ y $\dot{M}_{H_y}^{\mathrm{refr}}$ son coeficientes complejos de reflexión y de refracción de las componentes del campo $\dot{H}_y$ para el primer caso de orientación del vector $\dot{\mathbf{E}}$ que se encuentra en el plano de incidencia.

La misión del análisis del proceso electrodinámico es determinar los ángulos de reflexión φ_{refl} y de refracción φ_{refr}, siendo prefijado el ángulo de incidencia φ, así como hallar los coficientes de reflexión $\dot{M}_{H_y}^{\mathrm{refl}}$ y de refracción $\dot{M}_{H_y}^{\mathrm{refr}}$.

Para solucionar el problema planteado es necesario, en primer término, pasar de los ejes n, n_{refl} y n_{refr}, para los cuales están escritas las expresiones (9.1), (9.2) y (9.3), al sistema de coordenadas x, y, z. Los puntos dados en el sistema de coordenadas n, n_{refl}, n_{refr} pueden representarse en el sistema de coordenadas cartesianas mediante las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} n &= z\cos\varphi - x\,\mathrm{sen}\,\varphi, \\ n_{\mathrm{refl}} &= -z\cos\varphi_{\mathrm{refl}} + x\,\mathrm{sen}\,\varphi_{\mathrm{refl}} \\ n_{\mathrm{refr}} &= z\cos\varphi_{\mathrm{refr}} + x\,\mathrm{sen}\,\varphi_{\mathrm{refr}}. \end{aligned}\right\} \tag{9.6}$$

Al escribir estas fórmulas se ha tomado en consideración que el frente de la onda plana en las ondas incidente y refractada se propaga hacia el lado de los valores positivos de los ejes x y z, mientras que, cuando se trata de la onda reflejada, este frente se propaga hacia el lado de los valores positivos del eje x y los valores negativos del eje z, hecho que explica el signo «menos» ante el término $z\cos\varphi_{\mathrm{refl}}$ en la segunda fórmula (9.6). Sustituyendo las expresiones (9.6) en las fórmulas (9.1), (9.2) y (9.3), obtenemos

$$\left.\begin{aligned} \dot{H}_y &= C_1 e^{-j\gamma_1(z\cos\varphi + x\,\mathrm{sen}\,\varphi)}, \\ \dot{H}_{y\,\mathrm{refl}} &= C_1 \dot{M}_{H_y}^{\mathrm{refl}} e^{-j\gamma_1(-z\cos\varphi_{\mathrm{refl}} + x\,\mathrm{sen}\,\varphi_{\mathrm{refl}})}, \\ \dot{H}_{y\,\mathrm{refr}} &= C_1 \dot{M}_{H_y}^{\mathrm{refr}} e^{-j\gamma_2(z\cos\varphi_{\mathrm{refr}} + x\,\mathrm{sen}\,\varphi_{\mathrm{refr}})}. \end{aligned}\right\} \tag{9.7}$$

Para determinar los ángulos φ_{refl}, φ_{refr} y los coeficientes $\dot{M}_{H_y}^{refl}$ y $\dot{M}_{H_y}^{refr}$ conviene hacer uso de las condiciones límites (8.9) que suponen la igualdad de las componentes tangenciales del campo magnético total en el primero y el segundo medios. El campo magnético total del primer medio se forma a partir de los campos de la onda incidente y reflejada. En el segundo medio existe tan sólo el campo de la onda refractada. En el caso considerado los campos $\dot{H}$, $\dot{H}_{refl}$ y $\dot{H}_{refr}$ tienen igual orientación y son tangenciales con respecto a la superficie de separación. A raíz de ello las condiciones límites (8.9) se escriben en la forma

$$\dot{H}_y + \dot{H}_{y\,refl} = \dot{H}_{y\,refr} \quad (\text{para } z = 0) \tag{9.8}$$

o bien

$$C_1 e^{-j\gamma_1 x \operatorname{sen}\varphi} + C_1 \dot{M}_{H_y}^{refl} e^{-j\gamma_1 x \operatorname{sen}\varphi_{refl}} = C_1 \dot{M}_{H_y}^{refr} e^{-j\gamma_2 x \operatorname{sen}\varphi_{refr}}.$$

La igualdad es posible si se observan las condiciones

$$\operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen}\varphi_{refl},\ \gamma_1 \operatorname{sen}\varphi = \gamma_2 \operatorname{sen}\varphi_{refr},\ 1 + \dot{M}_{H_y}^{refl} = \dot{M}_{H_y}^{refr}. \tag{9.9}$$

De las primeras dos igualdades (9.9) derivan las llamadas leyes de Snell:

$$\varphi = \varphi_{refl}, \tag{9.10}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi_{refr}}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \sqrt{\frac{\dot{\mu}_{a1}\dot{\varepsilon}_{a1}}{\dot{\mu}_{a2}\dot{\varepsilon}_{a2}}}. \tag{9.11}$$

Para un medio con pérdidas $\operatorname{sen}\varphi_{refr}$ es una magnitud compleja

$$\operatorname{sen}\varphi_{refr} = a_1 - jb_1. \tag{9.12}$$

Si en este caso el primer medio no tiene pérdidas y γ_1 es una magnitud real, entonces, en virtud de la igualdad $\gamma_1 \operatorname{sen}\varphi_{refl} = \gamma_2 \operatorname{sen}\varphi_{refr}$, el producto $\gamma_2 \operatorname{sen}\varphi_{refr}$ también es una magnitud real, y a lo largo del eje x tiene lugar el cambio de la fase de oscilaciones. Mientras tanto, la amortiguación de las oscilaciones a lo largo del eje x no existe.

A base de las expresiones (9.10) y (9.11) pueden determinarse los ángulos de reflexión y de refracción, y la última igualdad en la expresión (9.9) es la primera ecuación con dos coeficientes incógnitos $\dot{M}_{H_y}^{refl}$ y $\dot{M}_{H_y}^{refr}$. Con el objeto de determinar estos coeficientes es necesario introducir una segunda ecuación que puede ser obtenida a partir de las condiciones límites (8.19) En el caso analizado, la componente tangencial del campo eléctrico es la componente $\dot{E}_x$. Esta puede hallarse empleando la primera ecuación de Maxwell (2.12) la cual, en ausencia de las corrientes extrínsecas, se escribe en la

forma

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega\tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}}. \tag{9.13}$$

De esta ecuación se infiere que

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a} \left\{ 1_x \left(\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} \right) + 1_y \left(\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right) + 1_z \left(\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} \right) \right\}. \tag{9.14}$$

En nuestro caso las componentes del campo $\dot{H}_x = \dot{H}_z = 0$ y la derivada $\partial/\partial y = 0$.

Debido a ello la relación (9.14) puede escribirse de nuevo en la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{E}} = -1_x \frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} + 1_z \frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}. \tag{9.15}$$

En los campos de las ondas incidente, reflejada y refractada existen dos componentes del campo eléctrico:

$$\dot{E}_x = -\frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z}, \tag{9.16}$$

$$\dot{E}_z = \frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}. \tag{9.17}$$

Cuando se calculan las componentes $\dot{E}_x$ en las ondas incidente y reflejada conviene poner $\tilde{\varepsilon}_a = \tilde{\varepsilon}_{a1}$ y, respectivamente, $\dot{H}_y = \dot{H}_y$ y $\dot{H}_y = \dot{H}_{y\,\mathrm{refl}}$.

Al determinar $\dot{E}$ en la onda refractada se supone que $\tilde{\varepsilon}_a = \tilde{\varepsilon}_{a2}$ y $H_y = H_{y\,\mathrm{refr}}$.

De acuerdo con ello obtenemos

$$\dot{E}_x = -\frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_{a1}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \{C_1 e^{-j\gamma_1(z\cos\varphi + x\operatorname{sen}\varphi)}\} =$$

$$= \frac{\gamma_1 \cos\varphi}{\omega\tilde{\varepsilon}_{a1}} C_1 e^{-j\gamma_1(z\cos\varphi + x\operatorname{sen}\varphi)}.$$

Al sustituir el valor de γ_1 de la fórmula (9.4), hallamos

$$\dot{E}_x = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a1}}} \cos\varphi C_1 e^{-j\gamma_1(z\cos\varphi + x\operatorname{sen}\varphi)}. \tag{9.18}$$

De modo análogo, considerando que $\varphi_{refl} = \varphi$, se puede escribir

$$\dot{E}_{x\,refl} = \frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_{a1}} \frac{\partial}{\partial z} \{C_1 \dot{M}_{H_y}^{refl} e^{-j\gamma_{a1}(-z\cos\varphi + x\,\mathrm{sen}\,\varphi)}\} =$$

$$= -\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a1}}} \cos\varphi \dot{M}_{H_y}^{refl} C_1 e^{-j\gamma_{a1}(-z\cos\varphi + x\,\mathrm{sen}\,\varphi)}, \qquad (9.19)$$

$$\dot{E}_{x\,refr} = -\frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_{a2}} \frac{\partial}{\partial z} \{C_1 \dot{M}_{H_y}^{refr} e^{-j\gamma_{a2}(z\cos\varphi_{refr} + x\,\mathrm{sen}\,\varphi_{refr})}\} =$$

$$= \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}}{\tilde{\varepsilon}_{a2}}} \cos\varphi_{refr} \dot{M}_{H_y}^{refr} C_1 e^{-j\gamma_{a2}(z\cos\varphi_{refr} + x\,\mathrm{sen}\,\varphi_{refr})}.$$

Las condiciones límites (8.17) se escriben análogamente a las condiciones (9.8):

$$\dot{E}_x + \dot{E}_{x_{refl}} = \dot{E}_{x\,refr}, \qquad (9.21)$$

$$\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a1}}} \cos\varphi C_1 e^{-j\gamma_{a1} x\,\mathrm{sen}\,\varphi} - \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a1}}} \cos\varphi \dot{M}_{H_y}^{refl} C_1 e^{-j\gamma_{a1} x\,\mathrm{sen}\,\varphi} =$$

$$= \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}}{\tilde{\varepsilon}_{a2}}} \cos\varphi_{refr} \dot{M}_{H_y}^{refr} C_1 e^{-j\gamma_{a2} x\,\mathrm{sen}\,\varphi_{refr}}.$$

Al dividir todos los términos de la ecuación por $\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a1}}} \times$ $\times \cos\varphi C_1$ y teniendo en cuenta la igualdad $e^{-j\gamma_{a1} x\,\mathrm{sen}\,\varphi} = e^{-j\gamma_{a2} x\,\mathrm{sen}\,\varphi_{refr}}$ obtenemos

$$1 - \dot{M}_{H_y}^{refl} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\varepsilon}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a2}\tilde{\mu}_{a1}}} \cdot \frac{\cos\varphi_{refr}}{\cos\varphi} \dot{M}_{H_y}^{refr}. \qquad (9.22)$$

Esta relación conviene expresarla por medio de la ley de Snell (9.11) y de modo que en ésta se presente tan sólo el ángulo de incidencia:

$$\frac{\cos\varphi_{refr}}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\varphi_{refr}}}{\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\varphi}} = \frac{\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\varphi \frac{\tilde{\mu}_{a1}\tilde{\varepsilon}_{a1}}{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\varepsilon}_{a2}}}}{\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\varphi}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\varepsilon}_{a2}}} \cdot \frac{\sqrt{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\varepsilon}_{a2} - \mathrm{sen}^2\varphi \tilde{\mu}_{a1}\tilde{\varepsilon}_{a1}}}{\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\varphi}} \qquad (9.23)$$

La sustitución de la expresión obtenida en la ecuación (9.22) proporciona la relación

$$1 - \dot{M}_{H_y}^{refl} = \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a2}\tilde{\mu}_{a1}}} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\varepsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1}\tilde{\varepsilon}_{a1}\,\mathrm{sen}^2\varphi}{1 - \mathrm{sen}^2\varphi}} \dot{M}_{H_y}^{refr}. \qquad (9.24)$$

La segunda ecuación que relaciona los coeficientes $\dot{M}_{H_y}^{\text{refl}}$ y $\dot{M}_{H_y}^{\text{refr}}$ es la expresión (9.9). Al resolver estas ecuaciones conjuntamente es posible hallar las expresiones para los coeficientes de refracción $\dot{M}_{H_n}^{\text{refr}}$ y de reflexión $\dot{M}_{H_y}^{\text{refl}}$ de las componentes del campo $\dot{H}_y$:

$$\dot{M}_{H_y}^{\text{refr}} = \frac{2}{1+\sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a2}^2\tilde{\mu}_{a1}}}\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\varepsilon}_{a2}-\tilde{\mu}_{a1}\tilde{\varepsilon}_{a1}\operatorname{sen}^2\varphi}{1-\operatorname{sen}^2\varphi}}}, \qquad (9.25)$$

$$\dot{M}_{H_y}^{\text{refl}} = \frac{2}{1+\sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a2}^2\tilde{\mu}_{a1}}}\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\varepsilon}_{a2}-\tilde{\mu}_{a1}\tilde{\varepsilon}_{a1}\operatorname{sen}^2\varphi}{1-\operatorname{sen}^2\varphi}}} - 1, \qquad (9.26)$$

que son similares a las conocidas fórmulas de Fresnel de la óptica.

Se ha analizado el primer caso de polarización en que el vector $\dot{\mathbf{E}}$ se encuentra en el plano de incidencia, con la particularidad de que han sido obtenidas las expresiones para los coeficientes de refracción y de reflexión para la componente del campo $\dot{H}_y$.

Para la polarización de este tipo el vector $\dot{\mathbf{E}}$ posee una componente normal con respecto a la superficie de separación. Frecuentemente, semejante polarización se denomina vertical.

No es difícil obtener las expresiones de estos coeficientes para el segundo caso de polarización (horizontal) cuando el vector $\dot{\mathbf{E}}$ es perpendicular al plano de incidencia. En este caso el vector $\dot{\mathbf{H}}$ tiene dos componentes, $\dot{H}_x$ y $\dot{H}_z$, y el vector $\dot{\mathbf{E}}$, una sola componente, $\dot{E}_y$.

Con el fin de determinar los coeficientes de refracción $\dot{M}_{E_y}^{\text{refr}}$ y de reflexión $\dot{M}_{E_y}^{\text{refl}}$ se hace uso del principio de dualidad de permutación, sobre cuya base el campo $\dot{H}_y$ se sustituye por el campo $\dot{E}_y$, y en las expresiones (9.25) y (9.26) se realizan las permutaciones del tipo $\tilde{\mu}_{a1} \rightleftarrows -\tilde{\varepsilon}_{a1}$, $\tilde{\mu}_{a2} \rightleftarrows -\tilde{\varepsilon}_{a2}$. Las expresiones para $\dot{M}_{E_n}^{\text{refr}}$ y $\dot{M}_{E_y}^{\text{refl}}$ se escriben en la forma

$$\dot{M}_{E_n}^{\text{refr}} = \frac{2}{1+\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\mu}_{a2}^2\tilde{\varepsilon}_{a1}}}\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\varepsilon}_{a2}-\tilde{\mu}_{a1}\tilde{\varepsilon}_{a1}\operatorname{sen}^2\varphi}{1-\operatorname{sen}^2\varphi}}}, \qquad (9.27)$$

$$\dot{M}_{E_y}^{\text{refl}} = \frac{2}{1+\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\mu}_{a2}^2\tilde{\varepsilon}_{a1}}}\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\varepsilon}_{a2}-\tilde{\mu}_{a1}\tilde{\varepsilon}_{a1}\operatorname{sen}^2\varphi}{1-\operatorname{sen}^2\varphi}}} - 1. \qquad (9.28)$$

Es fácil hallar los coeficientes de refracción y de reflexión para otras componentes del campo. Hagamos la deducción tomando como

ejemplo la componente del campo eléctrico $\dot{E}_x$. El coeficiente de reflexión $\dot{M}_{E_x}^{refl}$ se determina por la relación $\dot{E}_{x\,refl}/E_x$, siendo $x = 0$.

De las expresiones (9.18) y (9.19) se infiere que

$$\left.\frac{\dot{E}_{x\,refl}}{\dot{E}_x}\right|_{x=0} = \dot{M}_{Ex}^{refl} = -\frac{\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a1}}}\cos\varphi \dot{M}_{H_y}^{refl} C_1 e^{-j\gamma_1 x \operatorname{sen}\varphi}}{\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a1}}}\cos\varphi C_1 e^{-j\gamma_1 x \operatorname{sen}\varphi}},$$

o bien

$$\dot{M}_{E_x}^{refl} = -\dot{M}_{H_y}^{refl}. \tag{9.29}$$

Análogamente, el coeficiente de refracción $\dot{M}_{E_x}^{refr}$ se determina por la relación $\left.\frac{E_{x\,refr}}{\dot{E}_x}\right|_{x=0} = M_{E_x}^{refr}$. Al sustituir los valores de las componentes del campo, de las fórmulas (9.18) y (9.20), obtenemos

$$\dot{M}_{E_x}^{refr} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\varepsilon}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a2}\tilde{\mu}_{a1}}} \cdot \frac{\cos\varphi_{refr}}{\cos\varphi} \dot{M}_{H_y}^{refr}.$$

Seguidamente, haciendo uso de las relaciones (9.23) y (9.25) obtenemos respectivamente:

$$\dot{M}_{E_x}^{refr} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\varepsilon}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a2}\tilde{\mu}_{a1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\varepsilon}_{a2}}{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\varepsilon}_{a2}}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\varepsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1}\tilde{\varepsilon}_{a1}\operatorname{sen}^2\varphi}{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\varepsilon}_{a2}}}}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}} \times$$

$$\times \dot{M}_{H_y}^{refr} = \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a2}\tilde{\mu}_{a1}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\varepsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1}\tilde{\varepsilon}_{a1}\operatorname{sen}^2\varphi}{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\varepsilon}_{a2}}}}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}} \dot{M}_{H_y}^{refr},$$

$$\dot{M}_{E_x}^{refr} = \frac{2}{\sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_{a2}\tilde{\mu}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a1}}} \cdot \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}}{\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\varepsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1}\tilde{\varepsilon}_{a1}\operatorname{sen}^2\varphi}{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\varepsilon}_{a2}}}} + 1}. \tag{9.30}$$

De una manera análoga pueden hallarse las expresiones de los coeficientes de reflexión y de refracción para otras componentes cuando la polarización del campo es distinta.

§ 9.3. Angulo de refracción total (ángulo de Brewster)

Examinemos la expresión (9.26) que determina el coeficiente de reflexión para la componente del campo $\dot{H}_y$ en el caso de polarización vertical.

El coeficiente $\dot{M}_{H_y}^{refl}$ es igual a cero si se observa la condición

$$\sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_{a1}}{\tilde{\varepsilon}_{a2}\tilde{\mu}_{a1}}} \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\varepsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1}\tilde{\varepsilon}_{a1}\operatorname{sen}^2\varphi}{1-\operatorname{sen}^2\varphi}} = 1. \tag{9.31}$$

Al suponer que los parámetros de dos medios se han prefijado, determinemos el valor del ángulo de incidencia $\varphi = \varphi_B$, que se denomina *ángulo de Brewster*, para el cual se cumple la igualdad (9.31). Esta igualdad puede escribirse en la forma

$$\tilde{\mu}_{a2}\tilde{\varepsilon}_{a1}\tilde{\varepsilon}_{a2} - \tilde{\mu}_{a1}\tilde{\varepsilon}_{a1}^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_B = \tilde{\varepsilon}_{a2}^2\tilde{\mu}_{a1} - \tilde{\varepsilon}_{a2}^2\tilde{\mu}_{a1} \operatorname{sen}^2 \varphi_B,$$

de donde

$$\operatorname{sen} \varphi_B = \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}_{a2}(\tilde{\varepsilon}_{a2}\tilde{\mu}_{a1} - \tilde{\varepsilon}_{a1}\tilde{\mu}_{a2})}{\tilde{\mu}_{a1}(\tilde{\varepsilon}_{a2}^2 - \tilde{\varepsilon}_{a1}^2)}}. \qquad (9.32)$$

La expresión (9.32) permite definir las condiciones para las cuales es posible la refracción total de la onda incidente cuando el coeficiente de reflexión es igual a cero. Empleando la fórmula (9.32) se puede analizar este proceso para cualesquiera medios. No obstante, para mayor sencillez y evidencia, nos limitemos a considerar medios carentes de pérdidas en los cuales la permitividad y la permeabilidad magnética son magnitudes reales. En este caso $\tilde{\varepsilon}_{a1} = \varepsilon_{a1}$, $\tilde{\mu}_{a1} = \mu_{a1}$, $\tilde{\varepsilon}_{a2} = \varepsilon_{a2}$, $\tilde{\mu}_{a2} = \mu_{a2}$.

Examinemos varios casos posibles:

$$1.\ \mu_{a1} = \mu_{a2},\ \varepsilon_{a2},\ \varepsilon_{a1} > 0,\ \operatorname{sen} \varphi_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2} + \varepsilon_{a1}}}. \qquad (9.33)$$

La existencia del ángulo de Brewster es físicamente posible. Para $\varepsilon_{a2} = \varepsilon_{a1}$ surge una contradicción aparente; en virtud de que los dos medios son idénticos, la reflexión falta cualquiera que sea el ángulo de incidencia, y el ángulo de Brewster obtiene un valor determinado: $\varphi_B = 45°$. Este hecho debe entenderse en términos de que a medida de que ε_{a2} se acerca a ε_{a1} el ángulo de Brewster tiende a 45°, en cambio, siendo iguales las permitividades y las permeabilidades magnéticas, el concepto de ángulo de Brewster pierde el sentido y las relaciones obtenidas pasan a ser inaplicables.

$$2.\ \mu_{a1} \neq \mu_{a2},\ \varepsilon_{a2} > \varepsilon_{a1},\ \operatorname{sen} \varphi_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_{a2}(\varepsilon_{a2}\mu_{a1} - \varepsilon_{a1}\mu_{a2})}{\mu_{a1}(\varepsilon_{a2}^2 - \varepsilon_{a1}^2)}}. \qquad (9.34)$$

En este caso el denominador es mayor de cero, y para la realización física de la refracción total es necesario que se observen dos condiciones:

$$\text{a)}\ \varepsilon_{a2}\mu_{a1} > \varepsilon_{a1}\mu_{a2},$$

$$\text{b)}\ \varepsilon_{a2}(\varepsilon_{a2}\mu_{a1} - \varepsilon_{a1}\mu_{a2}) < \mu_{a1}(\varepsilon_{a2}^2 - \varepsilon_{a1}^2). \qquad (9.35)$$

$$\text{3)}\ \mu_{a1} \neq \mu_{a2},\ \varepsilon_{a2} < \varepsilon_{a1}.$$

El denominador en la expresión (9.34) es negativo, y para realizar físicamente la refracción total es necesario observar dos condiciones:

$$\text{a)}\ \varepsilon_{a2}\mu_{a1} < \varepsilon_{a1}\mu_{a2},$$

$$\text{b)}\ |\varepsilon_{a2}(\varepsilon_{a2}\mu_{a1} - \varepsilon_{a1}\mu_{a2})| < |\mu_{a1}(\varepsilon_{a2}^2 - \varepsilon_{a1}^2)|. \qquad (9.36)$$

De manera análoga pueden obtenerse las condiciones de refracción total en el caso de polarización horizontal.

Del análisis expuesto se deriva que la refracción total no aparece en todos los medios. El valor del ángulo de Brewster φ_B resulta fijado. Si el ángulo de incidencia es menor o mayor que el ángulo de Brewster, la refracción total de la onda incidente desaparece. Lo expuesto se ilustra en el gráfico de la figura 9.2 construido para el módulo del coeficiente $\dot{M}_{H_y}^{refl}$ y del coeficiente $\dot{M}_{H_y}^{refr}$ en el caso de incidir la onda plana con el vector $\dot{E}$, que se encuentra en el plano de incidencia, del vacío al medio de permeabilidad magnética $\mu_2 = 1$ y de permitividad $\varepsilon_2 = 2{,}4$.

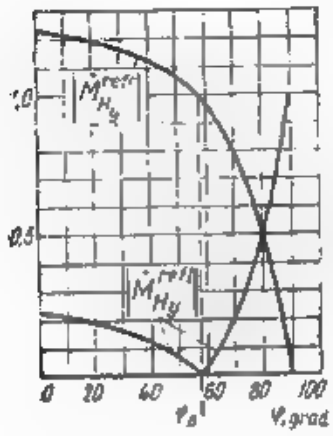

FIG. 9.2

§ 9.4. Reflexión total interna

Siendo conocidos los parámetros del primero y del segundo medios y prefijado el ángulo de incidencia, el ángulo de refracción se puede hallar recurriendo a la ley de Snell (9.11). Si consideramos, para simplificar, medios sin pérdidas, obtenemos

$$\operatorname{sen} \varphi_{refr} = \operatorname{sen} \varphi \sqrt{\frac{\mu_{a1}\varepsilon_{a1}}{\mu_{a2}\varepsilon_{a2}}}, \tag{9.37}$$

Cuando se observa la desigualdad

$$\mu_{a1}\varepsilon_{a1} > \mu_{a2}\varepsilon_{a2} \tag{9.38}$$

siempre es posible elegir un ángulo de incidencia φ para el cual

$$\operatorname{sen} \varphi_{refr} = 1 \quad y \quad \varphi_{refr} = \pi/2. \tag{9.39}$$

La expresión (9.37) permite determinar fácilmente el ángulo de incidencia para el cual se observan las condiciones (9.39). Este ángulo se denomina *ángulo de reflexión total interna* $\varphi_{refl.in}$:

$$\operatorname{sen} \varphi_{.in} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}\varepsilon_{a2}}{\mu_{a1}\varepsilon_{a1}}} \tag{9.40}$$

De la fórmula (9.37) se infiere que al observar la desigualdad (9.38) y aumentar el ángulo de incidencia φ hasta un valor para el cual

$$\varphi > \varphi_{.in} \tag{9.41}$$

aparece la desigualdad

$$\operatorname{sen} \varphi_{refr} > 1. \tag{9.42}$$

En este caso pierde claridad el comportamiento de la onda refractada y todo el proceso de reflexión y refracción. La tarea de este

párrafo es analizar los procesos de reflexión y refracción para los ángulos de incidencia iguales o mayores que el ángulo de reflexión total interna φ_{in}. Si el primero y el segundo medios carecen de pérdidas, entonces, basándose en la fórmula (9.37), tenemos que sen φ_{refr} es una magnitud real. Cuando los valores del ángulo φ_{refr} son reales, es imposible que se cumpla la desigualdad (9.42). Consideraremos este ángulo como una magnitud compleja:

$$\varphi_{refr} = \varphi_{refr1} + j\varphi_{refr2}. \quad (9.43)$$

Entonces

$$\text{sen } \varphi_{refr} = \text{sen } (\varphi_{refr1} + j\varphi_{refr2}) = \\ = \text{sen } \varphi_{refr1} \cos (j\varphi_{refr2}) + \\ + \cos \varphi_{refr1} \text{ sen } (j\varphi_{refr2}).$$

Son justas las siguientes igualdades:

$$\cos (j\varphi_{refr2}) = \text{ch } \varphi_{refr2},$$

$$\text{sen } (j\varphi_{refr2}) = j\text{sh } \varphi_{refr2}.$$

En este caso

$$\text{sen } \varphi_{refr} = \text{sen } \varphi_{refr1} \text{ ch } \varphi_{refr2} + \\ + j \cos \varphi_{refr1} \text{ sh } \varphi_{refr2}$$

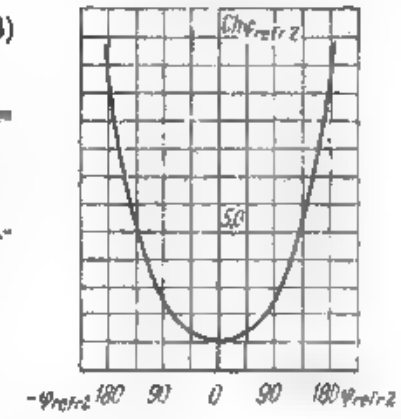

FIG. 9.3

Empero, como se ha señalado para el caso de los medios con parámetros reales, la magnitud sen φ_{refr} debe ser real, lo que puede alcanzarse siendo $\varphi_{refr1} = \pi/2$ Entonces

$$\cos \varphi_{refr1} = 0, \text{ sen } \varphi_{refr1} = 1, \varphi_{refr} = \pi/2 + j\varphi_{refr2}, \quad (9.44)$$

$$\text{sen } \varphi_{refr} = \text{sen } (\pi/2 + j\varphi_{refr2}) = \text{ch } \varphi_{refr2}. \quad (9.45)$$

En la fig. 9.3 se da el gráfico de ch φ_{refr2}. Como se deduce del mismo, ch φ_{refr2} puede tomar cualquier valor positivo empezando por la unidad. En consecuencia, si el ángulo de refracción se determina por la expresión (9 44), es posible que se observe la desigualdad (9.42). Es necesario aclarar a qué proceso físico corresponden las relaciones obtenidas. Al observarse la desigualdad (9.42)

$$\cos \varphi_{refr} = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \varphi_{refr}}$$

se transforma en una magnitud imaginaria, y esta expresión puede escribirse en la forma

$$\cos \varphi_{refr} = -j \sqrt{\text{sen}^2 \varphi_{refr} - 1}. \quad (9.46)$$

El sentido del signo «menos» ante el radical se explicará más adelante.

Al sustituir la expresión (9.46) en las fórmulas para el campo refractado (9.7), se obtiene la relación

$$\dot{H}_{y\,\mathrm{refr}} = C_1 \dot{M}^{\mathrm{refr}}_{H_y} e^{-j\gamma_2 (z\cos\varphi_{\mathrm{refr}} + x\,\mathrm{sen}\,\varphi_{\mathrm{refr}})} =$$
$$= C_1 \dot{M}^{\mathrm{refr}}_{H_y} e^{-j\gamma_2 \left(-j\sqrt{\mathrm{sen}^2\varphi_{\mathrm{refr}} - 1}\, z + \mathrm{sen}\,\varphi_{\mathrm{refr}} x\right)} =$$
$$= C_1 \dot{M}^{\mathrm{refr}}_{H_y} e^{-\gamma_2 \sqrt{\mathrm{sen}^2\varphi_{\mathrm{refr}} - 1}\, z} e^{-j\gamma_2 \mathrm{sen}\,\varphi_{\mathrm{refr}} x}, \qquad (9.47)$$

de la cual queda claro que en el caso de una reflexión total interna a lo largo del eje z aparece una amortiguación exponencial del campo. A lo largo del eje x tiene lugar la propagación de la onda. De la misma expresión se infiere que al elegir el signo «más» ante el radical en la fórmula (9.46) no se produce la amortiguación, sino el aumento del campo a lo largo del eje z, lo que es imposible a raíz de que el desplazamiento a lo largo del eje z equivale a alejarse de los manantiales del campo y no hay manantiales del campo complementarios.

De este modo, el fenómeno de reflexión total interna viene acompañado por el surgimiento de una onda peculiar que se propaga a lo largo de la superficie de separación en el segundo medio y que se amortigua conforme a la ley exponencial en dirección perpendicular a la superficie de separación. Parece como si la onda «se apretase» contra el primer medio que presenta mayor valor del producto $\mu_{a1}\varepsilon_{a1}$. Las ondas de este tipo llamadas *superficiales* tienen gran importancia en la radiotecnia.

Examinemos la velocidad de fase de la onda superficial. Con este fin, hallemos el valor instantáneo de la componente del campo magnético en el segundo medio cuya amplitud compleja es definida por la fórmula (9.47)

$$H_{y\,\mathrm{refr}}(t) = \mathrm{Re}\,(\dot{H}_{y\,\mathrm{refr}} e^{j\omega t}) = \mathrm{Re}\,(C_1 \dot{M}^{\mathrm{refr}}_{H_y} \times$$
$$\times e^{-\gamma_2 \sqrt{\mathrm{sen}^2\varphi_{\mathrm{refr}} - 1}\, z} e^{-j\gamma_2 \mathrm{sen}\,\varphi_{\mathrm{refr}} x} e^{j\omega t}).$$

Representemos el coeficiente de refracción complejo (en el caso general) en forma de suma de las partes real e imaginaria:

$$\dot{M}^{\mathrm{refr}}_{H_y} = \dot{M}^{\mathrm{refr}}_{1H_y} + j\dot{M}^{\mathrm{refr}}_{2H_y}. \qquad (9.48)$$

Para medios sin pérdidas, debido a la certeza de la expresión (7.54), podemos escribir

$$\gamma_2 = \beta_2 = \omega \sqrt{\mu_{a2}\varepsilon_{a2}}. \qquad (9.49)$$

Teniendo en cuenta las fórmulas (9.48) y (9.49), la expresión para $H_{y\,\mathrm{refr}}(t)$ se escribe de la siguiente manera:

$$H_{y\,\mathrm{refr}}(t) = \mathrm{Re}\,\langle C_1 e^{-\beta_2 \sqrt{\mathrm{sen}^2\varphi_{\mathrm{refr}} - 1}\, z} \times$$
$$\times (M^{\mathrm{refr}}_{1H_y} + jM^{\mathrm{refr}}_{2H_y}) \left[\cos\left(\omega t - \omega \sqrt{\mu_{a2}\varepsilon_{a2}}\,\mathrm{sen}\,\varphi_{\mathrm{refr}} x\right) - \right.$$
$$\left. + j\,\mathrm{sen}\left(\omega t - \omega \sqrt{\mu_{a2}\varepsilon_{a2}}\,\mathrm{sen}\,\varphi_{\mathrm{refr}} x\right)\right]\rangle,$$

o bien

$$H_{y\,refr}(t) = C_1 e^{-\beta_2 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \varphi_{refr} - 1}\, z} \times$$
$$\times \left[M^{refr}_{1H_y} \cos\left(\omega t - \omega \sqrt{\mu_{a2}\varepsilon_{a2}} \operatorname{sen} \varphi_{refr} x\right) - \right.$$
$$\left. - M^{refr}_{2H_y} \operatorname{sen}\left(\omega t - \omega \sqrt{\mu_{a2}\varepsilon_{a2}} \operatorname{sen} \varphi_{refr} x\right) \right]. \qquad (9.50)$$

Fijemos la fase de las funciones trigonométricas atribuyendo al tiempo t y la coordenada x un valor determinado:

$$\omega t_1 - \omega \sqrt{\mu_{a2}\varepsilon_{a2}} \operatorname{sen} \varphi_{refr} x_1.$$

Luego, hallemos la velocidad de traslación de este valor fijado de la fase a lo largo del eje x_1 en función de la variación del tiempo t. Con este objeto, comuniquemos al tiempo t_1 el incremento dt y, respectivamente, a la coordenada x_1 el incremento dx. Igualemos el nuevo valor de la fase al viejo, análogamente a como esto fue hecho al determinar la velocidad de fase de la onda plana en el § 7.3:

$$\omega t_1 - \omega \sqrt{\mu_{a2}\varepsilon_{a2}} \operatorname{sen} \varphi_{refr} x_1 = \omega (t_1 + dt) -$$
$$- \omega \sqrt{\mu_{a2}\varepsilon_{a2}} \operatorname{sen} \varphi_{refr} (x_1 + dx),$$

o bien, simplificando los términos iguales,

$$0 = \omega\, dt - \omega \sqrt{\mu_{a2}\varepsilon_{a2}} \operatorname{sen} \varphi_{refr}\, dx,$$

$$\frac{dx}{dt} = v_{tx} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu_{a2}\varepsilon_{a2}} \operatorname{sen} \varphi_{refr}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{a2}\varepsilon_{a2}} \operatorname{sen} \varphi_{refr}}, \qquad (9.51)$$

donde v_{tx} es la velocidad de fase de la onda en dirección de la coordenada x, y $\frac{1}{\sqrt{\mu_{a2}\varepsilon_{a2}}} = c$, la velocidad de la luz en el segundo medio.

En este caso la expresión (9.51) tomará la forma

$$v_{tx} = c/\operatorname{sen} \varphi_{refr}. \qquad (9.52)$$

Cuando se trata de una reflexión total interna es justa la relación (9.42) y, por consiguiente,

$$v_{tx} < c. \qquad (9.53)$$

La onda superficial posee una velocidad de fase que es menor que la velocidad de la luz. Semejantes ondas se llaman ondas lentas. De este modo, la onda superficial es una onda *lenta*. Reviste interés determinar los valores medios de los vectores de Poynting orientados a lo largo de los ejes z y x en el segundo medio.

El vector de Poynting es definido por una componente del campo magnético $\dot{H}_{y\,refr}$ (9.47) y dos componentes del campo eléctrico $\dot{E}_{x\,refr}$ y $\dot{E}_{z\,refr}$ (9.16) y (9.17). Con arreglo al caso examinado, estas

fórmulas se escriben de la siguiente manera:

$$\dot{E}_{x\,refr} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon_{a2}} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{y\,refr}}{\partial z}, \tag{9.54}$$

$$\dot{E}_{z\,refr} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_{a2}} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{y\,refr}}{\partial x}. \tag{9.55}$$

Al sustituir el valor de $\dot{H}_{y\,refr}$ a partir de la expresión (9.47) y teniendo en cuenta que $\gamma_2 = \beta_2$, obtenemos

$$\dot{E}_{x\,refr} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_{a2}} \beta_2 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \varphi_{refr} - 1}\, C_1 \dot{M}_{H_y}^{refr} \times$$
$$\times e^{-\beta_2 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \varphi_{refr} - 1}\, z} e^{-j\beta_2 \operatorname{sen} \varphi_{refr} x}, \tag{9.56}$$

$$\dot{E}_{z\,refr} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_{a2}} (-j) \beta_2 \operatorname{sen} \varphi_{refr} C_1 \dot{M}_{H_y}^{refr} \times$$
$$\times e^{-\beta_2 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \varphi_{refr} - 1}\, z} e^{-j\beta_2 \operatorname{sen} \varphi_{refr} x}. \tag{9.57}$$

Los valores medios de los vectores de Poynting orientados a lo largo de los ejes x y z se definen, respectivamente, por las expresiones:

$$\Pi_{Re\,x} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{E}_{x\,refr} \dot{H}^*_{y\,refr}], \tag{9.58}$$

$$\Pi_{Re\,z} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{E}_{x\,refr} \dot{H}^*_{y\,refr}]. \tag{9.59}$$

Introduciendo aquí los valores de $\dot{E}_{x\,refr}$, $\dot{E}_{z\,refr}$ y $\dot{H}^*_{y\,refr}$ obtenemos

$$\dot{\Pi}_{Re\,x} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[-1_x \frac{\beta_2 \operatorname{sen} \varphi_{refr}}{\omega\varepsilon_{a2}} C_1 \dot{M}_{H_y}^{refr} \times \right.$$
$$\times e^{-\beta_2 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \varphi_{refr} - 1}\, z} e^{-j\beta_2 \operatorname{sen} \varphi_{refr} x} 1_y C_1 \dot{M}_{H_y}^{refr*} \times$$
$$\left. \times e^{-\beta_2 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \varphi_{refr} - 1}\, z} e^{j\beta_2 \operatorname{sen} \varphi_{refr} x} \right] =$$
$$= 1_x \frac{\beta_2 \operatorname{sen} \varphi_{refr}}{2\omega\varepsilon_{a2}} C_1^2 \mid \dot{M}_{H_y}^{refr} \mid^2 e^{-2\beta_2 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \varphi_{refr} - 1}\, z}. \tag{9.60}$$

$$\dot{\Pi}_{Re\,z} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[1_z \frac{\beta_2 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \varphi_{refr} - 1}}{j\omega\varepsilon_{a2}} C_1 \dot{M}_{H_y}^{refr} \times \right.$$
$$\times e^{-\beta_2 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \varphi_{refr} - 1}\, z} e^{-j\beta_2 \operatorname{sen} \varphi_{refr} x} 1_y C_1 \dot{M}_{H_y}^{refr*} \times$$
$$\left. \times e^{-\beta_2 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \varphi_{refr} - 1}\, z} e^{j\beta_2 \operatorname{sen} \varphi_{refr} x} \right] =$$
$$= 1_z \operatorname{Re} \frac{\beta_2 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \varphi_{refr} - 1}}{j2\omega\varepsilon_{a2}} C_1^2 \mid \dot{M}_{H_y}^{refr} \mid^2 e^{-2\beta_2 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \varphi_{refr} - 1}\, z} = 0. \tag{9.61}$$

En consecuencia, existe la parte real del vector de Poynting orientado a lo largo de la coordenada x lo que es testimonio de que la

onda se propaga en esta dirección. El vector de Poynting orientado a lo largo del eje z posee tan sólo la parte imaginaria y su parte real es igual a cero. La onda electromagnética no se propaga a lo largo de la coordenada z, en esta dirección tiene lugar la pulsación de la potencia. Durante un semiperíodo el vector de Poynting está dirigido en el sentido de los valores positivos del eje z, y en el otro semiperíodo, en el sentido de los valores negativos. El valor medio por período de oscilación del vector de Poynting es igual a cero.

De este modo, en el caso de reflexión total interna existen tres vectores de Poynting cuyos valores medios son distintos a cero: 1) el vector de Poynting de la onda incidente en la superficie de

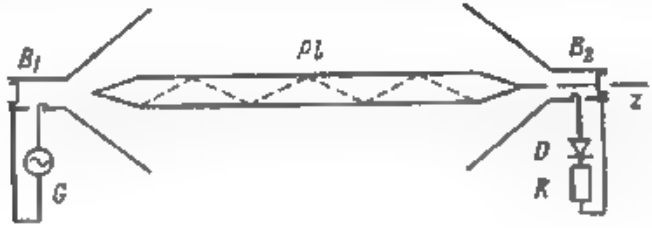

FIG. 9.4

separación; 2) el vector de Poynting de la onda reflejada de la superficie de separación, y 3) el vector de Poynting de la onda superficial que se propaga a lo largo del eje x.

No es difícil figurarse el esquema de un dispositivo destinado para canalizar la energía electromagnética por medio de las ondas superficiales (fig. 9.4). Los extremos de una placa dieléctrica Pl orientada a lo largo de la coordenada z están introducidos en las bocinas (o conos), una de las cuales (bocina B_1) emite energía electromagnética engendrada por el generador G, mientras que la otra (la B_2) la recibe. La onda electromagnética, al penetrar en el dieléctrico, incide sobre la superficie de separación dieléctrico—aire bajo distintos ángulos, incluyendo ángulos iguales o mayores que el ángulo de reflexión total interna. Parte de la energía se refleja de una superficie de separación e incide en la otra también formando ángulos iguales o mayores que el ángulo de reflexión total interna; el proceso de reflexión se repite.

En el aire, por ambos lados de la placa se forman ondas superficiales que se propagan a lo largo del eje z. Como resultado, el proceso de transmisión de la energía se realiza por medio de dos ondas: una onda superficial lenta, externa con respecto al dieléctrico, y una onda interna que se propaga en el dieléctrico. Semejantes guías de ondas basadas en ondas superficiales lentas encuentran amplia aplicación, y su funcionamiento se someterá a un análisis detallado en los capítulos subsiguientes.

§ 9.5. Incidencia de la onda plana sobre la superficie de separación plana con un metal ideal

En el § 7.5 se ha establecido que el campo en un metal de conductibilidad perfecta es igual a cero. En este caso la permitividad (constante dieléctrica) compleja $\dot{\varepsilon}_{a2}$ del segundo medio tiende al infinito, mientras que, de acuerdo con la fórmula (9.26), el coeficiente de reflexión para la componente $\dot{H}_y$ tiende a la unidad. De este modo, el valor total de la componente tangencial del campo magnético de una superficie de reflexión ideal se duplica en comparación con el de la onda incidente. La onda es reflejada totalmente y se propaga en el primer medio bajo un ángulo de reflexión igual al ángulo de incidencia.

§ 9.6. Incidencia de la onda plana sobre la superficie de separación con un metal real

A diferencia del metal ideal, en el metal real existe el campo electromagnético, aunque se amortigua rápidamente. La permitividad compleja del segundo medio en virtud del carácter justo de la desigualdad (7.58) puede escribirse en forma de la expresión (7.59). En el caso de que la onda plana incide sobre el metal real procediendo del aire o del vacío, la ley de Snell (9.11) se escribe en la forma

$$\operatorname{sen} \varphi_{refr} = \operatorname{sen} \varphi \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\mu_{a2}\left(-j\frac{\gamma_{a2}}{\omega}\right)}}. \qquad (9.62)$$

Considerando que $\mu_{a2} \gg \mu_0$ y teniendo en cuenta la desigualdad (7.58), obtenemos

$$\sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\mu_{a2}(-j)\frac{\gamma_{a2}}{\omega}}} \approx 0, \qquad (9.63)$$

$$\operatorname{sen} \varphi_{refr} \approx 0, \quad \cos \varphi_{refr} = 1. \qquad (9.64)$$

De este modo, independientemente del ángulo de incidencia, el ángulo de refracción en el metal real es próximo a cero. La energía electromagnética penetra en el metal real en dirección perpendicular a la superficie de separación provocando su calentamiento. Para determinar la potencia del campo electromagnético consumida para el calentamiento del metal real es preciso establecer la relación matemática entre las componentes del campo en dicho metal. Supongamos que se examina la polarización del campo cuando el vector $\dot{E}$ de la onda incidente se encuentra en el plano de incidencia. Las componentes del campo de la onda refractada se definen por las relaciones (9.7) y (9.20). Con el fin de calcular la componente $\dot{E}_{x\,refr}$ se emplea

la expresión (9.17):

$$\dot{E}_{x\,refr} = \frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_{a2}} \cdot \frac{\partial \dot{H}_{y\,refr}}{\partial x} = -\sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}}{\tilde{\varepsilon}_{a2}}} \operatorname{sen} \varphi_{refr} \times$$

$$\times \dot{M}^{refr}_{H_y} C_1 e^{-jv_2(z\cos\varphi_{refr} + x \operatorname{sen}\varphi_{refr})}. \qquad (9.65)$$

Teniendo en cuenta las condiciones (9.64) podemos considerar que

$$\dot{E}_{x\,refr} \approx 0 \qquad (9.66)$$

$$\dot{E}_{x\,refr} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}}{\tilde{\varepsilon}_{a2}}}\, \dot{M}^{refr}_{H_y} C_1 e^{-jv_2(z\cos\varphi_{refr} + x \operatorname{sen}\varphi_{refr})}. \qquad (9.67)$$

Tomando la relación de $\dot{E}_{x\,refr}$ respecto a $\dot{H}_{y\,refr}$, obtenemos

$$\frac{\dot{E}_{x\,refr}}{\dot{H}_{y\,refr}} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{a2}}{\tilde{\varepsilon}_{a2}}} = Z_m, \qquad (9.68)$$

donde Z_m es la resistencia característica compleja del metal.

Si consideramos que $\tilde{\mu}_{a2} = \mu_{a2}$, entonces, teniendo en cuenta la expresión (7.59), la resistencia de onda del metal se escribe en una forma análoga a (7.69):

$$Z_m = \sqrt{\frac{\omega\mu_{a2}}{2\gamma_{el\,2}}}(1+j). \qquad (9.69)$$

Cuando se conocen los parámetros del metal real siempre es posible calcular su resistencia de onda.

La fórmula (9.68) puede representarse de otra manera:

$$\dot{E}_{x\,refr} = \dot{H}_{y\,refr} Z_m. \qquad (9.70)$$

Al efectuar un análisis análogo para la polarización, cuando el vector H de la onda incidente se encuentra en el plano de incidencia y la componente $\dot{E}_{y\,refr}$ es tangencial a la superficie de separación, obtenemos una relación similar a la (9.70):

$$\dot{E}_{y\,refr} = -\dot{H}_{x\,refr} Z_m. \qquad (9.71)$$

Las relaciones (9.70) y (9.71) que enlazan las componentes de los campos eléctrico y magnético ortogonales entre sí y tangenciales a la superficie de separación se llaman *condiciones límites junto a la superficie del metal real.*

Las relaciones obtenidas son de gran importancia. Habitualmente, cuando se calcula el campo en los sistemas electrodinámicos el metal real se sustituye por el ideal de conductibilidad infinitamente grande. En este caso se obtienen las componentes del campo magnético tangenciales al metal que poco se distinguen de aquellas componentes que se podrían obtener tomando en consideración la

conductibilidad finita del metal, o sea, en el metal real. Las componentes tangenciales de intensidad del campo eléctrico para un metal ideal resultan ser iguales a cero, en virtud de las condiciones límites conocidas junto a la superficie del metal ideal definidas por la fórmula (8.19). Esta es la razón de que también sea igual a cero la componente del vector de Poynting normal al metal

$$\dot{\Pi}_{\mathrm{Re}\,n} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,[\dot{E}_\tau \dot{H}_\tau^*] \tag{9.72}$$

que determina la potencia de las pérdidas en el metal.

Para medios reales son justas las condiciones límites (8.9). Como consecuencia de ello, es posible sustituir el campo $\dot{H}_{y\ refr}$ en el metal por el campo $\dot{H}_y$ en el primer medio. En este caso la fórmula (9.70) se escribe de la siguiente manera:

$$\dot{E}_{x\ refr} = \dot{H}_y Z_m. \tag{9.73}$$

Una sustitución análoga puede llevarse a cabo en la fórmula (9.71)

$$\dot{E}_{y\ refr} = -\dot{H}_x Z_m. \tag{9.74}$$

Estas expresiones establecen la relación entre las componentes tangenciales del campo eléctrico en el segundo medio (metal real) y las componentes tangenciales del campo magnético en el primer medio.

Como ya se ha señalado, la diferencia entre las componentes tangenciales del campo magnético calculadas para el metal ideal y el metal real es insignificante si el metal real posee alta conductibilidad. Por consiguiente, sin incurrir en gran error, es posible sustituir en las expresiones (9.73) y (9.74) los campos magnéticos $\dot{H}_y$ y $\dot{H}_x$ existentes junto a la superficie del metal real por magnéticos campos obtenidos a condición de que el metal sea ideal. De este modo, al hacer el cálculo para un metal ideal (lo que es más fácil hacer), se puede obtener el valor de las componentes tangenciales del campo eléctrico en el metal real y, como se señalará más adelante, determinar la potencia de las pérdidas en el metal real tomando en consideración sus propiedades concretas.

Las relaciones análogas a las (9.73) y (9.74) también se obtienen en el caso de superficies de separación curvilíneas con un metal real. Entonces se escriben en una forma más general [15]:

$$[1_n \dot{E}_{refr}] = -Z_m [1_n [1_n \dot{H}]] \tag{9.75}$$

Aquí 1_n es la normal unitaria a la superficie de separación orientada hacia el interior del metal real; $\dot{E}_{refr}$, la amplitud compleja del vector de intensidad del campo eléctrico en la onda refractada junto

a la superficie de separación; Z_m, la resistencia característica compleja del metal, y $\dot{\mathbf{H}}$, la amplitud compleja del vector de intensidad del campo magnético en el primer medio junto a la superficie de separación.

La fórmula (9.75) es válida cuando se cumplen las siguientes restricciones: todos los parámetros que caracterizan la curvatura de la superficie y poseen la dimensión de longitud deben ser mucho mayores que la profundidad d de penetración del campo en el metal [véase la fórmula (7.72)]:

$$R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_n \gg d, \quad (9.76)$$

donde $R_1, R_2, \ldots, R_n$ son los radios de curvatura (fig. 9.5) que caracterizan la superficie del metal.

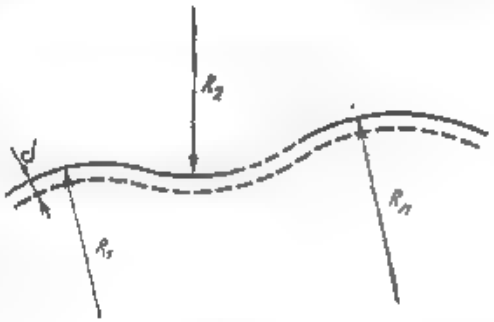

FIG. 9.5

Cabe destacar que las restricciones (9.76) no son rigurosas en los casos prácticos y, habitualmente, pueden satisfacerse.

Sin realizar una demostración general de la validez de la fórmula (9.75) indicaremos que las relaciones obtenidas sobre su base en el caso de una superficie plana de separación con el metal real coinciden con las expresiones (9.73) y (9.74). Supongamos que la normal 1_n coincide con el eje z del sistema de coordenadas cartesiano. Entonces, los términos de la fórmula (9.75) se escribirán en la fórma

$$[1_n\dot{\mathbf{E}}_n] = [1_z(1_x\dot{E}_{x\,refr} + 1_y\dot{E}_{y\,refr} + 1_z\dot{E}_{z\,refr})] = 1_y\dot{E}_{x\,refr} - 1_x\dot{E}_{y\,refr}.$$

Análogamente,

$$[1_n\dot{\mathbf{H}}] = 1_y\dot{H}_x - 1_x\dot{H}_y$$

y

$$[1_n\,[1_n\dot{\mathbf{H}}]] = [1_z(1_y\dot{H}_x - 1_x\dot{H}_y)] = -1_x\dot{H}_x - 1_y\dot{H}_y.$$

Al sustituir las expresiones obtenidas en la fórmula (9.75), obtenemos

$$1_y\dot{E}_{x\,refr} - 1_x\dot{E}_{y\,refr} = Z_m 1_x\dot{H}_x + Z_m 1_y\dot{H}_y,$$

o bien, igualando los factores ante los versores iguales,

$$\dot{E}_{x\,refr} = \dot{H}_y Z_m, \quad \dot{E}_{y\,refr} = -\dot{H}_x Z_m.$$

Se ve que estas relaciones coinciden exactamente con las expresiones (9.73) y (9.74)

§ 9.7. Potencia de las pérdidas en un metal real

En correspondencia con las condiciones límites, junto a la superficie de un metal real existen componentes tangenciales de los campos magnético y eléctrico. Estas componentes crean el vector de Poynting dirigido hacia el interior del metal normalmente a la superficie de separación. De este modo, aparece un flujo de potencia que se consume en calentar el metal, o sea, la potencia de las pérdidas. El valor medio del vector de Poynting se determina por la expresión (4.29). La componente de este vector normal a la superficie de separación se obtiene proyectándolo sobre la dirección de la normal unitaria a la superficie de separación:

$$\dot{\Pi}_{\mathrm{Re}\,n} = 1_n (1_n \dot{\Pi}_{\mathrm{Re}}) = 1_n \left(1_n \tfrac{1}{2} \mathrm{Re}\,[\dot{E}\dot{H}^*]\right) = 1_n \tfrac{1}{2} \mathrm{Re}\,(1_n\,[\dot{E}\dot{H}^*]),$$

donde $1_n\,[\dot{E}\dot{H}^*]$ es un producto mixto (la normal unitaria se multiplica escalarmente por el resultado del producto vectorial). En el producto mixto se admiten permutaciones cíclicas:

$$1_n\,[\dot{E}\dot{H}^*] = \dot{H}^*\,[1_n\dot{E}].$$

Por consiguiente,

$$\dot{\Pi}_{\mathrm{Re}\,n} = 1_n \tfrac{1}{2} \mathrm{Re}\,(\dot{H}^*\,[1_n\dot{E}]).$$

Cuando se determina la componente normal del vector de Poynting en un metal real $\dot{\Pi}^{retr}_{\mathrm{Re}\,n}$ es conveniente utilizar las componentes del campo en el metal:

$$\dot{\Pi}^{retr}_{\mathrm{Re}\,n} = 1_n \tfrac{1}{2} \mathrm{Re}\,(\dot{H}^*_{retr}\,[1_n\dot{E}_{retr}])$$

y la relación (9.75)

$$\dot{\Pi}^{retr}_{\mathrm{Re}\,n} = 1_n \tfrac{1}{2} \mathrm{Re}\,\{(\dot{H}^*_{retr}\,(-Z_m\,[1_n\,[1_n\dot{H}]])\} =$$

$$= 1_n \tfrac{1}{2} \mathrm{Re}\,\{-Z_m \dot{H}^*_{retr}\,[1_n\,[1_n\dot{H}]]\}. \qquad (9.77)$$

Aquí $\dot{H}^*_{retr}\,[1_n\,[1_n\dot{H}]]$ también es un producto mixto.

Al efectuar una permutación cíclica, obtenemos

$$\dot{H}^*_{retr}\,[1_n\,[1_n\dot{H}]] = [1_n\dot{H}]\,[\dot{H}^*_{retr}1_n] = -[1_n\dot{H}]\,[1_n\dot{H}^*_{retr}].$$

El primer producto vectorial da la componente tangencial del campo $\dot{\mathbf{H}}$ en el primer medio, junto a la superficie de separación con el metal real:

$$[1_n \dot{\mathbf{H}}] \quad \dot{\mathbf{H}}_\tau,$$

y el segundo producto vectorial, la componente tangencial del vector conjugado $\dot{\mathbf{H}}^*_{refr}$ junto a la superficie de separación con el metal real:

$$[1_n \dot{\mathbf{H}}^*_{refr}] = \dot{\mathbf{H}}^*_{\tau\, refr}.$$

En virtud de las condiciones límites (8.9), esta componente tangencial del campo magnético en el segundo medio es igual a la componente tangencial en el primer medio junto a la superficie de separación. En consecuencia,

$$\dot{\mathbf{H}}^*_{\tau\, refr} = \dot{\mathbf{H}}^*_{\tau}.$$

Entonces se puede escribir la siguiente relación:

$$\dot{\mathbf{H}}^*_{refr}[1_n [1_n \dot{\mathbf{H}}]] = -\dot{\mathbf{H}}_\tau \dot{\mathbf{H}}^*_\tau = -|\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2. \tag{9.78}$$

Colocando esta expresión en la fórmula (9.77), obtenemos

$$\dot{\Pi}^{refr}_{\mathrm{Re}\, n} = 1_n \frac{1}{2} \mathrm{Re}\,(Z_m |\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2).$$

Haciendo uso de la expresión para la resistencia de onda del metal (9.69) y tomando la parte real, hallamos la relación definitiva para el vector de Poynting en el metal real:

$$\dot{\Pi}^{refr}_{\mathrm{Re}\, n} = 1_n \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{a_2}\omega}{2\gamma_{a_2}}}\, |\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2. \tag{9.79}$$

La potencia que se pierde en el metal real por la superficie S_1 sobre la cual incide la onda electromagnética se determina integrando el vector de Poynting por esta superficie:

$$P_{pér} = \int_{S_1} \dot{\Pi}^{refr}_{\mathrm{Re}\, n}\, dS,$$

$$P_{pér} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{a_2}\omega}{2\gamma_{a_2}}} \int_{S_1} |\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2\, dS. \tag{9.80}$$

Para calcular la potencia perdida en el metal real es necesario saber los parámetros del metal, la frecuencia de las oscilaciones y el valor de la componente tangencial del campo magnético junto a la superficie de separación con el metal real.

CAPÍTULO 10

Cuadros del campo que surgen junto al plano metálico ideal al incidir sobre éste una onda plana. Guía de ondas de dos planos

§ 10.1. Planteamiento del problema

Para localizar el campo electromagnético y dirigirlo en el sentido deseado se utilizan con frecuencia planos metálicos de distintas configuraciones. Examinemos los cuadros del campo que surgen en el plano metálico ideal al incidir sobre éste una onda plana. El análisis de este caso elemental facilitará el entendimiento de procesos más complicados que se operan en sistemas reales destinados a canalizar el campo electromagnético. Demostremos que entre dos planos metálicos es posible la propagación de la energía electromagnética y determinemos las condiciones en que esta propagación tiene lugar. Puesto que el vector **E** puede ser orientado de distinta manera con respecto a la superficie de incidencia examinemos dos casos extremos:

1) el vector **E** se encuentra en el plano de incidencia;

2) el vector **E** es perpendicular al plano de incidencia.

Es evidente que cualquier otra posición del vector **E** puede representarse por superposición de estos dos casos extremos.

§ 10.2. Primer caso. El vector E se encuentra en el plano de incidencia. Ondas del tipo eléctrico

Elijamos la dirección del vector de Poynting de la onda incidente **П**. Entonces, el frente de la onda incidente que se sobreentiende

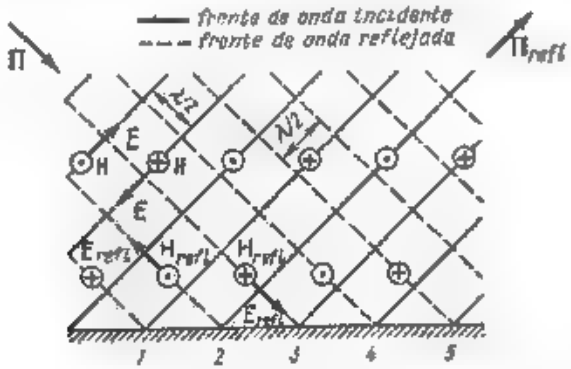

FIG. 10.1

como plano de fase idéntica será normal al vector **П**. Designemos las huellas de los planos de una fase con líneas continuas (fig. 10.1).

Convengamos en que cada línea continua está desplazada respecto a la contigua a una distancia igual a la semilongitud de la onda. Dentro de los límites de cada una de estas líneas el vector **E** es invariable en magnitud y dirección. En las líneas adyacentes el vector **E** es igual por su magnitud pero contrario por su dirección. Prefijando la dirección del vector **E** en cualquier línea del frente y conociendo la dirección del vector **H**, es posible determinar unívocamente la orientación del vector **H**. La onda incidente, al alcanzar el plano metálico, engendra una onda reflejada cuyo frente se propaga en

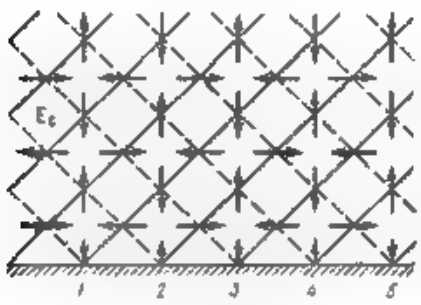

FIG. 10.2

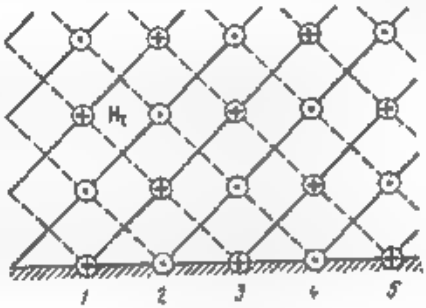

FIG. 10.3

dirección del vector de Poynting de la onda reflejada **Π**. Cuando se determina la dirección de los vectores $\mathbf{E}_{refl}$ en los frentes de la onda reflejada se debe partir de las condiciones límites de una superficie metálica ideal, en virtud de las cuales la componente tangencial total del campo **E** junto a la superficie debe ser igual a cero. La dirección del vector $\mathbf{H}_{refl}$ se determina por la dirección del vector $\mathbf{E}_{refl}$ y por la orientación del vector de Poynting de la onda reflejada $\mathbf{\Pi}_{refl}$.

En la fig. 10.2 en la red de los frentes de las ondas incidente y reflejada se indica la dirección de la suma de los vectores $\mathbf{E}_\Sigma = \mathbf{E} + \mathbf{E}_{refl}$ en los puntos de intersección de los frentes. Las líneas del vector $\mathbf{E}_\Sigma$ forman bucles cerrados característicos. En la fig. 10.3, sobre la red de los frentes de las ondas incidente y reflejada se indica la dirección de los vectores totales $\mathbf{H}_\Sigma$ orientados a lo largo de la normal al plano del dibujo.

La fig. 10.4 ilustra el cuadro general de distribución en el semiespacio de las líneas de fuerza de los campos eléctrico y magnético construido de conformidad con las figs 10.2 y 10.3. Los cuadros representados corresponden a un momento de tiempo fijado. Se desplazan por el plano metálico de izquierda a derecha. Determinemos la escala de los cuadros obtenidos y la velocidad de su movimiento.

La fig. 10.5 muestra por separado la intersección de dos frentes de la onda incidente con dos frentes de la onda reflejada. De la

figura se desprende que

$$a = \frac{\lambda}{2\cos\varphi}, \quad b = \frac{\lambda}{2\operatorname{sen}\varphi}. \tag{10.1}$$

De este modo, la escala de los cuadros se determina por la longitud de onda y el ángulo de incidencia de la onda plana sobre la superficie metálica.

La fig. 10.6 ilustra el frente de una onda incidente que corresponde al momento de tiempo fijado $t = t_1$. La línea paralela co-

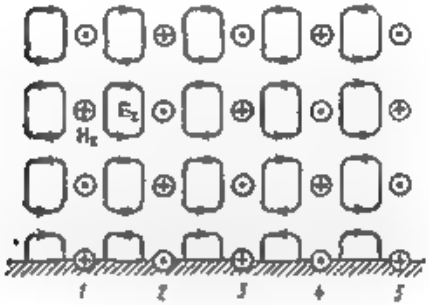

FIG. 10.4

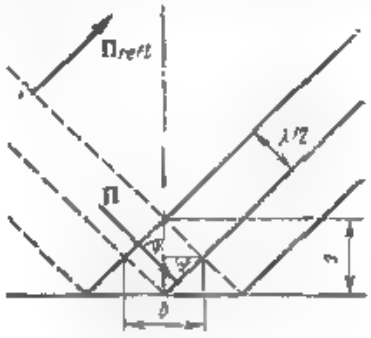

FIG. 10.

rresponde a la posición de este frente dentro del intervalo dt.

A partir de la figura 10.6 se infiere que

$$ac = \frac{bc}{\cos\varphi} = \frac{c\,dt}{\operatorname{sen}\varphi}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}}.$$

La relación

$$\frac{ac}{dt} = v_f = \frac{c}{\operatorname{sen}\varphi} > c. \tag{10.2}$$

De este modo, la velocidad de propagación de los puntos de igual fase por la superficie de separación puede superar la velocidad de la luz en el medio. En este caso no existe contradicción con la tesis de Einstein, debido a que la velocidad de fase no representa la velocidad de transferencia del campo electromagnético. Como ejemplo de la velocidad de fase puede servir el movimiento de una ola marina hacia la costa y de una astilla que se encuentra en el agua. La astilla se desplaza con la velocidad de movimiento de las partículas materiales del agua hacia la orilla, velocidad que es mucho menor que la del desplazamiento de las crestas de las olas por efecto de las oscilaciones transversales del agua, es decir, de subidas y descensos alter-

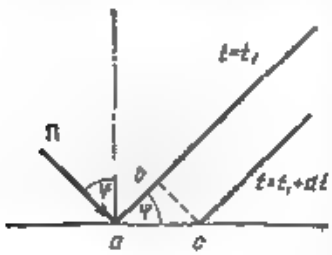

FIG. 10.6

nativos de dos sectores contiguos del agua. Estas bajadas y subidas alternativas crean la impresión de un movimiento rápido de las olas hacia la orilla a una velocidad que puede considerarse como velocidad de fase.

De la fig. 10.4 se ve que el campo que se desplaza por la superficie de separación posee tan sólo componentes del campo magnético H transversales respecto a la dirección de la traslación. El campo eléctrico E, además de la componente transversal, posee también la componente longitudinal que coincide en su dirección con el vector de la velocidad de fase.

Semejante onda lleva el nombre de onda del tipo eléctrico y se designa con E. De este modo, se denomina onda del tipo E una onda que posee la componente longitudinal del vector de intensidad del campo eléctrico, pero que carece de la componente longitudinal del vector de intensidad del campo magnético.

§ 10.3. Segundo caso. El vector E es perpendicular al plano de incidencia. Ondas del tipo magnético

El curso del razonamiento, para el segundo caso, es análogo al primero. Las figs. 10.7—10.10 corresponden a las figs. 10.1—10.4.

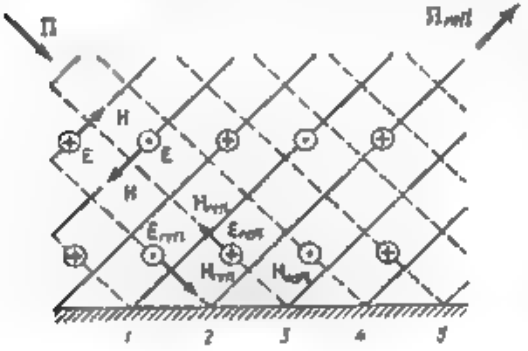

FIG. 10.7

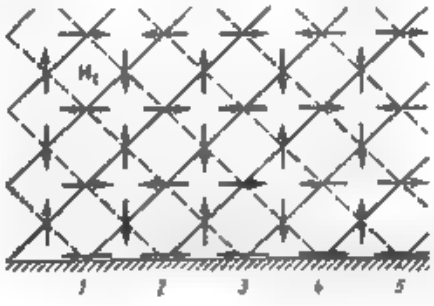

FIG. 10.8

La diferencia consiste en que los bucles cerrados de las líneas E se sustituyen en el segundo caso por los bucles cerrados de las líneas H.

Las escalas de los cuadros del campo y las expresiones para la velocidad de fase también son análogas. En el primer caso se forma una onda del tipo E, en el segundo caso el campo E no tiene componentes longitudinales coincidentes en dirección con el vector de la velocidad de fase y está dispuesto en un plano perpendicular a la dirección de propagación.

El campo que posee la componente longitudinal es el campo H. Semejante onda se llama onda del tipo magnético y se designa con H.

El análisis realizado demuestra que es posible limitar la propagación del campo electromagnético por un lado con un plano metálico.

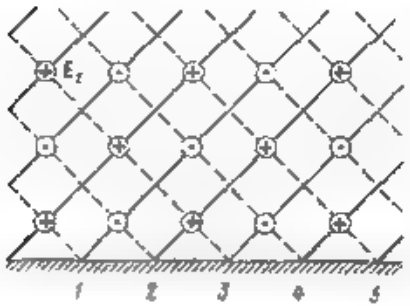

FIG. 10.9

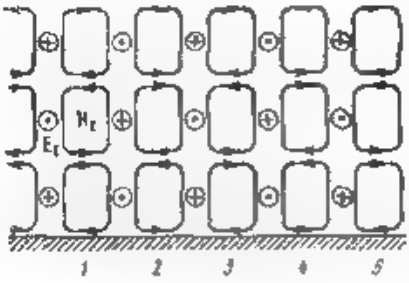

FIG. 10.10

Intentemos limitar el campo electromagnético por dos lados colocando paralelamente al primer plano metalico un segundo.

§ 10.4. Guía de ondas de dos planos

Coloquemos por encima del primer plano metálico el segundo plano infinito hecho de metal ideal, de modo que no se altere el cuadro ya existente del campo. Con este fin el segundo plano debe disponerse observando las distancias $l = na$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$

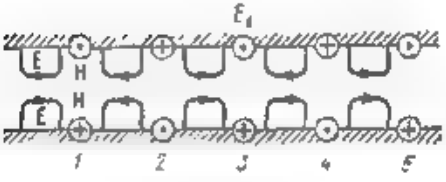

FIG. 10.11

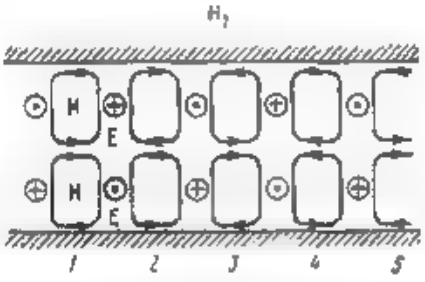

FIG. 10.12

es la serie de números enteros. En este caso el campo E se acercará a los planos metálicos en dirección normal a éstos, y el campo H, de modo tangencial. Las condiciones límites quedarán cumplidas y el cuadro del campo entre los dos planos será el mismo que en el caso de un solo plano.

La fig. 10.11 representa el cuadro del campo para $n = 1$ y una onda del tipo E. La onda de semejante tipo posee una sola variación del campo en dirección perpendicular a los planos y se llama onda del tipo E_1. En la fig. 10.12 se ilustran el cuadro del campo para $n = 2$ y la onda del tipo H_2.

Teniendo en cuenta la expresión (10.1), las distancias entre los planos son

$$l = na = n\frac{\lambda}{2\cos\varphi}. \qquad (10.3)$$

El valor de l depende del ángulo de incidencia φ. Si se necesita una onda de un tipo más alto, por ejemplo, $2n$, siendo invariable el ángulo φ, entonces, para que dicha onda se engendre, conviene aumentar dos veces la distancia l. La distancia mínima para la cual es posible la existencia de la onda con $n = 1$ es

$$l_1 = 1\frac{\lambda}{2}.$$

La distancia mínima para la cual es posible la existencia de la onda con $n = 2$ es

$$l_2 = \lambda.$$

Cuando

$$\lambda/2 < l < \lambda \qquad (10.4)$$

esta condición es la condición de unicidad de la onda con $n = 1$. Todas las ondas de índices mayores no podrán propagarse entre dos

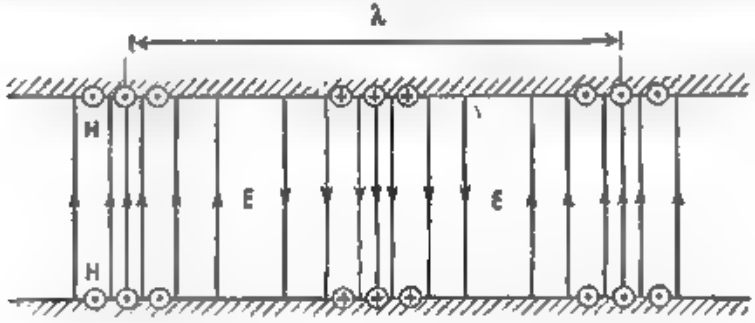

FIG. 10.13

planos. Siendo la distancia $\lambda < l < \frac{3}{2}\lambda$, aparecerá una onda con $n = 2$ y no será posible que se engendre una onda con $n = 3$. Sin embargo, podrá existir simultáneamente una onda con $n = 1$ que se denomina fundamental. De esta forma, eligiendo adecuadamente la distancia entre los planos, es posible asegurar la condición de unicidad de la onda del tipo fundamental y no se puede garantizar la condición de unicidad de las ondas del tipo superior. La introducción del segundo plano permitió limitar todavía más el campo electromagnético en el espacio. El sistema de dos planos infinitos es irreal desde el punto de vista físico. A continuación, se examinarán sistemas de canalización reales, o sea, guías de ondas

Basandose en la formula (10.3) cabe señalar que para $l \leqslant \lambda/2$ en una guía de ondas de dos planos paralelos no pueden existir ondas del tipo E o H. Sin embargo, si las líneas de fuerza del campo

magnético están orientadas tangencialmente con respecto a los planos, mientras que las líneas de fuerza del campo eléctrico les son perpendiculares, como se muestra en la fig. 10.13, se engendra una onda cuyo vector de Poynting viene orientado a lo largo del eje de la guía de ondas. Semejante onda no posee componentes longitudinales de los campos eléctrico y magnético y se llama onda del tipo T. Puesto que en semejante onda el vector de Poynting coincide con el eje de propagación, la velocidad de fase de la onda del tipo T es igual a la velocidad de la luz en el medio que llena la guía de ondas. De la expresión (10.2) se infiere que el ángulo de incidencia φ de esta onda debe ser igual a 90°.

CAPITULO 11

Nociones generales acerca de las ondas de tipo eléctrico y magnético

§ 11.1. Planteamiento del problema

En el capítulo 10 se han analizado desde el punto de vista teórico dispositivos elementales no reales físicamente, que canalizan ondas electromagnéticas. En estas circunstancias, para dos casos de polarización del vector E de la onda incidente se ha establecido la posibilidad de que en los sistemas de canalización existan ondas de los tipos eléctrico y magnético. En el caso de cualquier posición intermedia el vector E de la onda incidente puede desintegrarse en dos componentes: 1) la que se encuentra en el plano de incidencia; 2) la que se encuentra en el plano perpendicular al plano de incidencia. Si esto ocurre, en el sistema de canalización existirán dos ondas independientes: del tipo E y del tipo H, y el campo total se formará como resultado de la superposición de estas oscilaciones. En una serie de importantes dispositivos empleados en la práctica las mencionadas ondas existen por separado y se aseguran, especialmente, las condiciones de existencia de ondas de uno u otro tipo. Esta es la razón por la cual reviste interés el estudio de las condiciones generales en que hacen posible su existencia, así como la determinación de las relaciones que enlazan las componentes del campo para las ondas del tipo E o del tipo H. Desde el punto de vista matemático este problema se reduce a la investigación de las ecuaciones de Maxwell en ausencia de la componente longitudinal ya sea del campo H o bien del campo E. En el presente capítulo esta investigación se llevará a cabo para el caso más general de utilización del sistema

de coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas. Como eje longitudinal a lo largo del cual se propaga el campo se elegirá el eje ζ. Entonces a las ondas de tipo eléctrico corresponderá la igualdad a cero de la componente longitudinal del campo magnético: $\dot{H}_\zeta = 0$, mientras que a las ondas de tipo magnético corresponderá la condición $\dot{E}_\zeta = 0$.

§ 11.2. Sistema de ecuaciones escalares de Maxwell en el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas

El análisis se basa en las ecuaciones vectoriales de Maxwell para las amplitudes complejas (2.12) y (2.13). Aquí no se examinan los problemas de excitación del campo electromagnético por el sistema de corrientes prefijado $\dot{J}_{el}$ y $\dot{J}_m$, en virtud de lo cual conviene suponer que las corrientes son iguales a cero. En este caso las ecuaciones de Maxwell se escribirán en la forma

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega\tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}}, \tag{11.1}$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}. \tag{11.2}$$

Escribamos los vectores $\dot{\mathbf{E}}$ y $\dot{\mathbf{H}}$ en forma desarrollada en el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas ξ, η, ζ (véase el Apéndice I):

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{1}_\xi \dot{E}_\xi + \mathbf{1}_\eta \dot{E}_\eta + \mathbf{1}_\zeta \dot{E}_\zeta, \tag{11.3}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{1}_\xi \dot{H}_\xi + \mathbf{1}_\eta \dot{H}_\eta + \mathbf{1}_\zeta \dot{H}_\zeta, \tag{11.4}$$

donde $\mathbf{1}_\xi$, $\mathbf{1}_\eta$, $\mathbf{1}_\zeta$ son los versores correspondientes a las coordenadas ξ, η, ζ.

Valiéndonos de la expresión para el rotor del vector a citada en el Apéndice II, obtenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = {} & \mathbf{1}_\xi \frac{1}{h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\eta h_\eta) \right\} - \\ & + \mathbf{1}_\eta \frac{1}{h_\zeta h_\xi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) \right\} + \\ & + \mathbf{1}_\zeta \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{E}_\eta h_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{E}_\xi h_\xi) \right\}, \end{aligned} \tag{11.5}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = {} & \mathbf{1}_\xi \frac{1}{h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{H}_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{H}_\eta h_\eta) \right\} + \\ & + \mathbf{1}_\eta \frac{1}{h_\zeta h_\xi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{H}_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{H}_\zeta h_\zeta) \right\} + \\ & + \mathbf{1}_\zeta \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{H}_\eta h_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{H}_\xi h_\xi) \right\}, \end{aligned} \tag{11.6}$$

donde h_ξ, h_η, h_ζ son los coeficientes de Lamé correspondientes a las coordenadas ξ, η, ζ.

Al sustituir las expresiones (11.3), (11.4), (11.5) y (11.6) en las ecuaciones (11.1) y (11.2) e igualar los factores de los versores idénticos en el primero y el segundo miembros, obtenemos a partir de cada ecuación vectorial de Maxwell tres ecuaciones escalares:

$$\frac{1}{h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot{H}_\zeta h_\zeta)-\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{H}_\eta h_\eta)\right\}=j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{E}_\xi, \tag{11.7}$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{H}_\xi h_\xi)-\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot{H}_\zeta h_\zeta)\right\}=j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{E}_\eta, \tag{11.8}$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot{H}_\eta h_\eta)-\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot{H}_\xi h_\xi)\right\}=j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{E}_\zeta, \tag{11.9}$$

$$\frac{1}{h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot{E}_\zeta h_\zeta)-\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{E}_\eta h_\eta)\right\}=-j\omega\tilde{\mu}_a\dot{H}_\xi, \tag{11.10}$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{E}_\xi h_\xi)-\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot{E}_\zeta h_\zeta)\right\}=-j\omega\tilde{\mu}_a\dot{H}_\eta, \tag{11.11}$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot{E}_\eta h_\eta)-\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot{E}_\xi h_\xi)\right\}=-j\omega\tilde{\mu}_a\dot{H}_\zeta. \tag{11.12}$$

El sistema (11.7) es el sistema de ecuaciones escalares de Maxwell expresado en coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas.

§ 11.3. Ondas de tipo eléctrico y magnético

Para las ondas del tipo eléctrico en la ecuación (11.7) conviene admitir

$$\dot{H}_\zeta=0. \tag{11.13}$$

En este caso las ecuaciones escalares de Maxwell se escribirán en la forma siguiente:

$$-\frac{1}{h_\eta h_\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{H}_\eta h_\eta)=j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{E}_\xi, \tag{11.14}$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{H}_\xi h_\xi)=j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{E}_\eta, \tag{11.15}$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot{H}_\eta h_\eta)-\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot{H}_\xi h_\xi)\right\}=j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{E}_\zeta, \tag{11.16}$$

$$\frac{1}{h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot{E}_\zeta h_\zeta)-\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{E}_\eta h_\eta)\right\}=-j\omega\tilde{\mu}_a\dot{H}_\xi, \tag{11.17}$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}(\dot{E}_\xi h_\xi)-\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot{E}_\zeta h_\zeta)\right\}=-j\omega\tilde{\mu}_a\dot{H}_\eta, \tag{11.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\dot{E}_\eta h_\eta)=\frac{\partial}{\partial\eta}(\dot{E}_\xi h_\xi). \tag{11.19}$$

Tratemos de expresar las componentes del campo $\dot{H}_\xi$, $\dot{H}_\eta$, $\dot{E}_\xi$, $\dot{E}_\eta$ transversales a la dirección de propagación ζ por medio de la componente longitudinal $\dot{E}_\zeta$, obteniendo una ecuación que contenga tan sólo esta componente longitudinal Si fuese posible realizar esta

operacion, se simplificaría en grado considerable la determinación de las componentes del campo en los sistemas de canalización concretos. Sería necesario resolver la ecuación para la componente longitudinal $\dot{E}_\zeta$ y, luego, aplicando las fórmulas que vinculan las componentes transversales del campo con $\dot{E}_\zeta$ se podría determinar también las componentes transversales.

Multipliquemos la ecuación (11.18), por el coeficiente de Lamé h_η y expresemos la función $\dot{H}_\eta h_\eta$:

$$\dot{H}_\eta h_\eta = \frac{1}{\omega \tilde{\mu}_a} \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\xi h_\xi) \right\}. \qquad (11.20)$$

Sustituyamos la relación obtenida en la ecuación (11.14), multiplicando previamente esta última por el coeficiente de Lamé h_ξ:

$$-\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{1}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\langle \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) \right\} \right\rangle = j\omega \tilde{\varepsilon}_a (\dot{E}_\xi h_\xi).$$

Agrupemos los términos que contienen $(\dot{E}_\xi h_\xi)$:

$$j\omega \tilde{\varepsilon}_a (\dot{E}_\xi h_\xi) - \frac{1}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\xi h_\xi) \right\} =$$

$$= \frac{1}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) \right\}. \qquad (11.21)$$

Multipliquemos la ecuación (11.17) por el coeficiente de Lamé h_ξ y expresemos la función $\dot{H}_\xi h_\xi$:

$$\dot{H}_\xi h_\xi = \frac{1}{\omega \tilde{\mu}_a} \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\eta h_\eta) \right\}. \qquad (11.22)$$

Sustituyamos la relación obtenida en la ecuación (11.15), multiplicando previamente esta última por el coeficiente de Lamé h_η:

$$\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{1}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\langle \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\eta h_\eta) \right\} \right\rangle = j\omega \tilde{\varepsilon}_a (\dot{E}_\eta h_\eta).$$

Agrupemos los términos que contienen $(\dot{E}_\eta h_\eta)$:

$$j\omega \tilde{\varepsilon}_a (\dot{E}_\eta h_\eta) + \frac{1}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\eta h_\eta) \right\} -$$

$$- \frac{1}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) \right\}. \qquad (11.23)$$

Sustituyamos la función $\dot{E}_\xi h_\xi$ en la expresión (11.20) a partir de la ecuación (11.14):

$$\dot{H}_\eta h_\eta = \frac{1}{\widetilde{\omega\mu}_a} \cdot \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ -\frac{1}{\widetilde{j\omega\varepsilon}_a} \cdot \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{H}_\eta h_\eta) \right\} -$$

$$- \frac{1}{\widetilde{\omega\mu}_a} \cdot \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{E}_\xi h_\xi).$$

Agrupando los términos, obtenemos

$$(\dot{H}_\eta h_\eta) + \frac{1}{\omega^2 \widetilde{\mu_a \varepsilon_a}} \cdot \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{h_\xi}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{H}_\eta h_\eta) \right\} =$$

$$= - \frac{1}{\widetilde{\omega\mu}_a} \cdot \frac{h}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{E}_\xi h_\xi). \qquad (11.24)$$

A continuación, escribamos la función $\dot{E}_\eta h_\eta$ en la expresión (11.22) a partir de la ecuación (11.15)

$$\dot{H}_\xi h_\xi = - \frac{1}{\widetilde{\omega\mu}_a} \cdot \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{1}{\widetilde{j\omega\varepsilon}_a} \cdot \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{H}_\xi h_\xi) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\widetilde{\omega\mu}_a} \cdot \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{E}_\xi h_\xi).$$

Al agrupar los términos, hallamos

$$\dot{H}_\xi h_\xi + \frac{1}{\omega^2 \widetilde{\mu_a \varepsilon_a}} \cdot \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{H}_\xi h_\xi) \right\} =$$

$$= \frac{1}{\widetilde{\omega\mu}_a} \cdot \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{E}_\xi h_\xi). \qquad (11.25)$$

Las expresiones (11.21), (11.23), (11.24) y (11.25) dan la relación de las componentes transversales del campo con la componente longitudinal $\dot{E}_\zeta$, que tiene, sin embargo, un carácter complejo, diferencial, ya que los segundos términos de estas expresiones, que contienen las funciones buscadas, se encuentran bajo el signo de derivadas respecto a la coordenada ζ.

Para determinar la ecuación que contiene solamente la componente longitudinal del campo eléctrico $\dot{E}_\zeta$, se hace uso de la ecuación (11.16) en la que se sustituyen las expresiones (11.20) y (11.22):

$$\frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta} \cdot \frac{1}{\widetilde{\omega\mu}_a} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) \right\} \right\rangle -$$

$$- \frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta} \cdot \frac{1}{\widetilde{\omega\mu}_a} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left\langle \frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{E}_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (\dot{E}_\eta h_\eta) \right\} \right\rangle = j\omega \widetilde{\varepsilon}_a (\dot{E}_\zeta h_\zeta).$$

Reagrupemos en cierto grado esta ecuación:

$$\frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta}\left\langle \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial \xi}(\dot{E}_\zeta h_\zeta)\right\}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\frac{\partial}{\partial \eta}(\dot{E}_\zeta h_\zeta)\right\}\right\rangle +$$
$$+\omega^2\widetilde{\mu}_a\widetilde{\varepsilon}_a(\dot{E}_\zeta h_\zeta)=\frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta}\left\langle \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\frac{\partial}{\partial \xi}(\dot{E}_\xi h_\xi)\right\}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial \zeta}(\dot{E}_\eta h_\eta)\right\}\right\rangle. \qquad (11.26)$$

Esta ecuación, además de la componente $\dot{E}_\zeta$, contiene las componentes $\dot{E}_\xi$ y $\dot{E}_\eta$. Tratemos de eliminarlas. A partir de las ecuaciones (11.14) y (11.15) obtenemos

$$h_\zeta j\omega\widetilde{\varepsilon}_a(\dot{E}_\xi h_\eta)=-\frac{\partial}{\partial \zeta}(\dot{H}_\eta h_\eta), \qquad (11.27)$$

$$h_\zeta j\omega\widetilde{\varepsilon}_a(\dot{E}_\eta h_\xi)=\frac{\partial}{\partial \zeta}(\dot{H}_\xi h_\xi). \qquad (11.28)$$

Derivemos la expresión (11.27) respecto a ξ y la expresión (11.28) respecto a η:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \zeta}(\dot{H}_\eta h_\eta)=-j\omega\varepsilon_a\frac{\partial}{\partial \xi}\{h_\zeta(\dot{E}_\xi h_\eta)\}, \qquad (11.29)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta\,\partial \zeta}(\dot{H}_\xi h_\xi)=j\omega\widetilde{\varepsilon}_a\frac{\partial}{\partial \eta}\{h_\zeta(\dot{E}_\eta h_\xi)\}. \qquad (11.30)$$

Seguidamente, derivemos la ecuación (11.16) respecto a ζ:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \zeta}(\dot{H}_\eta h_\eta)-\frac{\partial^2}{\partial \eta\,\partial \zeta}(\dot{H}_\xi h_\xi)=j\omega\widetilde{\varepsilon}_a\frac{\partial}{\partial \zeta}(h_\xi h_\eta\dot{E}_\zeta). \qquad (11.31)$$

Sustituyamos en la ecuación (11.31) las relaciones (11.29), (11.30) y simplifiquemos por $j\omega\widetilde{\varepsilon}_a$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\{h_\zeta(\dot{E}_\xi h_\eta)\}+\frac{\partial}{\partial \eta}\{h_\zeta(\dot{E}_\eta h_\xi)\}=-\frac{\partial}{\partial \zeta}(h_\xi h_\eta\dot{E}_\zeta). \qquad (11.32)$$

Derivemos esta relación respecto a ζ:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \zeta}\{h_\zeta(\dot{E}_\xi h_\eta)\}+\frac{\partial^2}{\partial \eta\,\partial \zeta}\{h_\zeta(\dot{E}_\eta h_\xi)\}=-\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}(h_\xi h_\eta\dot{E}_\zeta). \qquad (11.33)$$

La expresión (11.33) establece la relación entre las segundas derivadas de las componentes $\dot{E}_\xi$, $\dot{E}_\eta$ y la segunda derivada de la componente $\dot{E}_\zeta$. Esta relación puede aprovecharse para eliminar las componentes $\dot{E}_\xi$, $\dot{E}_\eta$ del segundo miembro de la ecuación (11.26). Comparemos el segundo miembro de la ecuación (11.26) con el primer miembro de la ecuación (11.33):

$$\frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta}\left\langle \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial \zeta}(\dot{E}_\xi h_\xi)\right\}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial \zeta}(\dot{E}_\eta h_\eta)\right\}\rangle$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\zeta}\{h_\zeta(\dot{E}_\xi h_\eta)\}+\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\zeta}\{h_\zeta(\dot{E}_\eta h_\xi)\}.$$

Si se supone que los coeficientes de Lamé h_ξ y h_η no son funciones de la coordenada ζ y el coeficiente h_ζ es igual a una unidad (ζ es una coordenada rectilínea), entonces, el segundo miembro de la ecuación (11.26) puede escribirse en la forma

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\zeta}(\dot{E}_\xi h_\eta)+\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\zeta}(\dot{E}_\eta h_\xi)\right\}.$$

Para las restricciones indicadas en lo que se refiere a los coeficientes de Lamé, la ecuación (11.33) puede representarse (después de dividir el segundo y el primer miembro por el producto de los coeficientes de Lamé $h_\xi h_\eta$) de la siguiente manera:

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\zeta}(\dot{E}_\xi h_\eta)+\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\zeta}(\dot{E}_\eta h_\xi)\right\}=-\frac{\partial^2\dot{E}_\zeta}{\partial\zeta^2}. \qquad (11.34)$$

En consecuencia, el segundo miembro de la ecuación (11.26) pasó a ser igual al primer miembro de la ecuación(11.34) y puede sustituirse por el segundo miembro de la expresión (11.34). Como resultado de tal operación se obtiene una ecuación en que entra tan sólo la componente longitudinal del campo eléctrico $\dot{E}_\zeta$:

$$\frac{\partial^2\dot{E}_\zeta}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\xi}\cdot\frac{\partial\dot{E}_\zeta}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\cdot\frac{\partial\dot{E}_\zeta}{\partial\eta}\right)\right\}+$$

$$+\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{E}_\zeta=0. \qquad (11.35)$$

La ecuación es válida si en el sistema de coordenadas usado se cumplen las restricciones indicadas respecto a los coeficientes de Lamé. Matemáticamente, estas restricciones pueden escribirse en la siguiente forma

$$h_\xi,\ h_\eta\neq f(\zeta),\ h_\zeta=1. \qquad (11.36)$$

En cuanto al sentido físico, estas restricciones se reducen a que el sistema examinado que canaliza las ondas electromagnéticas debe ser rectilíneo a lo largo del eje de propagación ζ y los coeficientes de Lamé del sistema de coordenadas utilizado no han de cambiar con el desplazamiento de las ondas a lo largo de este eje.

Las restricciones adoptadas permiten simplificar las fórmulas que relacionan las componentes transversales del campo con la componente longitudinal.

Por ejemplo, en vez de las expresiones (11.21), (11.23), (11.24) y (11.25) se puede escribir, respectivamente:

$$\dot{E}_\xi + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_\xi}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{1}{h_\xi} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_\zeta}{\partial \xi \, \partial \zeta}, \tag{11.37}$$

$$\dot{E}_\eta + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_\eta}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{1}{h_\eta} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_\zeta}{\partial \eta \, \partial \zeta}, \tag{11.38}$$

$$\dot{H}_\eta + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 \dot{H}_\eta}{\partial \zeta^2} = -\frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{1}{h_\xi} \cdot \frac{\partial \dot{E}_\zeta}{\partial \xi}, \tag{11.39}$$

$$\dot{H}_\xi + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 \dot{H}_\xi}{\partial \zeta^2} = \frac{j}{\omega \tilde{\mu}_a} \cdot \frac{1}{h_\eta} \cdot \frac{\partial \dot{E}_\zeta}{\partial \eta}. \tag{11.40}$$

La relación entre las componentes transversales, aunque se ha simplificado algo, reviste, no obstante, un carácter bastante complicado, diferencial.

Ahora, la solución de un problema electrodinámico concreto para un campo del tipo E se representa en la siguiente forma.

En primer lugar, debe resolverse —en un sistema de coordenadas concreto y observando las restricciones (11.36)— la ecuación (11.35). Una vez determinada la componente longitudinal del campo $\dot{E}_\zeta$ se hallan las componentes transversales del campo, valiéndose de las relaciones (11.37) — (11.40), es decir, resolviendo las ecuaciones diferenciales. Más adelante se establecerán las vías para simplificar este procedimiento.

Para una onda del tipo H, cuando la componente longitudinal del campo $\dot{E}_\zeta = 0$, todos los razonamientos podrían ser análogos. Sin embargo, la deducción se simplifica sustancialmente al aplicar el principio de dualidad de permutación.

En efecto, al realizar permutaciones del tipo

$$\dot{E} \rightleftarrows \dot{H}, \quad \tilde{\varepsilon}_a \rightleftarrows -\tilde{\mu}_a$$

el sistema de las ecuaciones iniciales de Maxwell no varía, la componente $\dot{H}_\zeta = 0$ se sustituye por la componente

$$\dot{E}_\zeta = 0 \tag{11.41}$$

y en lugar de una onda del tipo eléctrico se engendra una onda del tipo magnético.

En este caso, la ecuación inicial (11.35) para la componente $\dot{E}_\zeta$ se sustituye por una ecuación análoga para la componente $\dot{H}_\zeta$:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_\zeta}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \cdot \frac{\partial \dot{H}_\zeta}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \cdot \frac{\partial \dot{H}_\zeta}{\partial \eta} \right) \right\} + \\ + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{H}_\zeta = 0. \tag{11.42}$$

Las expresiones para las componentes transversales del campo (11.37) — (11.40) en el caso de una onda del tipo magnético se escriben en la siguiente forma:

$$\dot{H}_\xi + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 \dot{H}_\xi}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{1}{h_\xi} \cdot \frac{\partial^2 \dot{H}_\zeta}{\partial \xi \, \partial \zeta}, \qquad (11.43)$$

$$\dot{H}_\eta + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 \dot{H}_\eta}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{1}{h_\eta} \cdot \frac{\partial^2 \dot{H}_\zeta}{\partial \eta \, \partial \zeta}, \qquad (11.44)$$

$$\dot{E}_\eta + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_\eta}{\partial \zeta^2} = \frac{j}{\omega \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{1}{h_\xi} \cdot \frac{\partial \dot{H}_\zeta}{\partial \xi}, \qquad (11.45)$$

$$\dot{E}_\xi + \frac{1}{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_\xi}{\partial \zeta^2} = -\frac{j}{\omega \tilde{\varepsilon}_a} \cdot \frac{1}{h_\eta} \cdot \frac{\partial \dot{H}_\zeta}{\partial \eta}. \qquad (11.46)$$

El análisis realizado evidencia que la determinación de las componentes transversales del campo por medio de las componentes longitudinales en el caso de ondas de los tipos eléctrico y magnético puede ser bastante sencilla, si se conoce cómo dependen estas componentes de la coordenada ζ. Entonces, en las expresiones (11.37)—(11.40) y (11.43)—(11.46), pueden ser determinadas las segundas derivadas de las componentes transversales del campo respecto a la coordenada ζ, y el problema de hallar las componentes transversales del campo se reducirá a derivar las expresiones para $\dot{E}_\zeta$ o $\dot{H}_\zeta$, determinadas por medio de resolución de las ecuaciones (11.35) o (11.42). En adelante, al investigar los procesos operados en las guías de ondas y resonadores de cavidad, se utilizará precisamente este camino.

CAPÍTULO 12

Nociones generales acerca de los procesos en guías de ondas, o sea, en sistemas reales que canalizan el campo electromagnético

§ 12.1. Planteamiento del problema

En el capítulo 10 se han analizado los procesos que transcurren en un sistema de canalización de dos planos en el cual pueden engendrarse ondas del tipo eléctrico o magnético propagadas a la velocidad de fase, mayor que la velocidad de la luz en el medio que llena

el espacio entre los planos. El sistema se ha investigado, suponiendo que la extensión de los planos que limitan el campo es infinita, y por esta causa dicho sistema resultó ser irreal desde el punto de vista físico. Semejante sistema se denomina *guía de ondas rápidas.*

En el capítulo 9 se han descrito los procesos que surgen en el caso de una reflexión interna total. Se ha establecido [véase la fórmula (9.53)] que la velocidad de fase de la onda superficial es menor que la velocidad de la luz en el medio en que esta onda se propaga. En la fig. 9.4. se ha mostrado un sistema idealizado que permite canalizar el campo electromagnético a una velocidad de fase menor que la velocidad de la luz. La idealización consistía en admitir la extensión infinita de una placa dieléctrica en el plano perpendicular al plano del dibujo. Este sistema de canalización se denomina *guía de ondas lentas.*

Las ondas planas examinadas en el capítulo 7 se propagan en el espacio a una velocidad de fase igual a la velocidad de la luz en este espacio. Puede haber sistemas reales que canalizan el campo electromagnético a una velocidad de fase igual a la velocidad de la luz. En estos sistemas el vector de Poynting está orientado a lo largo del eje del sistema y formado por las componentes del campo electromagnético transversales respecto a este eje. Las componentes longitudinales del campo

$$\dot{E}_\zeta = \dot{H}_\zeta = 0. \tag{12.1}$$

Semejante onda se denomina *onda electromagnética transversal* u *onda del tipo* T.

De este modo, es posible, de principio, la clasificación de dispositivos de guiaondas en tres grupos: 1) guías de ondas rápidas; 2) guías de ondas lentas; 3) guías de ondas en las cuales se propaga la onda del tipo T. Seguidamente, se van a exponer los razonamientos principales referentes a las guías de ondas de cada uno de estos grupos.

§ 12.2. Datos fundamentales sobre los procesos en las guías de ondas rápidas

Para las ondas del tipo eléctrico o magnético son válidas las ecuaciones (11.35) y (11.42) análogas por su forma matemática. Examinemos una de estas ecuaciones, por ejemplo, la ecuación (11.35).

El tipo del sistema de coordenadas concretas y las particularidades del problema concreto determinan cómo depende el campo $\dot{E}_\zeta$ de las coordenadas transversales. Intentemos determinar la dependencia del campo $\dot{E}_\zeta$ respecto a la coordenada longitudinal ζ. Con este fin, efectuemos la separación de las variables en la ecuación (11.35) conforme al método de Fourier.

Representemos $\dot{E}_\zeta$ como el producto de dos funciones:

$$\dot{E}_\zeta = \dot{Z}\dot{E}_{\zeta 0}(\xi, \eta). \tag{12.2}$$

La función $\dot{Z}$ depende de la coordenada ζ y no depende de las coordenadas ξ, η.

La función $\dot{E}_{\zeta 0}$ (ξ, η) depende de las coordenadas ξ, η y no depende de la coordenada ζ. Al sustituir la expresión (12.2) en la ecuación (11.35), obtenemos

$$\dot{E}_{\zeta 0}\frac{\partial^2 \dot{Z}}{\partial \zeta^2} + \dot{Z}\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\xi}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \xi}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\cdot\frac{\dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \eta}\right)\right\} + \omega^2\widetilde{\mu}_a\widetilde{\varepsilon}_a\dot{Z}\dot{E}_{\zeta 0} = 0.$$

Al dividir esta ecuación por el producto $\dot{Z}\dot{E}_{\zeta 0}$, hallamos

$$\frac{1}{\dot{Z}}\cdot\frac{\partial^2 \dot{Z}}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\dot{E}_{\zeta 0}}\cdot\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\xi}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \eta}\right)\right\} =$$

$$= -\omega^2\widetilde{\mu}_a\widetilde{\varepsilon}_a. \tag{12.3}$$

En la relación obtenida la suma de funciones de las coordenadas ζ y ξ, η es igual a una magnitud constante: $\omega^2\widetilde{\mu}_a\widetilde{\varepsilon}_a$. Esta igualdad es realizable si cada una de estas funciones por separado es igual a un número constante, es decir, si se cumplen las relaciones

$$\frac{1}{\dot{Z}}\cdot\frac{\partial^2 \dot{Z}}{\partial \zeta^2} = -\gamma_\varepsilon^2, \tag{12.4}$$

$$\frac{1}{\dot{E}_{\zeta 0}}\cdot\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\xi}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \eta}\right)\right\} =$$

$$= -\omega^2\widetilde{\mu}_a\widetilde{\varepsilon}_a + \gamma_\varepsilon^2. \tag{12.5}$$

Denominemos γ_ε *coeficiente (factor) de propagación del campo en la guía de ondas.*

Al sustituir estas relaciones en la ecuación (12.3), nos convencemos de la igualdad entre el primero y el segundo miembros.

Las relaciones (12.4) y (12.5) permiten obtener las siguientes ecuaciones para las funciones $\dot{Z}$ y $\dot{E}_{\zeta 0}$:

$$\frac{d^2 \dot{Z}}{d\zeta^2} + \gamma_\varepsilon^2\dot{Z} = 0, \tag{12.6}$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\xi}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{\zeta 0}}{\partial \eta}\right)\right\} +$$

$$+ (\omega^2\widetilde{\mu}_a\widetilde{\varepsilon}_a - \gamma_\varepsilon^2)\dot{E}_{\zeta 0} = 0. \tag{12.7}$$

Al introducir la designación

$$\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a - \gamma_g^2 = g^2, \tag{12.8}$$

donde g es el *número transversal de onda en la guía de ondas*, obtenemos

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\xi}\cdot\frac{\partial\dot{E}_{\xi 0}}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\cdot\frac{\partial\dot{E}_{\xi 0}}{\partial\eta}\right)\right\}+g^2\dot{E}_{\xi 0}=0. \tag{12.9}$$

Ecuación análoga puede obtenerse para la componente $\dot{H}_{\xi 0}$ en el caso de ondas del tipo magnético:

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\xi}\cdot\frac{\partial\dot{H}_{\xi 0}}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\cdot\frac{\partial\dot{H}_{\xi 0}}{\partial\eta}\right)\right\}+g^2\dot{H}_{\xi 0}=0. \tag{12.10}$$

También es justa la fórmula equivalente a la expresión (12.2):

$$\dot{H}_\xi = \dot{Z}\dot{H}_{\xi 0}(\xi, \eta). \tag{12.11}$$

La solución de una ecuación ordinaria de segundo orden (12.6) puede escribirse en la forma

$$\dot{Z} = A_1 e^{-j\gamma_g z} + A_2 e^{j\gamma_g z}. \tag{12.12}$$

El coeficiente de propagación del campo en la guía de ondas γ_g es análogo por su sentido al coeficiente de propagación γ de la onda plana [véase la fórmula (7.10)].

De la expresión (12.8) se infiere que

$$\gamma_g^2 = \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a - g^2. \tag{12.13}$$

La comparación de esta expresión con la (7.10) muestra que el coeficiente de propagación del campo en la guía de ondas γ_g se diferencia del coeficiente de propagación γ para las ondas planas.

Al igual que en el caso de ondas planas γ_g puede ser una magnitud compleja, si el medio que llena la guía de ondas tiene pérdidas ($\tilde{\mu}_a$, $\tilde{\varepsilon}_a$ son complejas). Los valores de las partes real e imaginaria de γ_g serán distintas de los valores correspondientes del coeficiente de fase β y del coeficiente de amortiguamiento α definidos por las relaciones (7.27) y (7.28).

Designemos por h' la parte real de γ_g y por h'' su parte imaginaria. Entonces

$$\gamma_g = h' - jh''. \tag{12.14}$$

La parte real h' del coeficiente de propagación lleva el nombre de *número de onda longitudinal*, y la parte imaginaria h'', *coeficiente de atenuación (amortiguamiento) del campo en la guía de ondas a costa de las pérdidas en el dieléctrico que llena la guía de ondas.*

Al sustituir la fórmula (12.14) en la (12.12), obtenemos la expresión

$$\dot{Z} = A_1 e^{-h''z} e^{-jh'z} + A_2 e^{h''z} e^{jh'z}, \tag{12.15}$$

la cual, después de la sustitución en (12.2), nos da

$$\dot{E}_\xi \quad A_1 e^{-h''\zeta} e^{-jh\zeta} \dot{E}_{\xi 0} + A_2 e^{h''\zeta} e^{jh\zeta} \dot{E}_{\xi 0}. \tag{12.16}$$

A continuación, se puede exponer el razonamiento análogamente al expresado en el § 7.3.

Pasemos de la aplitud compleja $\dot{E}_\xi$ al valor instantáneo de esta componente. Partiendo de las fórmulas (1.157) este paso se efectúa mediante las relaciones del tipo

$$E_\xi(t) = \mathrm{Re}\,(\dot{E}_\xi e^{j\omega t}), \tag{12.17}$$

$$E_\xi(t) = \mathrm{Re}\,\{A_1 e^{-h''\zeta} e^{j(\omega t - h\zeta)} \dot{E}_{\xi 0} + A_2 e^{h''\zeta} e^{j(\omega t + h\zeta)} \dot{E}_{\xi 0}\}.$$

Considerando que $\dot{E}_{\xi 0} = |E_{\xi 0}| e^{j\varphi_1}$ obtenemos,

$$E_\xi(t) = \mathrm{Re}\,\{A_1 e^{-h''\zeta} e^{j(\omega t - h\zeta + \varphi_1)} |\dot{E}_{\xi 0}| + A_2 e^{h''\zeta} e^{j(\omega t + h\zeta + \varphi_1)} |\dot{E}_{\xi 0}|\} =$$

$$= A_1 e^{-h''\zeta} |\dot{E}_{\xi 0}| \cos(\omega t - h\zeta + \varphi_1) + A_2 e^{h''\zeta} \dot{E}_{\xi 0} \cos(\omega t + h\zeta + \varphi_1). \tag{12.18}$$

Examinemos la velocidad de traslación a lo largo del eje ζ de los puntos de la fase fijada o la velocidad de fase del primer sumando en la expresión (12.18). Con este objeto fijemos el tiempo t y la coordenada ζ poniendo $t = t_1$, $\zeta = \zeta_1$. En este caso la fase obtiene el valor fijado $\omega t_1 - h\zeta_1 + \varphi_1$. Luego, atribuyamos al tiempo t el incremento dt, y a la coordenada ζ, el incremento $d\zeta$, igualando el nuevo valor de la fase al anterior valor fijado:

$$\omega t_1 - h\zeta_1 + \varphi_1 = \omega(t_1 + dt) - h(\zeta_1 + d\zeta) + \varphi_1.$$

Simplificando los miembros idénticos, obtenemos

$$d\zeta/dt = v_f = \omega/h. \tag{12.19}$$

Una operación análoga realizada con el segundo sumando en la expresión (12.18) lleva a la relación

$$v_f = -\omega/h. \tag{12.20}$$

Los resultados obtenidos permiten afirmar que el primer sumando en la expresión (12.18) es una onda electromagnética que se propaga en la dirección de lado los valores positivos del eje ζ, o sea, una onda incidente en la guía de ondas; el segundo sumando representa una onda que se propaga hacia los valores negativos del eje ζ, es decir, una onda reflejada. Cuando existen pérdidas, la onda incidente decrece a medida que aumenta la coordenada ζ, y la onda reflejada incrementa a medida que va acercándose al obstáculo que la ha reflejado. En un sistema de guiaondas sin pérdidas el coeficiente h'' es igual a cero y la amplitud del campo es invariable.

Razonamientos análogos pueden exponerse también para las ondas del tipo magnético. En este caso, en lugar de las fórmulas (12.16)

y (12.18) conviene escribir

$$\dot{H}_z = B_1 e^{-h''\zeta} e^{-jh\zeta} \dot{H}_{z0} + B_2 e^{h''\zeta} e^{jh\zeta} \dot{H}_{z0}, \tag{12.21}$$

$$\dot{H}_z(t) \quad B_1 e^{-h''\zeta} \dot{H}_{z0} \cos(\omega t - h\zeta + \varphi_2) +$$

$$+ B_2 e^{h''\zeta} \dot{H}_{z0} \cos(\omega t + h\zeta + \varphi_2). \tag{12.22}$$

La expresión (12.19) para la velocidad de fase permite sacar importantes conclusiones. Examinémosla más detalladamente. De las ecuaciones (12.13) y (12.14) se desprende que

$$\gamma_g = h - jh'' = \sqrt{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a - g^2}, \tag{12.23}$$

donde

$$h = \operatorname{Re} \sqrt{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a - g^2}, \tag{12.24}$$

$$h'' = \operatorname{Im} \sqrt{\omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a - g^2}. \tag{12.25}$$

Supongamos, para simplificar, que no tenemos pérdidas y que

$$h = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - g^2}. \tag{12.26}$$

En este caso

$$h'' = 0 \tag{12.27}$$

y la velocidad de fase

$$v_f = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - g^2}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}}},$$

o bien

$$v_f = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}}}, \tag{12.28}$$

donde

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} \tag{12.29}$$

es la velocidad de la luz en un medio cuyos parámetros son μ_a, ε_a.

Si g es un número real y $g^2 > 0$, entonces, a condición de que se observe la desigualdad

$$\frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} < 1 \tag{12.30}$$

v_f es un número real y

$$v_f > c. \tag{12.31}$$

En este caso en el sistema de guíaondas se propagan ondas rápidas. Si se observa la desigualdad

$$\frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} > 1 \tag{12.32}$$

v_f es un número imaginario y la propagación de las ondas cesa.

Es fácil cerciorarse de lo justo de este hecho, escribiendo la expresión (12.26) en la forma

$$h = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}}. \tag{12.33}$$

Si se cumple la condición (12.32)

$$h = -j\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{\frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} - 1}. \tag{12.34}$$

En este caso el primer sumando en la expresión (12.21) que corresponde a la onda incidente, teniendo en cuenta la igualdad (12.27), puede escribirse de la siguiente manera:

$$\dot{H}_t = B_1 e^{-j\left(-j\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{\frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} - 1}\right) z} =$$

$$= B_1 e^{-\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{\frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} - 1}\, z}. \tag{12.35}$$

El campo se atenúa a pesar de que en el sistema de guiaondas no hay pérdidas. Esta atenuación se explica por la interferencia desfavorable de las componentes del campo las cuales, como resultado de la reflexión de las paredes y llegando por vías diferentes, convergen en el mismo punto del sistema de guiaondas.

El caso crítico que delimita la propagación y la atenuación de la onda se presenta al cumplirse la condición

$$\frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} = 1. \tag{12.36}$$

Si se consideran constantes el número de onda transversal, la permitividad (constante dieléctrica) y la permeabilidad magnética y se hace variar la frecuencia angular ω, entonces, el caso crítico que corresponde a la frecuencia angular crítica llega al observarse la igualdad

$$\frac{g^2}{\omega_{cr}^2 \mu_a \varepsilon_a} = 1, \tag{12.37}$$

de donde

$$\omega_{cr} = \frac{g}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} = gc. \tag{12.38}$$

Para

$$\omega > \omega_{cr} \tag{12.39}$$

aparece la desigualdad (12.30), y la onda se propaga en el sistema de guiaondas.

Cuando

$$\omega < \omega_{cr} \tag{12.40}$$

es justa la desigualdad (12.32), y el campo se atenúa en el sistema de guiaondas.

Para

$$\omega = \omega_{cr} \tag{12.41}$$

es justa la relación (12.37). En correspondencia con la expresión (12.28) la velocidad de fase en este caso tiende al infinito.

El sistema de guiaondas lo llena el campo, cuyas componentes a lo largo del eje ξ se encuentran en la misma fase, pero no hay propagación del campo a lo largo del eje.

Empleando (12.38) es fácil obtener fórmulas para la frecuencia crítica f_{cr} y la longitud crítica de onda λ_{cr}:

$$f_{cr} = \frac{gc}{2\pi}, \tag{12.42}$$

$$\lambda_{cr} = \frac{c}{f_{cr}} = \frac{2\pi}{g}. \tag{12.43}$$

Para

$$\lambda < \lambda_{cr} \tag{12.44}$$

es posible la propagación del campo en el sistema de guiaondas.

Para

$$\lambda > \lambda_{cr} \tag{12.45}$$

en la guía de ondas surge la atenuación.

Para

$$\lambda = \lambda_{cr} \tag{12.46}$$

el campo llena el sistema de guiaondas, las componentes del campo a lo largo del eje ζ se encuentran en fase idéntica, mas no tiene lugar la propagación del campo a lo largo del eje ζ.

Basándose en el análisis efectuado, se puede afirmar que un sistema de guiaondas de ondas rápidas deja pasar, filtra oscilaciones electromagnéticas con frecuencias mayores que la crítica o, respectivamente, con longitudes de onda menores que la longitud crítica de onda. De este modo, semejantes sistemas de guiaondas pueden considerarse filtros de altas frecuencias.

En el § 7.4 se ha obtenido la expresión para la velocidad en grupo o velocidad de propagación de la información al ser transferida esta última por ondas planas [véase la expresión (7.41)]. Si un campo electromagnético de composición espectral determinada no se propaga en el espacio libre, sino en una guía de ondas, la deducción de la expresión para la velocidad en grupo del campo en la guía de ondas no se diferencia en nada de la deducción expuesta en el § 7.4. Lo único que es necesario hacer es sustituir el coeficiente de fase para el espacio libre β por el número de onda longitudinal h. En este caso, la velocidad en grupo del campo en la guía de ondas es

$$v_{gr} = \left.\frac{d\omega}{dh}\right|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ h=h_0}} = \left.\frac{1}{dh\ d\omega}\right|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ h=h_0}}. \tag{12.47}$$

Al sustituir aquí la expresión para h (12.26) y haciendo la diferenciación, obtenemos

$$v_{gr} = \left. \frac{1}{\frac{2\omega\mu_a\varepsilon_a}{2\sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a - g^2}}} \right|_{\omega=\omega_0}$$

o bien, teniendo en cuenta la igualdad (12.29)

$$v_{gr} = c\sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega_0^2\mu_a\varepsilon_a}}. \tag{12.48}$$

Al comparar la expresión obtenida con la fórmula para la velocidad de fase (12.28) puede deducirse la siguiente relación:

$$v_{gr}v_f = c^2. \tag{12.49}$$

Como se infiere de la fórmula (12.48)

$$v_{gr} < c. \tag{12.50}$$

De este modo, la velocidad de transferencia de la información en las guías de ondas no puede superar la velocidad de la luz en el medio que llena el sistema de guiaondas.

§ 12.3. Simplificación de las ecuaciones que enlazan las componentes transversales del campo con las longitudinales al usar guías de ondas rápidas

Examinemos las relaciones válidas para una onda incidente del tipo eléctrico. De conformidad con las expresiones (12.2) y (12.12) escribamos (suponiendo que $A_1 = 1$)

$$\dot{E}_\zeta = \dot{E}_{\zeta 0}e^{-j\gamma_g\zeta}. \tag{12.51}$$

Una dependencia análoga respecto a la coordenada ζ existe para las componentes transversales del campo, puesto que todas las componentes del campo deben tener idéntica la velocidad de fase. En virtud de lo expuesto son justas las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_\xi &= \dot{E}_{\xi 0}e^{-j\gamma_g\zeta}, \\ \dot{E}_\eta &= \dot{E}_{\eta 0}e^{-j\gamma_g\zeta}, \\ \dot{H}_\xi &= \dot{H}_{\xi 0}e^{-j\gamma_g\zeta}, \\ \dot{H}_\eta &= \dot{H}_{\eta 0}e^{-j\gamma_g\zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{12.52}$$

Sustituyamos las expresiones para $\dot{E}_\xi$ y $\dot{E}_\zeta$ en la ecuación (11.37):

$$\dot{E}_{\xi 0}e^{-j\gamma_g\zeta} - \frac{\gamma_g^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}\dot{E}_{\xi 0}e^{-j\gamma_g\zeta} = \frac{-j\gamma_g}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}\cdot\frac{1}{h_\xi}\cdot\frac{\partial\dot{E}_{\zeta 0}}{\partial\xi}e^{-j\gamma_g\zeta}.$$

Multipliquemos la relación obtenida por $\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a$ y agrupemos los términos:

$$\dot{E}_{\zeta 0}e^{-j\gamma_g z}(\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a-\gamma_g^2)=-j\frac{\gamma_g}{h_\xi}\cdot\frac{\partial\dot{E}_{\zeta 0}}{\partial\xi}e^{-j\gamma_g z}.$$

Seguidamente, utilizando la primera de las relaciones (12.52) y la fórmula (12.8), obtenemos

$$\dot{E}_\xi=-j\frac{\gamma_g}{h_\xi g^2}\cdot\frac{\partial\dot{E}_{\zeta 0}}{\partial\xi}e^{-j\gamma_g z}. \tag{12.53}$$

De manera análoga pueden obtenerse las expresiones para las componentes transversales del campo en el caso de ondas del tipo eléctrico:

$$\dot{E}_\eta=-j\frac{\gamma_g}{h_\eta g^2}\cdot\frac{\partial\dot{E}_{\zeta 0}}{\partial\eta}e^{-j\gamma_g z}, \tag{12.54}$$

$$\dot{H}_\xi=j\frac{\omega\tilde{\varepsilon}_a}{h_\eta g^2}\cdot\frac{\partial\dot{E}_{\zeta 0}}{\partial\eta}e^{-j\gamma_g z}, \tag{12.55}$$

$$\dot{H}_\eta=-j\frac{\omega\tilde{\varepsilon}_a}{h_\xi g^2}\cdot\frac{\partial\dot{E}_{\zeta 0}}{\partial\xi}e^{-j\gamma_g z}, \tag{12.56}$$

$$\dot{H}_\zeta=0. \tag{12.57}$$

De manera semejante pueden hallarse las fórmulas para las componentes transversales del campo si se trata de las ondas del tipo magnético. Estas fórmulas son fáciles de deducir valiéndose del principio de dualidad de permutación. Realicemos en las expresiones (12.53)—(12.57) permutaciones del tipo $\dot{H}\to\dot{E}$, $\tilde{\varepsilon}_a\to\tilde{\mu}_a$:

$$\dot{H}_\xi=-j\frac{\gamma_g}{h_\xi g^2}\cdot\frac{\partial\dot{H}_{\zeta 0}}{\partial\xi}e^{-j\gamma_g z}, \tag{12.58}$$

$$\dot{H}_\eta=-j\frac{\gamma_g}{h_\eta g^2}\cdot\frac{\partial\dot{H}_{\zeta 0}}{\partial\eta}e^{-j\gamma_g z}, \tag{12.59}$$

$$\dot{E}_\xi=-j\frac{\omega\tilde{\mu}_a}{h_\eta g^2}\cdot\frac{\partial\dot{H}_{\zeta 0}}{\partial\eta}e^{-j\gamma_g z}, \tag{12.60}$$

$$\dot{E}_\eta=j\frac{\omega\tilde{\mu}_a}{h_\xi g^2}\cdot\frac{\partial\dot{H}_{\zeta 0}}{\partial\xi}e^{-j\gamma_g z}, \tag{12.61}$$

$$\dot{E}_\zeta=0. \tag{12.62}$$

También es posible escribir una expresión análoga a (12.51)

$$\dot{H}_\zeta=\dot{H}_{\zeta 0}e^{-j\gamma_g z}. \tag{12.63}$$

Las relaciones obtenidas se denominan fórmulas de paso de las componentes longitudinales del campo a las transversales. No debe olvidarse que son válidas observándose las restricciones (11.36).

Si en los sistemas de guiaondas no hay pérdidas, en las relaciones deducidas es necesario realizar cambios del tipo

$$\tilde{\varepsilon}_a \to \varepsilon_a, \quad \tilde{\mu}_a \to \mu_a, \quad \gamma_g \to h. \tag{12.64}$$

Cabe señalar que las fórmulas deducidas no consideran las pérdidas en las paredes metálicas de la guía de ondas que limitan el campo. Las pérdidas tenidas en cuenta debido a la introducción del coeficiente de atenuación h'' son pérdidas en el medio que llena la guía de ondas. Además del coeficiente de atenuación h'' cuya aparición es debida a las pérdidas en el dieléctrico que llena la guía de ondas, puede surgir el coeficiente de atenuación h' que caracteriza el amortiguamiento del campo a costa de pérdidas en el metal.

En este caso el coeficiente de propagación del campo en la guía de ondas es

$$\gamma_g = h - jh' - jh''. \tag{12.65}$$

Cuando las pérdidas en el dieléctrico pueden despreciarse, mientras que las pérdidas en el metal deben tenerse en cuenta, resulta

$$\gamma_g = h - jh'. \tag{12.66}$$

El cálculo de las pérdidas surgidas en las paredes metálicas del sistema de guiaondas se tratará en los capítulos posteriores.

§ 12.4. Datos fundamentales sobre los procesos en las guías de ondas lentas

En el §12.2 se ha deducido la expresión (12.28) para la velocidad de fase en los sistemas de guiaondas. Se había señalado que para el número de onda transversal real g la velocidad de fase supera la velocidad de la luz en un medio cuyos parámetros son μ_a, ε_a.

Para conseguir que la velocidad de fase sea menor que la velocidad de la luz, el número de onda transversal debe ser imaginario. En otras palabras, el número de onda transversal g en las fórmulas deducidas se convierte en jp:

$$g \to jp. \tag{12.67}$$

Entonces

$$g^2 \to -p^2. \tag{12.68}$$

Teniendo en cuenta este hecho en la fórmula (12.28) obtenemos

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}}}. \tag{12.69}$$

En este caso es justa la desigualdad

$$v_f < c. \tag{12.70}$$

El coeficiente de propagación, de acuerdo con las expresiones (12.23)—(12.25) para el caso de ondas lentas es

$$\gamma_g = h - jh'' = \sqrt{\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a + p^2}, \tag{12.71}$$

donde

$$h = \mathrm{Re}\sqrt{\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a + p^2}, \tag{12.72}$$

$$h'' = \mathrm{Im}\sqrt{\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a + p^2}. \tag{12.73}$$

Si no hay pérdidas en el medio que llena la guía de ondas

$$h'' = 0$$

y

$$\gamma_g = h = \sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a + p^2}. \tag{12.74}$$

De la misma manera que en el análisis de guías de ondas rápidas, las fórmulas deducidas no toman el consideración las pérdidas en las paredes metálicas de las guías de ondas.

Cuando se determina la velocidad en grupo no se permite aplicar formalmente la expresión (12.48) sustituyendo en ésta g^2 por $-p^2$. De hacerlo, resultaría que la velocidad en grupo que determina la velocidad con que se transmite la información llegaría a ser mayor que la velocidad de la luz, lo cual contradice la conocida tesis de Einstein. La expresión para la velocidad en grupo debe deducirse teniendo en cuenta las relaciones fundamentales (12.47) y (12.74). Además, es necesario tener presente que el *número de onda transversal p en las guías de ondas lentas es función de la frecuencia* ω. Valiéndonos de la fórmula (12.47), obtenemos

$$v_{gr} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega}\sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a + p^2}} = \frac{1}{\frac{2\omega\mu_a\varepsilon_a + 2p\frac{dp}{d\omega}}{2\sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a + p^2}}},$$

$$v_{gr} = \frac{\sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a + p^2}}{\omega\mu_a\varepsilon_a + p\frac{dp}{d\omega}}. \tag{12.75}$$

Si se conoce la ley de variación del número de onda transversal p para un sistema guiaondas retardador concreto es posible hallar la velocidad en grupo.

Las ecuaciones principales para las componentes longitudinales del campo en el caso de ondas de los tipos eléctrico y magnético se escriben, respectivamente, de la siguiente manera:

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\xi}\cdot\frac{\partial\dot{E}_{z0}}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\cdot\frac{\partial\dot{E}_{z0}}{\partial\eta}\right)\right\} - p^2\dot{E}_{z0} = 0, \tag{12.76}$$

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\xi}\cdot\frac{\partial\dot{H}_{z0}}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\cdot\frac{\partial\dot{H}_{z0}}{\partial\eta}\right)\right\} \quad p^2\dot{H}_{z0} \quad 0. \tag{12.77}$$

Las fórmulas de paso que relacionan las componentes transversales del campo con las longitudinales pueden obtenerse de las expresiones (12.53) (12.62), teniendo en cuenta la expresión (12.68).

En este caso obtenemos

para las ondas del tipo eléctrico:

$$\dot{E}_\xi = -j\frac{\gamma_g}{h_\xi^2}\cdot\frac{\partial\dot{E}_{z0}}{\partial\xi}e^{-j\gamma_g z}, \tag{12.78}$$

$$\dot{E}_\eta = j\frac{\gamma_g}{h_\eta^2}\cdot\frac{\partial\dot{E}_{z0}}{\partial\eta}e^{-j\gamma_g z}, \tag{12.79}$$

$$\dot{H}_\xi = -j\frac{\omega\tilde{\varepsilon}_a}{h_\eta^2}\cdot\frac{\partial\dot{E}_{z0}}{\partial\eta}e^{-j\gamma_g z}, \tag{12.80}$$

$$\dot{H}_\eta = j\frac{\omega\tilde{\varepsilon}_a}{h_\xi^2}\cdot\frac{\partial\dot{E}_{z0}}{\partial\xi}e^{-j\gamma_g z}, \tag{12.81}$$

$$\dot{H}_\zeta = 0; \tag{12.82}$$

para las ondas del tipo magnético:

$$\dot{H}_\xi = j\frac{\gamma_g}{h_\xi^2}\cdot\frac{\partial\dot{H}_{z0}}{\partial\xi}e^{-j\gamma_g z}, \tag{12.83}$$

$$\dot{H}_\eta = j\frac{\gamma_g}{h_\eta^2}\cdot\frac{\partial\dot{H}_{z0}}{\partial\eta}e^{-j\gamma_g z}, \tag{12.84}$$

$$\dot{E}_\xi = j\frac{\omega\tilde{\mu}_a}{h_\eta^2}\cdot\frac{\partial\dot{H}_{z0}}{\partial\eta}e^{-j\gamma_g z}, \tag{12.85}$$

$$\dot{E}_\eta = -j\frac{\omega\tilde{\mu}_a}{h_\xi^2}\cdot\frac{\partial\dot{H}_{z0}}{\partial\xi}e^{-j\gamma_g z}, \tag{12.86}$$

$$\dot{E}_\zeta = 0. \tag{12.87}$$

Si no hay pérdidas en los sistemas de guiaondas, entonces, en las relaciones deducidas deben realizarse las variaciones del tipo (12.64).

§ 12. 5. Datos fundamentales sobre los procesos en las guías de ondas que canalizan ondas del tipo T

El rasgo característico de las ondas del tipo T es la igualdad a cero de las componentes longitudinales del campo [véase la expresión (12.1)]. En una onda semejante el vector de Poynting está orientado a lo largo del eje de la guía de ondas ζ. En este caso el frente de la onda se desplaza a lo largo del eje de la guía de ondas y la velocidad de fase debe ser igual a la velocidad de la luz en el medio considerado:

$$v_f = c. \tag{12.88}$$

De acuerdo con la expresión (12.28) la igualdad (12.88) se observa a condición de que

$$g = 0. \tag{12.89}$$

El número de onda transversal en el caso de ondas del tipo T es igual a cero. Ello es también un rasgo característico de las ondas de este tipo.

De la fórmula (12.23) deriva que para las ondas del tipo T

$$\gamma_g = \omega \sqrt{\tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a}. \tag{12.90}$$

Al comparar esta expresión con la (7.10) se puede sacar la conclusión de que el coeficiente de propagación en una guía de ondas del tipo T es igual a dicho coeficiente en un medio ilimitado con los parámetros $\tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a$:

$$\gamma_g = \gamma. \tag{12.91}$$

Cuando se trata de ondas del tipo T son justas las fórmulas (7.26), (7.27) y (7.28).

La velocidad en grupo se define mediante la relación (12.48). Si se observa la condición $g = 0$

$$v_{gr} = c. \tag{12.92}$$

Para las ondas del tipo T la velocidad en grupo es igual a la de la luz en el medio que llena la guía de ondas.

Las fórmulas de paso que relacionan las componentes transversales del campo con las longitudinales, no pueden aplicarse a las ondas del tipo T a raíz de que las componentes longitudinales son iguales a cero.

Las relaciones (12.38), (12.42) y (12.43), en el caso de ondas del tipo T y si se observa la igualdad $g = 0$, conducen a los siguientes resultados:

$$\omega_{cr} = 0, \; f_{cr} = 0, \; \lambda_{cr} \to \infty. \tag{12.93}$$

La frecuencia crítica es igual a cero. Esto significa que las oscilaciones de todas las frecuencias, incluyendo la corriente continua, pueden propagarse en los sistemas de guíaondas que utilizan las ondas del tipo T. Esta circunstancia es una ventaja importante de las ondas de semejante tipo.

CAPITULO 13

Guía de ondas rectangular

§ 13.1. Solución de la ecuación fundamental para las componentes longitudinales del campo en una guía de ondas rectangular

Para las ondas del tipo eléctrico debe aplicarse como fundamental la ecuación (12.9). Evidentemente, al analizar los sistemas electrodinámicos rectangulares es racional emplear el sistema de coordena-

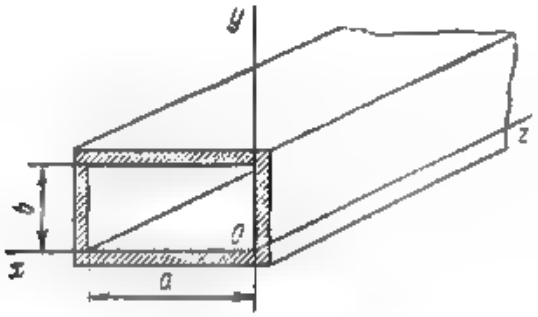

FIG. 13.1

das cartesianas. Dispongamos los ejes de coordenadas tal como se indica en la fig. 13.1. Elijamos la siguiente correspondencia entre las coordenadas curvilíneas y las cartesianas:

$$\xi \to x,\ \eta \to y,\ \zeta \to z,\ h_\xi = h_\eta = 1. \tag{13.1}$$

El sistema de coordenadas satisface las restricciones (11.36) y, por consiguiente, es posible utilizar las ecuaciones fundamentales (12.9), (12.10) y las fórmulas de paso (12.53) — (12.62).

En el sistema de coordenadas cartesiano la ecuación fundamental se escribe en la forma

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{z0}}{\partial y^2} + g^2 \dot{E}_{z0} = 0. \tag{13.2}$$

En la misma forma se escribe la ecuación para la componente longitudinal del campo magnético:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_{z0}}{\partial y^2} + g^2 \dot{H}_{z0} = 0. \tag{13.3}$$

Estas ecuaciones se resuelven empleando el método de Fourier. Supongamos que

$$\dot{E}_{z0} = XY. \tag{13.4}$$

La función X depende de la coordenada x y no depende de la coordenada y. La función Y depende de la coordenada y y no depende de la coordenada x. Al sustituir la expresión (13.4) en la ecuación (13.2), obtenemos

$$Y\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+X\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}+g^2XY=0.$$

Dividamos esta ecuación por XY:

$$\frac{1}{X}\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{1}{Y}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=-g^2.$$

El primer sumando es función solamente de la coordenada x, y el segundo, función solamente de la coordenada y. Su suma puede ser igual al número constante $-g^2$ tan sólo en el caso de que cada sumando por separado es igual a un número constante. Supongamos que

$$\frac{1}{X}\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=-g_x^2,\quad \frac{1}{Y}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=-g_y^2, \tag{13.5}$$

donde

$$g_x^2+g_y^2=g^2. \tag{13.6}$$

Las ecuaciones (13.5) son ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes Por eso, las derivadas parciales pueden sustituirse por derivadas corrientes, escribiendo las ecuaciones en la forma

$$\frac{d^2X}{dx^2}+g_x^2X=0, \tag{13.7}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2}+g_y^2Y=0. \tag{13.8}$$

El campo electromagnético se propaga en la guía de ondas reflejándose múltiplemente de sus paredes, debido a lo cual, por interferencia, a lo largo de las coordenadas x o y se engendran ondas estacionarias, como se ha demostrado en el §10.4 al analizar una guía de ondas de dos planos. En virtud de ello la solución de las ecuaciones (13 7) y (13 8) se escribirá de la siguiente manera.

$$X = A_1\cos(g_x x)+A_2\operatorname{sen}(g_x x), \tag{13.9}$$

$$Y = B_1\cos(g_y y)+B_2\operatorname{sen}(g_y y). \tag{13 10}$$

De acuerdo con la fórmula (13.4)

$$\dot{E}_{x0}=\{A_1\cos(g_x x)+A_2\operatorname{sen}(g_x x)\}\{B_1\cos(g_y y)+B_2\operatorname{sen}(g_y y)\}. \tag{13.11}$$

La ecuación (13.3) se resuelve análogamente:

$$\dot{H}_{x0}=\{A_3\cos(g_x x)+A_4\operatorname{sen}(g_x x)\}\{B_3\cos(g_y y)+B_4\operatorname{sen}(g_y y)\}. \tag{13.12}$$

Hasta el momento presente el análisis no dependo de si se investigan las ondas del tipo E o del tipo H Para determinar las constantes

es necesario aprovechar las condiciones límites que se escriben de distinta forma para las ondas de diferentes tipos. Por eso el examen ulterior debe verificarse por separado para cada uno de los tipos de ondas.

§ 13.2. Ondas del tipo eléctrico

Cuando se trata de ondas del tipo eléctrico la componente del campo $\dot{E}_{z0}$ es tangente a las cuatro paredes de la guía de ondas. Si consideramos que el metal de las paredes es ideal y posee conductibilidad infinita γ_{el}, es posible utilizar las condiciones límites junto a la superficie del metal ideal (8.19). En este caso se puede escribir

$$\dot{E}_{z0} = 0 \text{ (junto a las paredes de la guía de ondas).} \quad (13.13)$$

Conforme a la fig. 13.1 y la fórmula (13.11) tenemos junto a la pared lateral derecha de la guía de ondas para $x = 0$

$$A_1 \{B_1 \cos(g_y y) + B_2 \operatorname{sen}(g_y y)\} = 0,$$

de donde

$$A_1 = 0. \quad (13.14)$$

Junto a la pared lateral izquierda de la guía de ondas para $x = a$ y teniendo en cuenta la expresión (13.14), es justa la relación

$$A_2 \operatorname{sen}(g_x a) \{B_1 \cos(g_y y) + B_2 \operatorname{sen}(g_y y)\} = 0.$$

El coeficiente A_2 no puede ser igual a cero a raíz de que en este caso desaparece la componente longitudinal del campo $\dot{E}_{z0}$ [véase la expresión (13.11)]. Por consiguiente

$$\operatorname{sen}(g_x a) = 0. \quad (13.15)$$

y

$$g_x a = m\pi,$$

donde m es una serie de números enteros.

La serie m no puede empezar por cero, ya que para $m = 0$ $g_x = 0$, y la componente longitudinal del campo $\dot{E}_{z0}$ desaparece. De este modo

$$g_x = \frac{m\pi}{a} \quad (m = 1, 2, 3 \ldots). \quad (13.16)$$

Al sustituir las expresiones (13.14) y (13.16) en la fórmula (3.11), obtenemos

$$\dot{E}_{z0} = A_2 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \{B_1 \cos(g_y y) + B_2 \operatorname{sen}(g_y y)\}. \quad (13.17)$$

Junto a la pared inferior de la guía de ondas para $y = 0$ debe observarse la igualdad

$$A_2 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) B_1 = 0,$$

de donde

$$B_1 = 0. \quad (13.18)$$

Junto a la pared superior de la guía de ondas para $y = b$ es justa la relación

$$A_2 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) B_2 \operatorname{sen}(g_y b) = 0.$$

El coeficiente B_2 no puede ser igual a cero ya que, teniendo en cuenta la igualdad (13.18), la componente longitudinal del campo $\dot{E}_{z0}$ [véase la expresión (13.17)] desaparece. En consecuencia

$$\operatorname{sen}(g_y b) = 0, \text{ y } g_y b = n\pi,$$

donde n es una serie de números enteros.

En este caso se ha elegido el símbolo n y no m por la razón de que no es obligatorio que los números enteros m y n coincidan.

La serie n no puede comenzar por cero puesto que para $n = 0$ $g_y = 0$, y la componente longitudinal del campo $\dot{E}_{z0}$ desaparece. Entonces

$$g_y = \frac{n\pi}{b} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots) \tag{13.19}$$

y la expresión (13.17) se escribe en la forma definitiva:

$$\dot{E}_{z0} = C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right), \tag{13.20}$$

donde

$$C_1 = A_2 B_2. \tag{13.21}$$

El número de onda transversal g se define por las expresiones (13.6), (13.16) y (13.19):

$$g^2 = g_{mn}^2 = g_x^2 + g_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \tag{13.22}$$

$$g = g_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \tag{13.23}$$

Por medio de las condiciones límites se hallaron todas las constantes, a excepción de la constante de amplitud C_1, la cual no puede determinarse con el planteamiento dado del problema, puesto que en las ecuaciones iniciales de Maxwell las corrientes extrínsecas $\dot{J}_{e1}$ y $\dot{J}_m$ que definen la amplitud del campo se han tomado iguales a cero.

Como se infiere de la expresión (13.20), es posible un número infinito de valores de la componente longitudinal del campo $\dot{E}_{z0}$ en dependencia de los valores de los números m y n. Cada valor concreto de los números m y n caracteriza una onda de un tipo concreto designada por E_{mn}. Por ejemplo, para $m = 1$ y $n = 2$ aparece una onda del tipo E_{12}, etc.

Si se conoce la componente longitudinal del campo no es difícil hallar las componentes transversales del mismo valiéndose de las

fórmulas de paso (12.53) (12.57) Considerando que el dieléctrico dentro de la guía de ondas es ideal y que las paredes de ésta son de conductibilidad infinita, o sea, cumpliéndose las condiciones (12.64), podemos escribir dichas fórmulas en el sistema de coordenadas cartesianas. Haciendo uso de la correspondencia (13.1), obtenemos

$$\dot{E}_x = -j\frac{h}{g^2}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial x}e^{-jhz}, \tag{13.24}$$

$$\dot{E}_y = -j\frac{h}{g^2}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial y}e^{-jhz}, \tag{13.25}$$

$$\dot{H}_x = j\frac{\omega\varepsilon_a}{g^2}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial y}e^{-jhz}, \tag{13.26}$$

$$\dot{H}_y = -j\frac{\omega\varepsilon_a}{g^2}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial x}e^{-jhz}, \tag{13.27}$$

$$\dot{H}_z = 0. \tag{13.28}$$

Al sustituir en estas expresiones el valor de $\dot{E}_{z0}$ (13.20) y teniendo en cuenta las relaciones (12.51) y (13.23), se puede escribir

$$\dot{E}_x = j\frac{h}{g^2_{mn}}C_1\frac{m\pi}{a}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jhz}, \tag{13.29}$$

$$\dot{E}_y = j\frac{h}{g^2_{mn}}C_1\frac{n\pi}{b}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jhz}, \tag{13.30}$$

$$\dot{E}_z = C_1\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jhz}, \tag{13.31}$$

$$\dot{H}_x = -j\frac{\omega\varepsilon_a}{g^2_{mn}}C_1\frac{n\pi}{b}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jhz}, \tag{13.32}$$

$$\dot{H}_y = j\frac{\omega\varepsilon_a}{g^2_{mn}}C_1\frac{m\pi}{a}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-jhz}, \tag{13.33}$$

$$\dot{H}_z = 0. \tag{13.34}$$

Las relaciones obtenidas permiten hallar todas las componentes del campo para las ondas del tipo E_{mn}.

El número de onda longitudinal h se determina por medio de la expresión (12.26). En el caso considerado éste puede escribirse en la forma

$$h = h_{mn} = \sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a - g^2_{mn}}. \tag{13.35}$$

§ 13.3. Ondas del tipo magnético

En el caso de ondas del tipo magnético las componentes del campo eléctrico $\dot{E}_x$ y $\dot{E}_y$ que se definen por las fórmulas de paso (12.58)—(12.62) son tangenciales a las paredes de la guía de ondas. Escribamos estas fórmulas en el sistema de coordenadas cartesiano valién-

donos de las relaciones (13.1) y (12.64):

$$\dot{H}_x = -j\frac{h}{g^2}\cdot\frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial x}e^{-jhz}, \tag{13.36}$$

$$\dot{H}_y = -j\frac{h}{g^2}\cdot\frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial y}e^{-jhz}, \tag{13.37}$$

$$\dot{E}_x = -j\frac{\omega\mu_a}{g^2}\cdot\frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial y}e^{jhz}, \tag{13.38}$$

$$\dot{E}_y = j\frac{\omega\mu_a}{g^2}\cdot\frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial x}e^{-jhz}, \tag{13.39}$$

$$\dot{E}_z = 0. \tag{13.40}$$

Hallemos las componentes $\dot{E}_x$ y $\dot{E}_y$, sustituyendo en las fórmulas (13.38) y (13.39) la expresión (13.12):

$$\dot{E}_x = -j\frac{\omega\mu_a}{g^2}e^{-jhz}\{A_3\cos(g_x x)+A_4\operatorname{sen}(g_x x)\}\times$$
$$\times\{-B_3 g_y\operatorname{sen}(g_y y)+B_4 g_y\cos(g_y y)\}, \tag{13.41}$$

$$\dot{E}_y = j\frac{\omega\mu_a}{g^2}e^{-jhz}\{-A_3 g_x\operatorname{sen}(g_x x)+A_4 g_x\cos(g_x x)\}\times$$
$$\times\{B_3\cos(g_y y)+B_4\operatorname{sen}(g_y y)\}. \tag{13.42}$$

En correspondencia con las condiciones límites $\dot{E}_z = 0$, $\dot{E}_y = 0$ junto a las paredes de la guía de ondas tenemos

$$\dot{E}_y = 0 \text{ (para } x=0 \text{ y } x=a), \tag{13.43}$$

$$\dot{E}_x = 0 \text{ (para } y=0 \text{ e } y=b). \tag{13.44}$$

Teniendo en cuenta la expresión (13.42) y las condiciones (13.43), obtenemos

$$j\frac{\omega\mu_a}{g^2}e^{-jhz}A_4 g_x\{B_3\cos(g_y y)+B_4\operatorname{sen}(g_y y)\}=0,$$

de donde $A_4 g_x = 0$

La condición $g_x = 0$, como se demostrará más adelante, se cumple tan sólo en casos particulares. La condición más general es

$$A_4 = 0. \tag{13.45}$$

Para $x = a$ a partir de la expresión (13.42) y la condición (13.43) se infiere que

$$-j\frac{\omega\mu_a}{g^2}e^{-jhz}A_3 g_x\operatorname{sen}(g_x a)\{B_3\cos(g_y y)+B_4\operatorname{sen}(g_y y)\}=0.$$

Como se ha señalado, la condición $g_x = 0$ se cumple solamente en casos particulares. El coeficiente A_3 no puede ser igual a cero, ya que al observarse la condición (13.45) la componente longitudinal

del campo $\dot{H}_{z0}$ [véase la fórmula (13.12)] desaparece y, por consiguiente, también desaparecen las demás componentes del campo en la guía de ondas. Queda suponer que

$$\operatorname{sen}(g_x a) = 0.$$

De aquí $g_x a = m\pi$, donde m es una serie de números enteros. Si esta serie comienza por cero, entonces, para $m = 0$, $g_x = 0$. En este caso en la expresión (13.12) desaparece la dependencia del campo respecto de la coordenada x y se conserva la dependencia respecto de la coordenada y. Además, de acuerdo con la fórmula (13.38), existe la componente del campo eléctrico $\dot{E}_x$. La componente del campo $\dot{E}_y$ se anula. De este modo se puede escribir

$$g_x = \frac{m\pi}{a} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots). \tag{13.47}$$

Se ve que la magnitud g_x puede ser igual a cero sólo en un caso particular, siendo $m = 0$.

Se han utilizado las condiciones límites (13.43). Al pasar a las condiciones límites (13.44) escribamos la expresión (13.41) para la componente del campo $\dot{E}_x$ teniendo en cuenta las relaciones (13.45) y (13.47):

$$\dot{E}_x = -j\frac{\omega\mu_a}{g^2} e^{-j\beta z} A_3 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right)\{-B_3 g_y \operatorname{sen}(g_y y) + B_4 g_y \cos(g_y y)\}. \tag{13.48}$$

Hagamos uso de las condiciones límites (13.44). Para $y = 0$

$$\dot{E}_x = -j\frac{\omega\mu_a}{g^2} e^{-j\beta z} A_3 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) B_4 g_y = 0,$$

de donde $B_4 g_y = 0$.

Como se explicará más adelante, la magnitud g_y puede ser igual a cero solamente en un caso particular. Por consiguiente,

$$B_4 = 0. \tag{13.49}$$

Para $y = b$

$$\dot{E}_x = j\frac{\omega\mu_a}{g^2} e^{-j\beta z} A_3 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) B_3 g_y \operatorname{sen}(g_y b) = 0.$$

El coeficiente B_3 no puede ser igual a cero, puesto que, teniendo en cuenta la expresión (13.49), la componente $\dot{H}_{z0}$ en la fórmula (13.12) desaparece, igualmente desaparecen las demás componentes del campo. Queda por suponer que $\operatorname{sen}(g_y b) = 0$, $g_y b = n\pi$, donde n es una serie de números enteros. Para $n = 0$ $g_y = 0$. En este caso la componente del campo $\dot{H}_{z0}$ no depende de la coordenada y, y, si g_x no es igual a cero, se conserva la dependencia del campo respecto de la coordenada x. De conformidad con la fórmula (13.39) se engendra la componente del campo eléctrico $\dot{E}_y$, y este campo puede exis-

tir. En consecuencia, ya sea g_x, ya sea g_y, alternativamente, pueden ser iguales a cero, en cambio, la igualdad simultánea a cero de estas constantes es imposible. De ser así, la componente longitudinal del campo H_{zn} no hubiera sido función de las coordenadas x e y, y las demás componentes del campo no hubieran existido.

De este modo, la serie de números n puede empezar por cero

$$g_y = \frac{n\pi}{b} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots). \tag{13.50}$$

El número de onda transversal g se determina para las ondas del tipo magnético de la misma forma que para las ondas del tipo eléctrico, aplicando la relación (13.23).

Teniendo en cuenta las relaciones (13.23), (12.63), (13.45), (13.47), (13.49) y (13.50), haciendo uso de las fórmulas (13.12), (13.36)—(13.40) y suponiendo que

$$A_n B_n = C_n, \tag{13.51}$$

se puede escribir las siguientes expresiones para las componentes del campo de una onda del tipo magnético:

$$\dot{H}_x = j\frac{h}{g_{mn}^2} C_n \frac{m\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jhz}, \tag{13.52}$$

$$\dot{H}_y = j\frac{h}{g_{mn}^2} C_n \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jhz}, \tag{13.53}$$

$$\dot{H}_z = C_n \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jhz}, \tag{13.54}$$

$$\dot{E}_x = j\frac{\omega\mu_a}{g_{mn}^2} C_n \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{b}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jhz}, \tag{13.55}$$

$$\dot{E}_y = -j\frac{\omega\mu_a}{g_{mn}^2} C_n \frac{m\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jhz}, \tag{13.56}$$

$$\dot{E}_z = 0. \tag{13.57}$$

que permiten obtener todas las componentes del campo para las ondas del tipo H_{mn}. El número de onda longitudinal h se determina por la fórmula (13.35).

§ 13.4. Velocidad de fase, longitud de onda en la guía de ondas, longitud crítica de onda, frecuencia crítica. Ondas de los tipos fundamentales en una guía de ondas rectangular

La expresión (12.28) que caracteriza la velocidad de fase en las guías de ondas rápidas puede simplificarse valiéndose de las relaciones (12.29), (12.43) y de las fórmulas

$$\lambda = c/f, \tag{13.58}$$

$$\frac{g^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a} = \frac{g^2c^2}{4\pi^2f^2} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2. \tag{13.59}$$

Aquí λ es la longitud de onda en un espacio libre con parámetros μ_a, ε_a.

Al sustituir la expresión (13.59) en (12.28), hallamos la velocidad de fase en la guía de ondas:

$$v_t = \frac{c}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{cr})^2}}. \tag{13.60}$$

La velocidad en grupo puede obtenerse mediante la fórmula (12.48), o bien, de la igualdad (12.49), de la cual se desprende que $v_{gr} = c^2/v_t$

$$v_{gr} = c\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{cr})^2}. \tag{13.61}$$

Introduzcamos la designación de la longitud de onda en la guía de ondas

$$\lambda_g = v_t/f. \tag{13.62}$$

Teniendo en cuenta la fórmula (13.58), obtenemos

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{cr})^2}}. \tag{13.63}$$

La longitud de onda en una guía de ondas rápidas es mayor que dicha longitud en el espacio libre. Hallemos las expresiones para la longitud crítica de onda y la frecuencia crítica en una guía de ondas rectangular.

La longitud crítica de onda se define por medio de la relación (12.43), y el número de onda transversal g, por la fórmula (13.23). De aquí se desprende que

$$\lambda_{cr} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}},$$

o bien

$$\lambda_{cr} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}} \tag{13.64}$$

La frecuencia angular crítica puede hallarse a partir de la relación (12.38). Empleando la fórmula (13.23), obtenemos

$$\omega_{cr} = c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \tag{13.65}$$

La frecuencia crítica de las oscilaciones definida por la fórmula (12.42) puede escribirse en la forma

$$f_{cr} = c/2\sqrt{(m/a)^2+(n/b)^2}. \tag{13.66}$$

Las relaciones obtenidas para la velocidad de fase, la longitud de onda en la guía de ondas, la longitud crítica de onda y la frecuencia crítica son justas tanto para las ondas del tipo eléctrico, como para las del tipo magnético.

En el estudio de las guías de ondas se introduce el concepto de ondas de tipos fundamentales. Se entiende por tipo fundamental de onda una oscilación cuya longitud crítica de onda tiene un valor máximo.

De la expresión (13.64) se desprende que al tipo fundamental de onda corresponden los valores mínimos posibles de m y n. En el caso de ondas del tipo eléctrico y de conformidad con las fórmulas (13.16) y (13.19) estos valores mínimos son $m = 1$ y $n = 1$. La onda correspondiente se designa por E_{11}. Su longitud crítica de onda se caracteriza por la relación

$$\lambda_{cr(E_{11})} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \tag{13.67}$$

La onda del tipo E_{11} es fundamental para las ondas del tipo eléctrico.

En el caso de ondas del tipo magnético y de acuerdo con las expresiones (13.47) y (13.50) los mínimos valores posibles de m y n son dos combinaciones admisibles: $m = 0$, $n = 1$; $m = 1$, $n = 0$.

Como se ha establecido en el § 13.3 estos coeficientes, simultáneamente, no pueden ser iguales a cero. Del análisis de la expresión (13.64) puede sacarse la siguiente conclusión.

Se ha convenido en considerar que la dimensión a corresponde a la pared ancha de la guía de ondas, y la dimensión b, a su pared estrecha. Por consiguiente, $a > b$ y, para valores iguales de m y n, $m/a < n/b$

Debido a esta circunstancia, para obtener el máximo valor de λ_{cr} es conveniente reducir máximamente la relación n/b, lo que corresponde a $n = 0$. En este caso, a la onda fundamental del tipo magnético corresponderá la combinación $m = 1$, $n = 0$.

Semejante onda se designa por H_{10}. La longitud crítica de onda de esta oscilación se caracteriza por la fórmula

$$\lambda_{cr} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2}}}, \text{ o bien } \lambda_{cr\,(H_{10})} = 2a. \tag{13.68}$$

Adelantándonos, debemos decir que, generalmente, se elige

$$b \approx a/2. \tag{13.69}$$

En este caso

$$\lambda_{cr\,(E_{11})} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}a = 0{,}91a. \tag{13.70}$$

Al comparar las fórmulas (13.68) y (13.70), se puede escribir la siguiente desigualdad:

$$\lambda_{cr(E_{11})} < \lambda_{cr(H_{10})}. \tag{13.71}$$

Entre todas las ondas posibles la que posee la mayor longitud crítica de onda es la onda fundamental del tipo magnético H_{10}.

Por medio de la fórmula (13.64) determinemos las longitudes críticas de ondas de algunas oscilaciones características:

$$\lambda_{cr(H_{20})} = a, \tag{13.72}$$

$$\lambda_{cr\ (H_{01})} = 2b. \tag{13.73}$$

Cabe notar que

$$\lambda_{cr(H_{20})} > \lambda_{cr(E_{11})}. \tag{13.74}$$

El número de onda longitudinal h puede expresarse por medio de la longitud crítica de onda del tipo prefijado.

Con este objeto se hace uso de la relación (12.26) que puede escribirse de otra forma:

$$h = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}}$$

Al aplicar las fórmulas (12.29), (13.58) y (13.59), obtenemos

$$h = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2},$$

$$h = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}. \tag{13.75}$$

Estas expresiones se utilizarán al determinar las condiciones de existencia de ondas del tipo prefijado.

§ 13.5. Condiciones de existencia de ondas de diferentes tipos en una guía de ondas rectangular

La condición de existencia de una onda del tipo prefijado se caracteriza por la desigualdad (12.44). Al sustituir el valor de λ_{cr} de la fórmula (13.64), obtenemos

$$\lambda < \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}. \tag{13.76}$$

De este modo, una onda del tipo H_{10} existe si

$$\lambda < 2a. \tag{13.77}$$

Basándose en la relación (13.76) la onda del tipo H_{20} existirá si

$$\lambda < a. \tag{13.78}$$

Si se observa la desigualdad (13.78), simultáneamente se cumple también la desigualdad (13.77). De este modo, si se asegura la condición de existencia de una onda del tipo superior con mayores valores de m y n, simultáneamente se cumple la condición de existencia de una onda del tipo inferior con menores valores de m y n. En otras palabras, es imposible garantizar la existencia de una

onda del tipo superior en solitario seleccionando las dimensiones de la guía de ondas. Al mismo tiempo se dan las condiciones para la existencia de ondas de tipos inferiores. A la par, es posible que se creen unas condiciones en que exista la onda de un tipo dado y todos los tipos inferiores de ondas, mientras que las ondas de los tipos superiores no puedan existir. Aclaremos lo expuesto tomando como ejemplo la onda fundamental del tipo magnético H_{10}. Para su existencia es necesario que se cumpla la desigualdad (13.77). Si se quiere que el paso de la onda del tipo H_{20} sea imposible, es necesario exigir que, de acuerdo con la condición de atenuación (12.45),

$$\lambda > \lambda_{cr\,(H_{20})}. \tag{13.79}$$

Valiéndonos de las relaciones (13.77), (13.79) y (13.72), obtenemos la condición de existencia de la onda H_{10} y de atenuación de las ondas del tipo H_{m0}, siendo $m = 2, 3, 4 \ldots$:

$$2a > \lambda > a. \tag{13.80}$$

Si se observa esta desigualdad, también se cumple la desigualdad

$$\lambda > 0{,}91a = \lambda_{cr\,(E_{11})}.$$

Por consiguiente, la desigualdad (13.80) asegura la atenuación de cualquier onda del tipo eléctrico.

En la desigualdad (13.80) entra tan sólo la dimensión a de la guía de ondas.

La dimensión b determina las longitudes críticas de onda para las ondas del tipo H_{0n}. Ambas dimensiones (a y b) determinan las longitudes críticas de ondas para las ondas del tipo H_{mn} con valores m y n distintos de cero y para las ondas del tipo E_{mn}. Entre las ondas del tipo H_{0n} la fundamental es la onda del tipo H_{01} con una longitud crítica de onda igual a $2b$. Para eliminar una onda de los tipos H_{0n}, siendo $n \geqslant 1$, es suficiente requerir que se observe la desigualdad

$$\lambda > 2b = \lambda_{cr\,(H_{01})} \tag{13.81}$$

Escribamos conjuntamente las condiciones (13.80) y (13.81):

$$2a > \lambda > a, \quad \lambda > 2b. \tag{13.82}$$

Las desigualdades (13.82) aseguran las condiciones de unicidad de existencia de la onda fundamental del tipo H_{10}. Si estas condiciones se observan es imposible que surjan ondas de otros tipos, tanto eléctricos, como magnéticos.

Cuando se resuelven problemas prácticos es importante conocer la estructura del campo en las guías de ondas para ondas de distintos tipos. Expliquemos cómo se pueden determinar los cuadros del

campo sin recurrir a un análisis matemático detallado, por medio de las condiciones límites junto a la superficie del metal ideal. Hecho esto, se expondrá una metodología rigurosa de la construcción de cuadros del campo.

§ 13.6. Determinación de los cuadros del campo en una guía de ondas rectangular por medio de las condiciones límites junto a la superficie de un metal ideal

La metodología ofrecida aquí para construir los cuadros del campo no es rigurosa y reviste, más bien, un carácter mnemotécnico. Esta se basa en las siguientes tesis fundamentales:

a) las ondas del tipo eléctrico poseen una componente longitudinal del campo eléctrico orientada a lo largo del eje de propagación; el campo magnético está situado en el plano transversal;

b) las ondas del tipo magnético poseen una componente longitudinal del campo magnético orientada a lo largo del eje de propagación; el campo eléctrico está situado en el plano transversal;

c) las líneas de fuerza eléctricas se acercan normalmente a la superficie del metal ideal; junto a la superficie del metal no puede existir un campo eléctrico tangencial;

d) las líneas de fuerza magnéticas se acercan tangencialmente a la superficie del metal ideal y representan bucles cerrados;

e) el índice m del tipo de onda señala el número de variaciones del campo entre las paredes de la guía de ondas en dirección del eje x;

f) el índice n del tipo de onda señala el número de variaciones del campo entre las paredes de la guía de ondas en dirección del eje y;

g) las líneas de fuerza magnéticas y eléctricas son ortogonales.

Basándonos en estas tesis generales mostremos la construcción de los cuadros del campo en el caso de ondas del tipo eléctrico. En primer término, averigüemos si es posible que existan ondas con índices nulos, o sea, ondas de los tipos E_{00}, E_{10}, E_{01}.

La onda del tipo eléctrico debe poseer una componente longitudinal del campo eléctrico. Examinemos la sección transversal de una guía de ondas en las coordenadas x, y (fig. 13.2).

Representemos en la parte central de la sección la componente longitudinal del campo eléctrico orientada a lo largo del eje z y marquemos con una crucecita la huella de esta componente en el plano de la sección transversal. En el caso de una onda del tipo E_{00} no existen variaciones del campo a lo largo de los ejes x e y. En consecuencia, unas componentes longitudinales análogas del campo eléctrico deben aparecer, sin cambiar la intensidad del campo, junto a las paredes laterales y horizontales de la guía de ondas (crucecitas en la fig. 13.2). En este caso, el campo eléctrico junto a la superficie del metal se situaría tangencialmente, lo que es imposible. Por

consiguiente, no puede surgir una onda del tipo E_{00}. Por razones análogas son imposibles las ondas de los tipos E_{01} y E_{10}.

De este modo, la onda fundamental del tipo eléctrico es la onda E_{11} que posee una variación del campo a lo largo del eje x y una variación a lo largo del eje y. El campo magnético de una onda semejante se sitúa en el plano de la sección transversal. Representemos este campo con líneas de trazos en forma de bucles cerrados (fig. 13.3).

El campo magnético se forma a costa de las componentes H_x y H_y. El bucle se acerca tangencialmente a las paredes de la guía

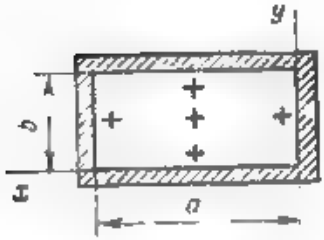

FIG. 13.2

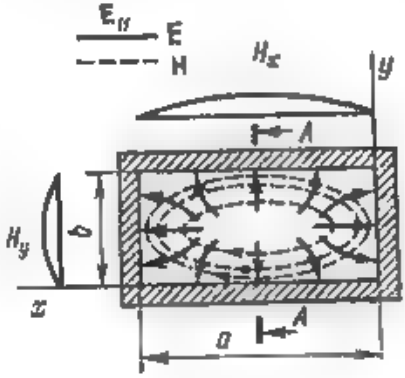

FIG. 13.3

de ondas, lo cual concuerda con las condiciones límites. Cada una de las componentes del campo alcanza su máximo en la parte media de las paredes y decrece hacia sus bordes. En la fig. 13.3 se presentan los diagramas de las componentes H_x y H_y. Cada uno de estos diagramas ofrece una sola variación del campo a lo largo del eje x e y, lo que corresponde a los índices de la onda investigada. A medida de traslación desde las paredes de la guía de ondas hacia el centro de la sección, la densidad de las líneas de fuerza magnéticas disminuye hasta cero. De este modo, si se examina, por ejemplo, la variación de la componente del campo H_x a lo largo del eje y, resulta que el campo disminuirá desde el valor máximo junto a la pared superior hasta cero cuando $y = b/2$ y, seguidamente aumentará hasta el valor máximo cuando $y = 0$.

Por consiguiente, tiene lugar una variación del campo H_x a lo largo del eje y. De modo análogo cambia la componente del campo H_y a lo largo del eje x.

El campo magnético representado satisface las condiciones requeridas. Las líneas de fuerza eléctricas deben ser ortogonales a las magnéticas, acercarse normalmente a las paredes de la guía de ondas y tener una componente longitudinal. Guiándonos por lo expuesto se puede presentar este campo en la fig. 13.3 en forma de líneas continuas en semibucles que se alejan en dirección del eje z. Al elegir

arbitrariamente la dirección del campo H, la dirección del campo E debe escogerse de manera que la onda se propague a lo largo del eje z y que el vector de Poynting quede orientado a lo largo de este eje. Como se conoce, dicho vector se define por la expresión $\Pi = [EH]$ y representa el producto vectorial del vector E por el vector H. La orientación del producto vectorial se determina según la regla del movimiento del tornillo dextrógiro, cuyo mango gira en el

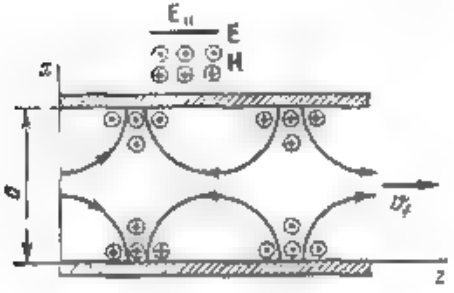

FIG. 13.4

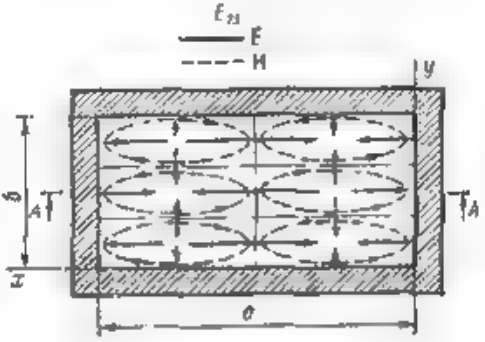

FIG. 13.5

sentido más corto desde el vector E hacia el vector H. En la fig. 13.4 la onda del tipo E_{11} se muestra en otra proyección: en coordenadas x, z.

La fig. 13.4 corresponde a la sección AA en la fig. 13.3. Los puntos y las crucecitas representan las huellas de las líneas de fuerza magnéticas. El cuadro del campo se desplaza a lo largo del eje z a una velocidad de fase v_f que se determina por la expresión (13.60). La distancia entre los puntos de fase idéntica es la longitud de onda en la guía de ondas λ_g que puede calcularse por medio de la fórmula (13.63).

Una vez construido el cuadro del campo para la onda del tipo E_{11} no es difícil hacer lo mismo para una onda eléctrica de cualquier tipo. Supongamos que se quiere obtener el cuadro del campo para la onda E_{23}. Esta onda debe poseer dos variaciones del campo a lo largo del eje x y tres variaciones del campo a lo largo del eje y.

Dividamos el espacio entre las paredes laterales a lo largo del eje x en dos partes iguales, y el espacio a lo largo del eje y en tres partes iguales. Como resultado, en la fig. 13.5 la sección transversal de la guía de ondas se verá dividida en seis partes o «compartimentos».

En cada «compartimento», independientemente, construyamos el cuadro del campo de la onda del tipo E_{11}, sin previa indicación de la dirección de las líneas de fuerza. Luego, determinemos en uno de los «compartimentos» la dirección de las líneas de fuerza de la misma manera como fue hecho al construir el cuadro del campo de

la onda del tipo E_{11}. Todas las líneas de fuerza adyacentes de otros «compartimientos» deben estar orientadas en la misma dirección, puesto que, de lo contrario, se eliminarían recíprocamente.

En la fig. 13.6 este campo mostrado en las coordenadas x, z, corresponde a la sección AA de la fig. 13.5. Cuando se construye el campo de la onda del tipo E_{mn} con cualesquiera valores de los índices conviene dividir el espacio entre las paredes laterales en m partes

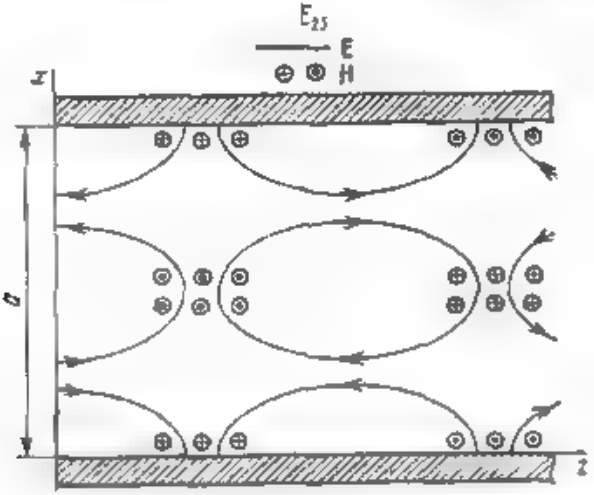

FIG 13.6

iguales, y el espacio entre las paredes superior e inferior, en n partes iguales. Después, en cada «compartimiento» hay que construir el cuadro del campo de la onda del tipo E_{11}.

A continuación pasemos a construir los cuadros del campo de las ondas del tipo magnético. Determinemos la posibilidad de existencia de una onda con dos índices cero, es decir, de una onda del tipo H_{00}. El campo eléctrico en las ondas del tipo magnético se sitúa en el plano de la sección transversal, o sea, en las coordenadas xy. Tratemos de asegurar la falta de variación del campo a lo largo de la coordenada y, orientando a lo largo del eje y las líneas de fuerza eléctricas (véase la fig. 13.7) y creando su densidad uniforme a lo largo del eje x, para evitar que el campo varíe a lo largo de este eje. En este caso deben existir líneas de fuerza eléctricas junto a las paredes laterales de la guía de ondas, tal como se indica en la figura. Además, junto a las paredes laterales de la guía de ondas debe existir un campo eléctrico tangencial, lo cual es imposible.

La segunda variante se presenta en la fig. 13.8, donde el campo eléctrico es normal a las paredes laterales de la guía de ondas y se asegura la ausencia de su variación a lo largo de la coordenada x. En este caso no es posible asegurar la ausencia de la variación del campo a lo largo de la coordenada y, ya que junto a las paredes inferior y superior de la guía de ondas hubieran aparecido componentes

tangenciales del campo eléctrico mostrados en la figura. De este modo no puede existir una onda del tipo H_{m0}.

Analicemos la onda del tipo H_{10} que tiene una variación del campo a lo largo del eje x y cero variaciones del campo a lo largo del eje y. Dispongamos las líneas de fuerza eléctricas a lo largo del eje y, haciendo que su densidad disminuya a medida de acercarse

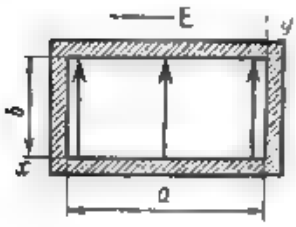

FIG. 13.7

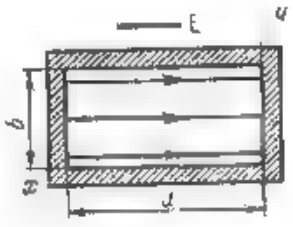

FIG. 13.8

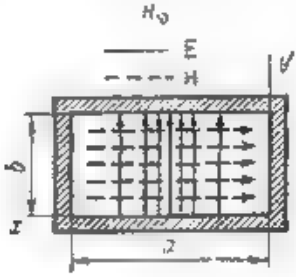

FIG. 13.9

a las paredes laterales de la guía de ondas (fig. 13.9). Junto a las paredes laterales el campo eléctrico debe decrecer hasta cero para asegurar las condiciones límites. En la figura las líneas de fuerza eléctricas se acercan normalmente a las paredes superior e inferior.

El campo magnético posee una componente longitudinal y debe ser ortogonal al campo eléctrico. De este modo, el campo magnético

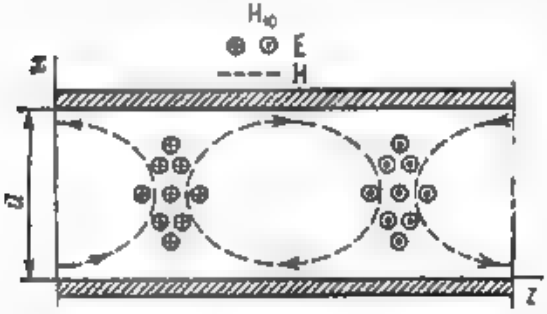

FIG. 13.10

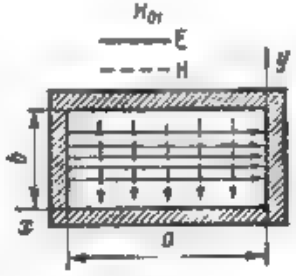

FIG. 13.11

representa bucles horizontales situados en las coordenadas x, z. En la fig. 13.9 con líneas de trazos se indican las partes frontales de estos bucles. La densidad de los bucles a lo largo del eje y es uniforme y éstos se acercan tangencialmente a las paredes de la guía de ondas lo que corresponde a las condiciones límites junto a la superficie del metal ideal. En la fig. 13.10 se representa el campo de la onda del tipo H_{10} en coordenadas x, z. Con crucecitas y puntos se designan las huellas de las líneas eléctricas de fuerza. Una vez seleccionada la dirección de las líneas magnéticas, el sentido de las líneas de fuerza eléctricas se elige de modo que el vector de Poynting

resulte dirigido hacia el lado de los valores positivos del eje z. Las líneas de fuerza adyacentes tienen la misma dirección.

El cuadro del campo para una onda del tipo H_{01} se construye de modo análogo Dicho cuadro se diferencia del cuadro del campo para una onda del tipo H_{10} en que los ejes x e y parecen como intercambiados. Este campo es fácil obtenerlo girando el campo de la

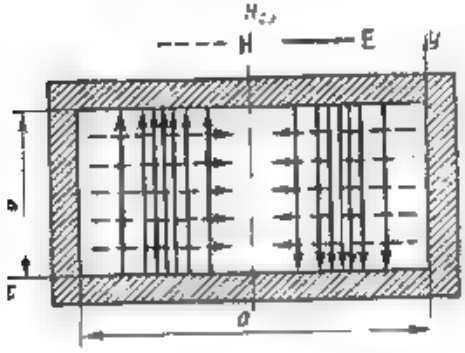

FIG. 13.12

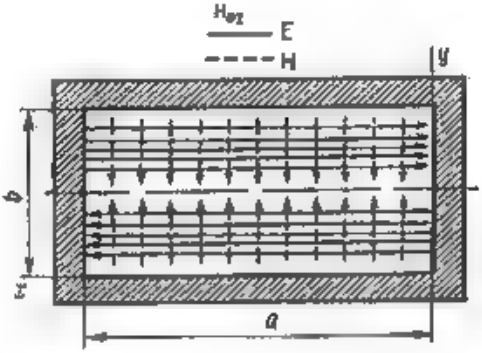

FIG. 13.13

onda del tipo H_{10} en el plano de la sección transversal 90° en sentido horario o antihorario. En la fig. 13.11 se da el cuadro del campo de la onda del tipo H_{01} en el plano de la sección transversal.

Si se conocen los cuadros del campo de las ondas H_{10} y H_{01} se pueden construir los cuadros del campo para las ondas del tipo H_{m0} o H_{0n}. En el caso de ondas del tipo H_{m0} la distancia entre las paredes laterales de la guía de ondas se divide en m partes y en cada uno de los «compartimientos» formados se construye independientemente el cuadro del campo de la onda del tipo H_{10}. Si se trata de la onda del tipo H_{0n} la distancia entre las paredes inferior y superior de la guía de ondas se divide en n partes, construyéndose a continuación en los «compartimientos» el cuadro del campo de la onda del tipo H_{01}.

En la fig. 13.12 se ilustra el cuadro del campo de la onda del tipo H_{20}, y en la fig. 13.13, el de la onda del tipo H_{02}. En la fig 13.14 se muestra el cuadro del campo de la onda del tipo H_{30} en coordenadas x, z. El campo de la onda H_{11} debe poseer una variación a lo largo del eje x y una variación a lo largo del eje y El campo eléctrico se encuentra en el plano x, y. El campo magnético posee la componente longitudinal. Las líneas de fuerza eléctricas deben acercarse normalmente a las paredes de la guía de ondas. Es evidente que, para asegurar la variación del campo, las líneas de fuerza eléctricas no pueden ir a lo largo del eje x o y, sino deben sufrir una inflexión, como se muestra en la fig. 13.15. El campo H es ortogonal al campo E. Efectivamente, el campo tiene una variación a lo largo de los ejes x e y. El campo magnético posee la componente longitudinal y es ortogonal al campo eléctrico. Las partes frontales de los

bucles se representan en la figura con líneas de trazos. La dirección recíproca de las líneas de fuerza eléctricas y magnéticas se elige de modo que el vector de Poynting esté orientado a lo largo del eje z. Las líneas de fuerza adyacentes están dirigidas en el mismo sentido.

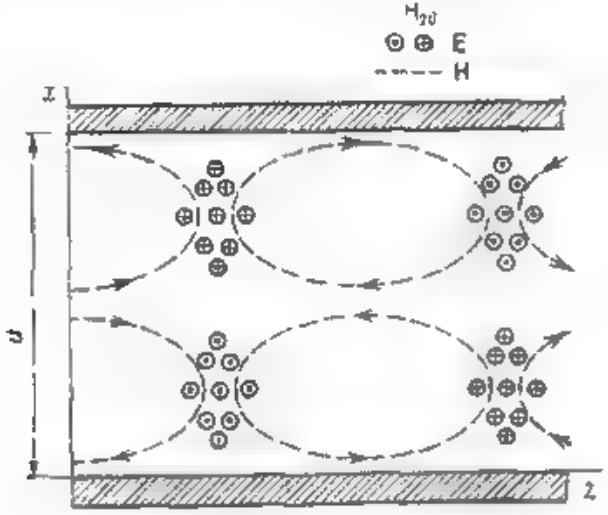

FIG. 13.14

La construcción de los cuadros del campo de las ondas del tipo H_{mn} con los índices m y n distintos de cero se efectúa según el principio expuesto anteriormente. La distancia entre las paredes laterales de la guía de ondas se divide en m partes, y la distancia entre

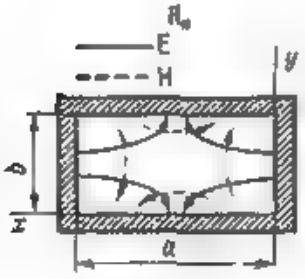

FIG. 13.15

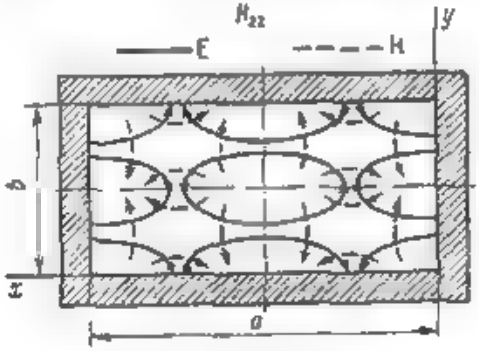

FIG. 13.16

las paredes inferior y superior, en n partes. En cada uno de los «compartimientos», independientemente, se construye el cuadro de la onda del tipo H_{11}. Un ejemplo de semejante construccion se da en la fig. 13.16, en la cual se representa el cuadro del campo de la onda del tipo H_{22} en las coordenadas x, y. En el campo de la onda del tipo H_{22}, de la misma manera que en el campo de la onda del tipo E_{22}

(véase la fig. 13.6), las líneas de fuerza eléctricas forman no sólo semibucles que se apoyan en las paredes, sino también bucles cerrados, como en el caso de las líneas de fuerza magnéticas.

La metodología expuesta de la construcción de los cuadros del campo no es rigurosa. El método analítico de construcción de tales cuadros será representado en el ejemplo del cuadro del campo de la onda del tipo H_{10}.

§ 13.7. Método analítico de construcción de cuadros del campo en una guía de ondas rectangular

Este método es racional mostrarlo en el ejemplo de construcción de un campo concreto, digamos, del campo de la onda fundamental del tipo H_{10}. Las fórmulas (13.52) — (13.57) permiten determinar las componentes del campo de las ondas del tipo magnético. Para el tipo de ondas examinado $m = 1$, $n = 0$. Al sustituir estos valores en las fórmulas indicadas, obtenemos las expresiones para las componentes del campo:

$$\dot{H}_x = j \frac{h}{k_{mn}^2} C_2 \frac{\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \tag{13.83}$$

$$\dot{H}_y = 0, \tag{13.84}$$

$$\dot{H}_z = C_2 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \tag{13.85}$$

$$\dot{E}_x = 0, \tag{13.86}$$

$$\dot{E}_y = -j \frac{\omega\mu_a}{k_{mn}^2} C_2 \frac{\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \tag{13.87}$$

$$\dot{E}_z = 0. \tag{13.88}$$

Introduzcamos las designaciones

$$\frac{h}{k_{mn}^2} C_2 \frac{\pi}{a} = A_1, \quad \frac{\omega\mu_a}{k_{mn}^2} C_2 \frac{\pi}{a} = A_2. \tag{13.89}$$

Teniendo en cuenta estas designaciones, las componentes del campo diferentes de cero se escriban en la siguiente forma:

$$\dot{H}_x = jA_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \tag{13.90}$$

$$\dot{H}_z = C_2 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \tag{13.85}$$

$$\dot{E}_y = -jA_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}. \tag{13.91}$$

Las expresiones insertadas ofrecen las amplitudes complejas del campo. El cuadro del campo en la guía de ondas se traslada a la velocidad de fase. Para obtener el cuadro del campo es necesario hacer una especie de fotografía instantánea del mismo. En otras

palabras, de las amplitudes complejas del campo hay que pasar a los valores instantáneos y, luego, fijar el tiempo. El paso se lleva a cabo mediante las fórmulas (1.157). Entonces se puede escribir

$$\left.\begin{aligned} H_x(t) &= \operatorname{Re}(\dot{H}_x e^{j\omega t}), \\ H_z(t) &= \operatorname{Re}(\dot{H}_z e^{j\omega t}), \\ E_y(t) &= \operatorname{Re}(\dot{E}_y e^{j\omega t}). \end{aligned}\right\} \qquad (13.92)$$

Al sustituir en estas expresiones los valores de $\dot{H}_x$, $\dot{H}_z$ y $\dot{E}_y$ de las fórmulas (13.90), (13.85) y (13.91), obtenemos

$$H_x(t) = \operatorname{Re}\left\{jA_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{j(\omega t - hz)}\right\} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\langle jA_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\{\cos(\omega t - hz) + j\operatorname{sen}(\omega t - hz)\}\right\rangle,$$

$$H_z(t) = \operatorname{Re}\left\{C_2 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{j(\omega t - hz)}\right\} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\langle C_2 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\{\cos(\omega t - hz) + j\operatorname{sen}(\omega t - hz)\}\right\rangle,$$

$$E_y(t) = \operatorname{Re}\left\{-jA_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{j(\omega t - hz)}\right\} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\langle -jA_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\{\cos(\omega t - hz) + j\operatorname{sen}(\omega t - hz)\}\right\rangle.$$

Si prescindimos de las partes imaginarias, podemos escribir las expresiones para los valores instantáneos de las componentes del campo:

$$\left.\begin{aligned} H_x(t) &= A_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}(\omega t - hz), \\ H_z(t) &= C_2 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos(\omega t - hz), \\ E_y(t) &= A_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}(\omega t - hz). \end{aligned}\right\} \qquad (13.93)$$

Seguidamente, es necesario fijar el tiempo. Para simplificar, elijamos el tiempo $t = 0$. En este caso, las expresiones (13.93) se escribirán en la siguiente forma:

$$H_x(0) = A_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}(hz), \qquad (13.94)$$

$$H_z(0) = C_2 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos(hz), \qquad (13.95)$$

$$E_y(0) = -A_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}(hz). \qquad (13.96)$$

Las componentes del campo obtenidas no dependen de la coordenada y y son funciones de las coordenadas x y z.

Representemos en la fig. 13.17 el cuadro de variación del vector $\dot{\mathbf{H}}_x(0)$ en el plano x, hz, utilizando la fórmula (13.94), y construyamos en la fig. 13.18, en el mismo plano, el cuadro de variación del vector

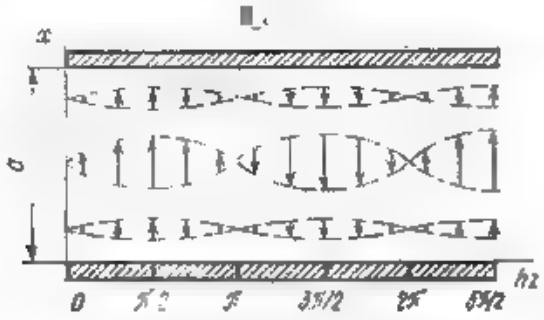

FIG. 13.17

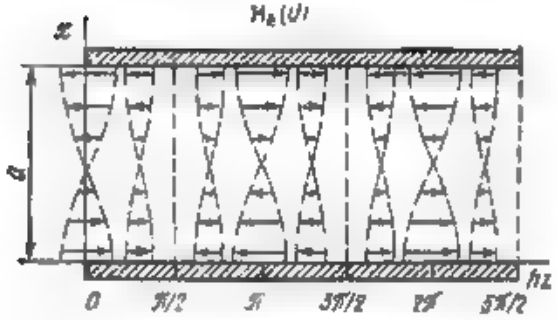

FIG. 13.18

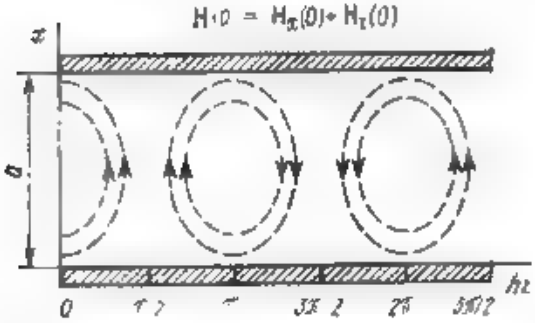

FIG. 13.19

$\dot{\mathbf{H}}_z(0)$, haciendo uso de la fórmula (13.95). El campo magnético total se determinara por la suma de los vectores $\dot{\mathbf{H}}_x(0)$ y $\dot{\mathbf{H}}_z(0)$. Como resultado de adición de los campos se engendran líneas de fuerza cerradas que se muestran en la fig. 13.19. El vector $\dot{\mathbf{E}}_y(0)$

está orientado a lo largo del eje y. Su variación se condiciona por la fórmula (13.96). En el plano x, hz, este vector puede representarse en forma de crucecitas y puntos cuya densidad varía según la ley sinusoidal a lo largo de los ejes x y hz.

El campo electromagnético total en el plano x, (hz) se da en la fig. 13.20, y en la fig 13.21 este mismo campo viene representado

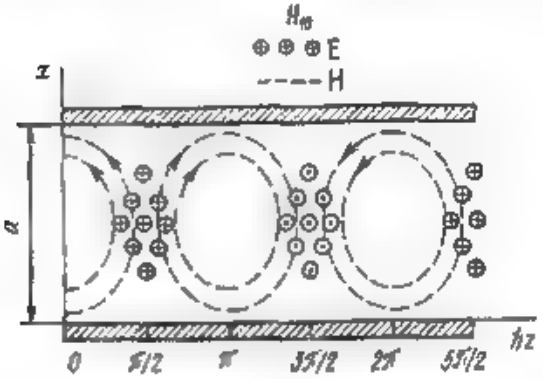

FIG. 13.20

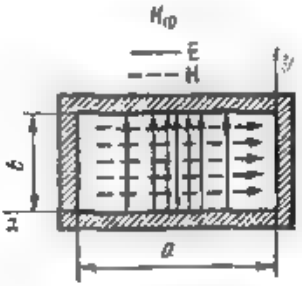

FIG. 13.21

en el plano x, y. Estas figuras son análogas a las 13.10 y 13.9 construidas sin un análisis matemático riguroso, basándose tan sólo en las tesis generales. Análogamente, pueden obtenerse expresiones analíticas para una construcción rigurosa de los cuadros del campo de las ondas de cualesquiera tipos.

CAPÍTULO 14

Guía de ondas circular

§ 14.1. Solución de la ecuación fundamental para las componentes longitudinales del campo en una guía de ondas circular

Escribamos la ecuación fundamental para las ondas del tipo eléctrico (12.9):

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\xi}\cdot\frac{\partial\dot{E}_{\zeta 0}}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\cdot\frac{\partial\dot{E}_{\zeta 0}}{\partial\eta}\right)\right\}+g^2\dot{E}_{\zeta 0}=0.$$

En el análisis de los sistemas cilíndricos circulares es racional utilizar un sistema de coordenadas cilíndricas, disponiéndolas de

la manera señalada en la fig. 14.1 Elijamos la siguiente correspondencia entre las coordenadas cilíndricas y las curvilíneas:

$$\xi \to r,\ \eta \to \varphi,\ \zeta \to z,\ h_\xi = 1,\ h_\eta = r. \qquad (14.1)$$

El sistema de coordenadas satisface las limitaciones (11.36) y es posible aplicar la ecuación fundamental y las fórmulas de paso.

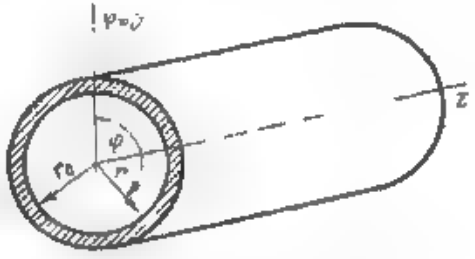

FIG 14 1

Haciendo uso de las correlaciones (14.1), obtenemos la ecuación (12 9) en la forma

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial \varphi}\right)\right\}+g^2\dot{E}_{z0}=0. \qquad (14.2)$$

De forma análoga puede escribirse la ecuación fundamental para la componente longitudinal $\dot{H}_{z0}$ en el caso de una onda del tipo magnético:

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial \varphi}\right)\right\}+g^2\dot{H}_{z0}=0. \qquad (14.3)$$

Enseñemos la resolución ulterior de las ecuaciones fundamentales en el ejemplo de las ondas del tipo eléctrico. Suprimamos paréntesis en la ecuación (14.2):

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{z0}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_{z0}}{\partial \varphi^2}+g^2\dot{E}_{z0}=0. \qquad (14.4)$$

Multipliquemos la ecuación por r^2 para eliminar de la segunda derivada respecto a φ los miembros que contienen r:

$$r^2\frac{\partial^2 \dot{E}_{z0}}{\partial r^2}+\frac{r^2}{r}\frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial r}+g^2r^2\dot{E}_{z0}+\frac{\partial^2 \dot{E}_{z0}}{\partial \varphi^2}=0. \qquad (14.5)$$

Siguiendo el método de Fourier pongamos que

$$\dot{E}_{z0}=R(r)\,\Phi(\varphi), \qquad (14.6)$$

donde $R(r)$ es función solamente de la coordenada r y $\Phi(\varphi)$ es función de la coordenada φ, solamente.

Sustituyamos la expresión (14.6) en la ecuación (14.5) y realicemos la diferenciación:

$$\Phi r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \Phi \frac{r^2}{r} \cdot \frac{\partial R}{\partial r} + g^2 r^2 R\Phi + R \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \qquad (14.7)$$

Dividamos esta ecuación por el producto $R\Phi$:

$$\frac{r^2}{R} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r^2}{Rr} \cdot \frac{\partial R}{\partial r} + g^2 r^2 + \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \qquad (14.8)$$

Los primeros tres sumandos de la ecuación obtenida son función de la coordenada r solamente, y no dependen de la coordenada φ. El último sumando es función tan sólo de la coordenada φ y no depende de la coordenada r

Resumiendo, podemos decir que la suma de dos funciones, una de las cuales depende de la coordenada r y la otra de la coordenada φ, es igual a cero Semejante situación es posible únicamente en el caso de que la primera y la segunda funciones por separado son iguales a un mismo número constante, con la particularidad de que si en la primera igualdad se toma un signo determinado ante este número, en la segunda igualdad este signo debe ser cambiado por el inverso. Partiendo de estas consideraciones, la ecuación (14.8) puede subdividirse en dos relaciones independientes:

$$\frac{r^2}{R} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r^2}{Rr} \cdot \frac{\partial R}{\partial r} + g^2 r^2 = m^2, \qquad (14.9)$$

$$\frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m^2, \qquad (14.10)$$

Al multiplicar la relación (14.9) por R y dividirla por r^2, obtenemos una ecuación diferencial ordinaria para la función R:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(g^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R = 0 \qquad (14.11)$$

Al multiplicar la ecuación (14.10) por Φ y reagrupar los términos, obtenemos una ecuación diferencial ordinaria para la función Φ:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0 \qquad (14.12)$$

La onda electromagnética se propaga a lo largo del eje z, y en el plano de la sección transversal debido a la interferencia de las oscilaciones que llegan por diferentes caminos a un mismo punto se engendran ondas estacionarias En un mismo punto de la sección transversal y en un mismo momento de tiempo no puede haber distintos campos Además, en cualquier punto de la guía de ondas el campo debe ser finito. Por esta razón, la función Φ debe ser finita y periódica respecto a φ, mientras que la función R debe ser finita al variar el radio r desde cero hasta r_0.

Teniendo en cuenta lo expuesto escribamos la solución de la ecuación (14.12):

$$\Phi = A_1 \cos(m\varphi) + A_2 \operatorname{sen}(m\varphi). \qquad (14.13)$$

Como quiera que al investigar la propagación de las ondas en una guía de ondas circular la elección del origen de lectura para calcular el ángulo φ es arbitraria, se puede tomar, sin infringir el carácter general del análisis

$$A_2 = 0. \tag{14.14}$$

Entonces, la función

$$\Phi = A_1 \cos(m\varphi). \tag{14.15}$$

El número m puede tomar cualquier valor entero empezando por cero.

La ecuación (14.11) fue investigada por Bessel [8, 9]. La solución de esta ecuación se anota en la forma

$$R = B_1 J_m(gr) + B_2 N_m(gr). \tag{14.16}$$

La primera solución independiente $J_m(gr)$ se denomina función de Bessel de primer género y de m-ésimo orden. Conviene tener en

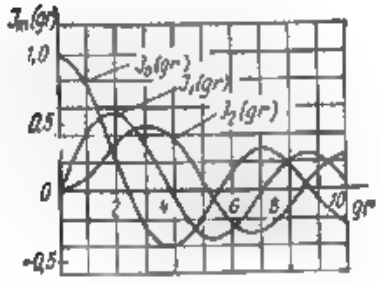

FIG. 14.2

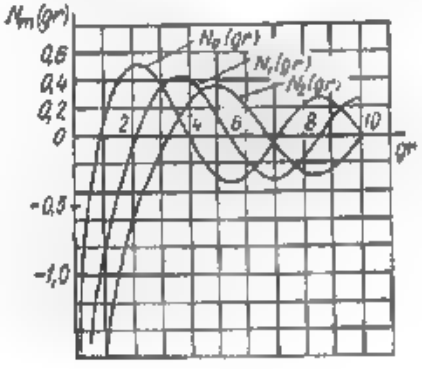

FIG. 14.3

cuenta que el orden m de la función es un coeficiente que entra en la solución (14.15) para la función Φ. Este determina el número de variaciones del campo respecto al ángulo φ.

Las tablas y gráficos de las funciones $J_m(gr)$ se exponen en numerosos manuales. Los gráficos de las funciones de los tres primeros órdenes se ilustran en la fig. 14.2.

Como se deduce del gráfico, el carácter de las funciones $J_m(gr)$, al variar el argumento, es atenuante, oscilatorio. Dentro de los límites de todo el diapasón las variaciones del argumento de la función $J_m(gr)$ siguen siendo finitas.

La segunda solución independiente $N_m(gr)$ se denomina función de Bessel de segundo género de m-ésimo orden, o bien, función de Neumann de m-ésimo orden. Al igual que en las funciones de Bessel de primer género, el orden determina el número de variaciones del campo respecto al ángulo φ. Las funciones de Bessel de segundo género se asemejan a las funciones de Bessel de primer género, a excepción del punto $gr = 0$, donde estas funciones tienden a $-\infty$.

En la fig. 14.3 se dan los gráficos de las funciones indicadas de los primeros tres órdenes. Las constantes de integración B_1 y B_2 de la expresión (14.16) pueden tomar distintos valores, incluyendo los imaginarios, según sean las condiciones concretas del problema a resolver. En este caso la solución se escribe de la siguiente manera:

$$R_1 = B_2\{J_m(gr) + jN_m(gr)\} = B_3 H_m^{(1)}(gr) \qquad (14.17)$$

o bien

$$R_1 = B_4\{J_m(gr) - jN_m(gr)\} = B_4 H_m^{(2)}(gr). \qquad (14.18)$$

Las funciones $H_m^{(1)}(gr)$ y $H_m^{(2)}(gr)$ se denominan, respectivamente, funciones de Bessel de tercer y cuarto géneros de m-ésimo orden, o funciones de Hankel de primero y segundo géneros de m-ésimo orden. Si para el análisis se toma el factor de tiempo $e^{j\omega t}$ (y no $e^{-j\omega t}$), la solución (14.18) corresponde a una onda progresiva cilíndrica que se propaga desde el eje z en dirección radial y se reduce a cero en el infinito. La solución (14.17) corresponde a una onda cilíndrica que se propaga del infinito al eje z; ésta puede considerarse como una onda cilíndrica reflejada de un obstáculo cilíndrico simétrico con respecto al eje z. Cuando el factor de tiempo es $e^{-j\omega t}$, se crea una situación opuesta. la función $H_m^{(1)}(gr)$ corresponde a la onda incidente, y la función $H_m^{(2)}(gr)$, a la onda reflejada.

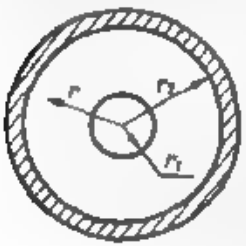

FIG. 14.4

En una guía de ondas circular no pueden existir ondas radiales. El campo se propaga a lo largo del eje z. En virtud de ello, las soluciones con las funciones de Hankel deben eliminarse.

Tampoco tiene sentido físico la solución que hace uso de la función de Neumann. En sistemas de guiaondas reales no pueden existir campos infinitamente grandes dentro de los límites de todo el espacio de la guía de ondas ocupado por el campo. En una guía de ondas circular el eje del guiaondas correspondiente a los valores $r = 0$ forma parte del espacio en que el campo existe. En consecuencia, al investigar los procesos en una guía de ondas circular, en la solución (14.16) es necesario poner

$$B_2 = 0. \qquad (14.19)$$

Teniendo en cuenta este hecho y basándose en las fórmulas (14 6), (14 15) y (14.16) se puede hallar la componente longitudinal del campo eléctrico:

$$\dot{E}_{z0} = C_1 I_m(gr)\cos(m\varphi), \qquad (14.20)$$

donde

$$C_1 = B_1 A_1. \qquad (14.21)$$

Cabe señalar que al examinar las ondas del tipo de guiaondas en una guía de ondas coaxial cuya sección se ilustra en la fig. 14.4, es necesario tomar en consideración el hecho de que en el caso de paredes de conductibilidad ideal el campo puede existir en el espacio

que se encuentra entre los radios r_1 y r_2. De este modo, en dicho sistema el valor corriente del radio puede variar de r_1 a r_2, y en el espacio ocupado por el campo no existe el valor $gr = 0$. Por consiguiente, no tenemos fundamento para igualar a cero el factor B_2 en la solución (14.16). En el diapasón de variación del argumento de las funciones de Bessel desde gr_1 hasta gr_2 la función de Neumann es finita y no debe eliminarse.

En virtud de que la ecuación fundamental (14.3) para la componente longitudinal del campo magnético $\dot{H}_{z0}$ es análoga a la ecuación fundamental (14.2) para $\dot{E}_{z0}$, la solución para $\dot{H}_{z0}$ debe escribirse en la forma (14.20):

$$\dot{H}_{z0} = C_2 J_m (gr) \cos (m\varphi). \qquad (14.22)$$

Las fórmulas obtenidas para las componentes longitudinales del campo dan la posibilidad de efectuar un análisis completo de las ondas de los tipos eléctrico y magnético.

§ 14.2. Ondas del tipo eléctrico

Si se trata de ondas del tipo eléctrico la componente E_{z0} es tangente a las paredes de la guía de ondas y las condiciones límites junto a la superficie del metal ideal se escriben en forma

$$\dot{E}_{z0} = 0 \text{ (para } r = r_0). \qquad (14.23)$$

Aplicando la expresión (14.20), obtenemos

$$C_1 J_m (gr_0) \cos (m\varphi) = 0,$$

de donde

$$J_m (gr_0) = 0. \qquad (14.24)$$

Como sigue de los gráficos de las funciones de Bessel (véase la fig. 14.2), la función de cada orden posee un número infinitamente grande de valores del argumento gr, para el cual la función se anula. Estos valores llevan el nombre de raíces de las funciones de Bessel y se designan η_{mn}, donde m es el orden de la función, y n, el número de la raíz empezando por los valores gr diferentes de cero. La fig. 14.5 ilustra lo expuesto. En la tabla 14.1 se dan algunos valores de las raíces η_{mn} de las funciones $J_m (gr)$.

De este modo, la condición (14.24) se cumple si es justa la relación $gr_0 = \eta_{mn}$.

Puesto que los valores de η dependen de los índices mn, es racional atribuir estos mismos índices al número de onda transversal:

$$g_{mn} r_0 = \eta_{mn}, \quad g_{mn} = \eta_{mn}/r_0. \qquad (14.25)$$

En este caso, para la componente $\dot{E}_{z0}$ en lugar de la expresión (14.20) se puede escribir

$$\dot{E}_{z0} = C_1 J_m \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \cos (m\varphi). \qquad (14.26)$$

Seguidamente, es posible determinar las componentes del campo en una guía de ondas circular en el caso de una onda del tipo eléctrico. Utilizando las fórmulas de paso (12.51), (12.53) — (12.57)

Tabla 14.1

n	m		
	0	1	2
1	2,405	3,832	5,135
2	5,520	7,016	8,417
3	8,654	10,174	11,620

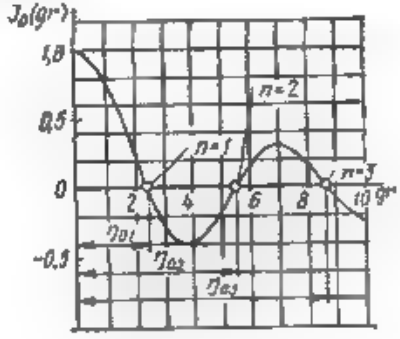

FIG. 14.5

y cumpliendo las condiciones (12.64), así como la correspondencia de las coordenadas (14.1), obtenemos las siguientes relaciones:

$$\dot{E}_r = -j\frac{h}{g^2}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial r}e^{-jhz}, \tag{14.27}$$

$$\dot{E}_\varphi = -j\frac{h}{rg^2}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial \varphi}e^{-jhz}, \tag{14.28}$$

$$\dot{E}_z = \dot{E}_{z0}e^{-jhz}, \tag{14.29}$$

$$\dot{H}_r = j\frac{\omega\varepsilon_a}{rg^2}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial \varphi}e^{-jhz}, \tag{14.30}$$

$$\dot{H}_\varphi = -j\frac{\omega\varepsilon_a}{g^2}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial r}e^{-jhz}, \tag{14.31}$$

$$\dot{H}_z = 0. \tag{14.32}$$

Para obtener las expresiones definitivas hay que valerse de las fórmulas (14.25) y (14.26):

$$\dot{E}_r = -j\frac{hr_0}{\eta_{mn}}C_1 J'_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}r\right)\cos(m\varphi)\,e^{-jhz}, \tag{14.33}$$

$$\dot{E}_\varphi = j\frac{hr_0}{r\eta^2_{mn}}C_1 m J_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}r\right)\operatorname{sen}(m\varphi)\,e^{-jhz}, \tag{14.34}$$

$$\dot{E}_z = C_1 J_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}r\right)\cos(m\varphi)\,e^{-jhz}, \tag{14.35}$$

$$\dot{H}_r = -j\frac{\omega\varepsilon_a r_0^2}{r\eta^2_{mn}}C_1 m J_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}r\right)\operatorname{sen}(m\varphi)\,e^{-jhz}, \tag{14.36}$$

$$\dot{H}_\varphi = -j\frac{\omega\varepsilon_a r_0}{\eta_{mn}}C_1 J'_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}r\right)\cos(m\varphi)\,e^{-jhz}, \tag{14.37}$$

$$\dot{H}_z = 0. \tag{14.38}$$

Aquí

$$J'_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}r\right)=\frac{\partial}{\partial\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}r\right)}\left\{J_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}r\right)\right\}. \qquad (14.39)$$

El número de onda longitudinal h se determina a partir de la fórmula (13.35). Al sustituir en ésta el valor de g_{mn} (14.25), obtenemos

$$h=h_{mn}=\sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a-\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}\right)^2}. \qquad (14.40)$$

§ 14.3. Ondas del tipo magnético

Cuando se trata de las ondas del tipo magnético las componentes del campo se definen por las relaciones (12.58) — (12.63), las cuales, al observarse las condiciones (12.64) y la correspondencia de las coordenadas (14.1), pueden escribirse en la siguiente forma:

$$\dot{H}_r=-j\frac{h}{g^2}\cdot\frac{\partial\dot{H}_{z0}}{\partial r}e^{-jhz}, \qquad (14.41)$$

$$\dot{H}_\varphi=-j\frac{h}{rg^2}\cdot\frac{\partial\dot{H}_{z0}}{\partial\varphi}e^{-jhz}, \qquad (14.42)$$

$$\dot{H}_z=\dot{H}_{z0}e^{-jhz}, \qquad (14.43)$$

$$\dot{E}_r=-j\frac{\omega\mu_a}{rg^2}\cdot\frac{\partial\dot{H}_{z0}}{\partial\varphi}e^{-jhz}, \qquad (14.44)$$

$$\dot{E}_\varphi=j\frac{\omega\mu_a}{g^2}\cdot\frac{\partial\dot{H}_{z0}}{\partial r}e^{-jhz}, \qquad (14.45)$$

$$\dot{E}_z=0. \qquad (14.46)$$

La componente del campo $\dot{E}_\varphi$ es tangencial a las paredes de la guía de ondas. Hallémosla mediante las expresiones (14.45) y (14.22):

$$\dot{E}_\varphi=j\frac{\omega\mu_a}{g^2}C_2gJ'_m(gr)\cos(m\varphi)e^{-jhz}, \qquad (14.47)$$

Las condiciones límites junto a la superficie del metal ideal tienen la forma

$$\dot{E}_\varphi=0 \text{ (para } r=r_0) \qquad (14.48)$$

o bien

$$j\frac{\omega\mu_a}{g^2}C_2gJ'_m(gr_0)\cos(m\varphi)e^{-jhz}=0.$$

de donde

$$J'_m(gr_0)=0. \tag{14.49}$$

La derivada de la función de Bessel respecto al argumento es igual a cero, siendo $r = r_0$. Puesto que la función de Bessel de primer género reviste un carácter oscilatorio, su derivada también será una función oscilatoria.

En la fig. 14.6 se representan la función $J_0(gr)$ y su derivada.

Como se desprende de la figura, la condición límite (14 49) se satisface, siendo infinitamente grande el número de valores discretos del argumento gr. Cada uno de estos valores del argumento, para

Fig. 14.6

n	m		
	0	1	2
1	3,832	1,840	3,054
2	7,016	5,335	6,705
3	10,174	8,536	9,965

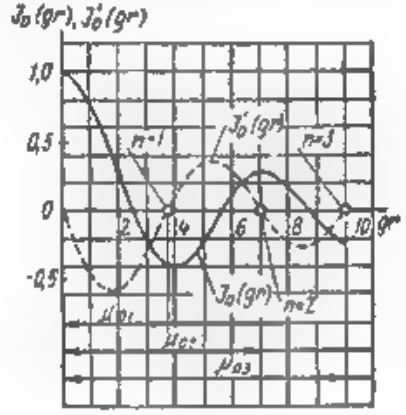

FIG. 14.6

un radio de la guía de ondas prefijado, corresponde a un número de onda transversal determinado g y, por consiguiente, a un tipo determinado de onda.

Designemos con μ_{mn} los valores de las raíces de la derivada de las funciones de Bessel, donde m es el orden de la función, y n, el número de la raíz, empezando por los valores de gr diferentes de cero. Entonces, las condiciones límites (14.49) se satisfarán cuando $gr_0 = \mu_{mn}$. A cada valor de los índices m, n corresponderá un valor determinado de g. Por esta razón debe escribirse

$$g_{mn}r_0 = \mu_{mn},$$

de donde

$$g_{mn} = \mu_{mn}/r_0. \tag{14.50}$$

En la tabla 14.2 se dan algunos valores de las raíces μ_{mn} de la derivada de las funciones de Bessel.

Seguidamente se pueden obtener las expresiones definitivas para las componentes del campo magnético en una guía de ondas cir-

cular, valiéndose de las fórmulas (14.41) — (14.46), (14.22) y (14.50)

$$\dot{H}_r = -j\frac{h r_0}{\mu_{mn}} C_2 J'_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi)\, e^{-jhz}, \qquad (14.51)$$

$$\dot{H}_\varphi = j\frac{h r_0^2}{r \mu_{mn}^2} C_2 m J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \operatorname{sen}(m\varphi)\, e^{-jhz}, \qquad (14.52)$$

$$\dot{H}_z = C_2 J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi)\, e^{-jhz}, \qquad (14.53)$$

$$\dot{E}_r = j\frac{\omega \mu_a r_0^2}{r \mu_{mn}^2} C_2 m J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \operatorname{sen}(m\varphi)\, e^{-jhz}, \qquad (14.54)$$

$$\dot{E}_\varphi = j\frac{\omega \mu_a r_0}{\mu_{mn}} C_2 J'_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi)\, e^{-jhz}, \qquad (14.55)$$

$$\dot{E}_z = 0. \qquad (14.56)$$

El número de onda longitudinal (13.35) adquiere la forma

$$h = h_{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}\right)^2}. \qquad (14.57)$$

§ 14.4. Velocidad de fase, longitud de onda en la guía de ondas, longitud crítica de onda. Ondas de los tipos fundamentales en una guía de ondas circular

Para una guía de ondas circular son válidas las expresiones (13.60), (13.61) y (13.63) deducidas anteriormente.

Para la longitud crítica de onda es general la expresión (12.43).

En el caso de ondas del tipo eléctrico $g = g_{mn} = \eta_{mn}/r_0$ y la longitud crítica de onda es

$$\lambda_{cr\,(\mathcal{E}mn)} = \frac{2\pi r_0}{\eta_{mn}} = \frac{6{,}28 \cdot r_0}{\eta_{mn}}. \qquad (14.58)$$

En el caso de ondas del tipo magnético $g = g_{mn} = \mu_{mn}/r_0$ y la longitud crítica de onda es

$$\lambda_{cr\,(\mathcal{H}mn)} = \frac{2\pi r_0}{\mu_{mn}} = \frac{6{,}28 r_0}{\mu_{mn}}. \qquad (14.59)$$

A la onda fundamental le corresponde el valor máximo de la longitud crítica de onda y, por consiguiente, los valores mínimos de η_{mn} y μ_{mn}.

De las tablas 14.1 y 14.2 se desprende que los valores mínimos de η_{mn} y μ_{mn} son: $\eta_{01} = 2{,}405$ y $\mu_{11} = 1{,}840$.

De este modo, cuando se trata de ondas del tipo eléctrico la fundamental es la onda del tipo E_{01} con longitud crítica de onda

$$\lambda_{cr\,(E_{01})} = \frac{6{,}28 r_0}{2{,}405} = 2{,}61 r_0. \qquad (14.60)$$

y en el caso de ondas del tipo magnético es la onda del tipo H_{11} con la longitud crítica de onda

$$\lambda_{cr\,(H_{11})} = \frac{6{,}28r_0}{1{,}84} = 3{,}41r_0. \qquad (14.61)$$

Se ve que la longitud crítica de onda fundamental del tipo magnético es mayor que la respectiva longitud de la onda fundamental del tipo eléctrico.

§ 14.5. Condiciones de existencia de ondas de diferentes tipos en una guía de ondas circular

Determinemos las longitudes críticas de ondas para las oscilaciones próximas a las ondas fundamentales de los tipos eléctrico y magnético.

De la tabla 14.1 se infiere que el número más cercano a η_{01} es $\eta_{11} = 3{,}832$. A este número corresponde la onda del tipo E_{11} con la longitud crítica de onda

$$\lambda_{cr\,(E_{11})} = \frac{6{,}28r_0}{3{,}832} = 1{,}64r_0. \qquad (14.62)$$

De la tabla 14.2 se desprende que el número más próximo a μ_{11} es $\mu_{21} = 3{,}054$. A este número corresponde la onda del tipo H_{21} con la longitud crítica de onda

$$\lambda_{cr\,(H_{21})} = \frac{6{,}28r_0}{3{,}054} = 2{,}05r_0. \qquad (14.63)$$

Si se cumple la condición

$$\lambda > \lambda_{cr}\,(E_{11}) = 1{,}64r_0,$$

en la guía de ondas no puede engendrarse una onda del tipo E_{11}.

Análogamente, son imposibles las ondas del tipo H_{21} si se observa la condición

$$\lambda > \lambda_{cr}\,(H_{21}) = 2{,}05r_0.$$

Si se desea que en la guía de ondas exista una onda fundamental del tipo eléctrico E_{01} y no surjan ondas de tipos eléctricos superiores, es necesario que se observe la desigualdad

$$\lambda_{cr\,(E_{01})} = 2{,}61r_0 > \lambda > 1{,}64r_0. \qquad (14.64)$$

Cuando se desea que en la guía de ondas exista una onda fundamental del tipo magnético H_{11} y no aparezcan ondas de tipos magnéticos superiores es preciso que se observe la desigualdad

$$\lambda_{cr\,(H_{11})} = 3{,}41r_0 > \lambda > 2{,}05r_0. \qquad (14.65)$$

La evaluación comparativa permite sacar la conclusión de que al observarse el primer miembro de la desigualdad (14.64), o sea, $2{,}61r_0 > \lambda$, también se cumplirá el primer miembro de la desigualdad (14.65): $3{,}41r_0 > \lambda$.

Por consiguiente, se observarán las condiciones de existencia no sólo de la onda del tipo E_{01}, sino también de la onda del tipo H_{11}. En otras palabras, la unicidad de existencia de la onda fundamental del tipo eléctrico no puede, de ningún modo, asegurarse mediante la elección correcta del radio de la guía de ondas. Por otra parte, es posible la unicidad de existencia de la onda fundamental del tipo magnético al cumplirse la desigualdad

$$3{,}41r_0 > \lambda > 2{,}61r_0. \qquad (14.66)$$

En este caso se asegura la existencia de la onda del tipo H_{11}, se imposibilita el surgimiento de una onda del tipo E_{01} y, debido a que se observan los segundos miembros de las desigualdades (14.64) y (14.65), es imposible que se engendren ondas de tipos superiores. La desigualdad (14.66) puede escribirse de nuevo en otra forma:

$$\lambda/2{,}61 > r_0 > \lambda/3{,}41. \qquad (14.67)$$

Las desigualdades (14.66) y (14.67) son condiciones de unicidad de existencia de la onda fundamental del tipo magnético en una guía de ondas circular.

Comparando los valores de las raíces de las funciones de Bessel η_{mn} dados en la tabla 14.1 con los valores de las raíces de la derivada de las funciones de Bessel μ_{mn} insertados en la tabla 14.2 se puede advertir la validez de la siguiente igualdad:

$$\eta_{1n} = \mu_{0n}. \qquad (14.68)$$

Esta igualdad deriva de las propiedades de las funciones de Bessel. Basándose en las correlaciones (14.58) y (14.59), en vez de la igualdad (14.68) se puede escribir

$$\lambda'_{\text{cr}(E_{1n})} = \lambda_{\text{cr}(H_{0n})}. \qquad (14.69)$$

Resulta imposible separar las ondas de los tipos E_{1n} y H_{0n} eligiendo racionalmente los radios de las guías de ondas. Si por medio de un sistema correspondiente de excitación en la guía de ondas se han creado ondas del tipo H_{0n}, éstas pueden degenerar en ondas del tipo E_{1n}. Semejante degeneración de las ondas es un fenómeno indeseable en las guías de ondas circulares.

§ 14.6. Cuadros del campo en una guía de ondas circular

Los cuadros del campo característicos para una guía de ondas circular pueden construirse conforme al método descrito en el § 13.7. Aquí se presentan los resultados definitivos.

En la fig. 14.7 se da el cuadro del campo en una guía de ondas circular para el caso de onda fundamental del tipo magnético H_{11},

en la fig. 14.8 tenemos el cuadro del campo de una onda fundamental del tipo eléctrico E_{01} y en la fig. 14.9 podemos ver los cuadros del

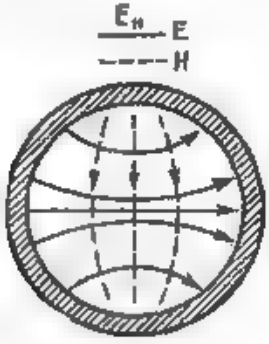

FIG. 14.7

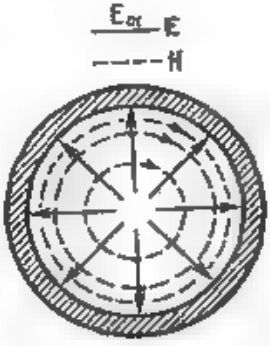

FIG. 14.8

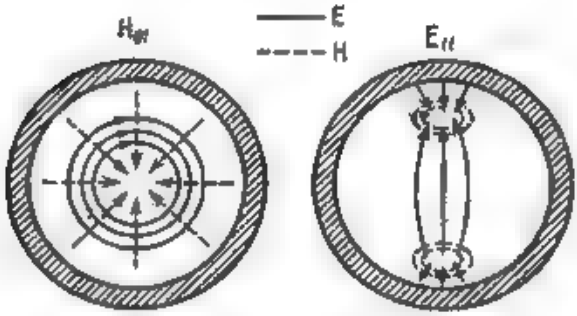

FIG. 14.9

campo de las ondas de los tipos H_{01} y E_{11}. De conformidad con la relación (14.69) estas ondas tienen igual longitud crítica de onda y pueden degenerar una en otra.

CAPÍTULO 15

Guía de ondas circular coaxial

§ 15.1. Tipos posibles de ondas en una guía de ondas circular coaxial

En una guía de ondas circular coaxial (fig. 15.1) debido a la existencia de la barra central son posibles ondas electromagnéticas transversales u ondas del tipo T. En un campo con estas características las líneas de fuerza eléctricas se sitúan radialmente y se

apoyan sobre las cargas que se encuentran en la barra central y en la superficie interior del tubo. Las líneas magnéticas de fuerza representan circunferencias coaxiales con respecto a la barra de la guía de ondas. El campo electromagnético total se encuentra en el plano r, φ del sistema de coordenadas cilíndricas que es perpendicular al eje de propagación z coincidente con el eje de la guía de ondas.

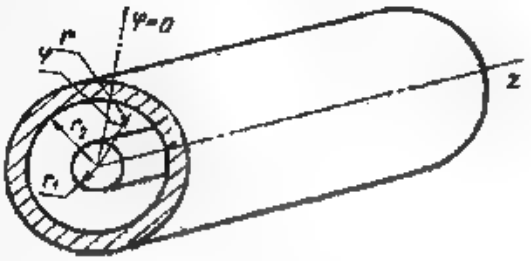

FIG. 15.1

En una guía de ondas coaxial, además de ondas del tipo T es posible la existencia de ondas de los tipos eléctrico y magnético. La propagación de estas ondas se realiza por medio de reflexión múltiple del campo de la superficie interior del tubo y de la barra central, análogamente al proceso que se opera en guías de ondas.

En el presente capítulo se someterán al análisis tanto las ondas del tipo T, como las de los tipos eléctrico y magnético en una guía de ondas coaxial.

§ 15.2. Ondas del tipo T

Puesto que en las ondas del tipo T no hay componentes longitudinales del campo eléctrico o magnético, las ecuaciones fundamentales de estas componentes (12.9) y (12.10) no pueden tomarse como base de nuestros razonamientos. Sin embargo, no es difícil hallar la expresión para el campo magnético en esta guía de ondas, aplicando la ley de la corriente total:

$$\oint_{l_1} \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = I.$$

Al utilizar las amplitudes complejas, la ley de la corriente total se vuelve a escribir sin cambio alguno:

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}}\, d\mathbf{l} = \dot{I}. \qquad (15.1)$$

Como corriente $\dot{I}$ debe entenderse la corriente eléctrica que circula por la barra central de la guía de ondas. En caso de ondas del tipo T el vector de Poynting está orientado a lo largo del eje de propagación y, por consiguiente, el campo electromagnético se propaga a lo largo del eje de la guía de ondas a la velocidad de la luz en el medio que llena dicha guía de ondas. A la misma velocidad debe propagarse la corriente eléctrica a lo largo de la barra central. Si se desprecian las pérdidas en el medio, el coeficiente de propagación γ puede considerarse igual a la constante de fase β.

La variación de la fase a lo largo del eje de propagación z se somete a la ley $e^{-j\beta z}$. En virtud de ello, la corriente que circula por la barra central

$$\dot{I} = \dot{I}_0 e^{-j\beta z}, \tag{15.2}$$

donde $\dot{I}_0$ es el valor de la corriente en el punto $z = 0$.

Al poner la expresión de la corriente $\dot{I}$ en la fórmula (15.1) obtenemos

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}}\, d\mathbf{l} = \dot{I}_0 e^{-j\beta z}. \tag{15.3}$$

Si elegimos como contorno de integración la circunferencia que se encuentra en el plano r, φ y tomamos en consideración la simetría cilíndrica del problema, es posible escribir

$$\oint_{l_1} \dot{\mathbf{H}}\, d\mathbf{l} = \dot{H} \oint_{l_1} dl = \dot{H}\, 2\pi r.$$

Al sustituir el resultado en la fórmula (15.3) hallamos

$$\dot{H}\, 2\pi r = \dot{I}_0 e^{-j\beta z},$$

o bien

$$\dot{H} = \dot{H}_\varphi = \frac{\dot{I}_0 e^{-j\beta z}}{2\pi r} \tag{15.4}$$

De este modo, se ha determinado el campo magnético total orientado a lo largo de la coordenada φ.

El campo eléctrico puede obtenerse a partir de la primera ecuación de Maxwell. En ausencia de pérdidas se puede escribir

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}, \tag{15.5}$$

de donde

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}. \tag{15.6}$$

Valiéndonos de la fórmula para el rotor del vector en el sistema de coordenadas cilíndricas (véase el Apéndice I), obtendremos

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{1}_r \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}(\dot{H}_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\dot{H}_\varphi r)\right\} + \mathbf{1}_\varphi\left\{\frac{\partial}{\partial z}(\dot{H}_r) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial r}(\dot{H}_z)\right\} + \mathbf{1}_z \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(\dot{H}_\varphi r) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(\dot{H}_r)\right\}$$

o bien, sustituyendo en esta expresión el valor de $\dot{H}_\varphi$ de la fórmula (15.4),

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = -\mathbf{1}_r \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(\dot{H}_\varphi r) = -\mathbf{1}_r \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\dot{I}_0 e^{-j\beta z}}{2\pi}\right) =$$
$$= \mathbf{1}_r j \frac{\beta \dot{I}_0 e^{-j\beta z}}{2\pi r}. \tag{15.7}$$

Todos los demás términos de rot $\dot{\mathbf{H}}$ son iguales a cero. Seguidamente, haciendo uso de las expresiones (15.6) y (15.7) es fácil obtener la fórmula para la intensidad del campo eléctrico en el caso de la onda T en una guía de ondas coaxial:

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_r = 1_r \frac{\beta \dot{I}_0 e^{-j\beta z}}{\omega \varepsilon_a 2\pi r}. \qquad (15.8)$$

Coloquemos en esta fórmula el valor de la constante de fase β de la expresión (7.54). Entonces

$$\dot{\mathbf{E}}_r = 1_r \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \cdot \frac{\dot{I}_0 e^{-j\beta z}}{2\pi r}. \qquad (15.9)$$

Puesto que

$$\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = Z_{med}, \qquad (15.10)$$

donde Z_{med} es la resistencia característica del medio, resulta

$$\dot{\mathbf{E}}_r = 1_r Z_{med} \frac{\dot{I}_0 e^{-j\beta z}}{2\pi r} = 1_r Z_{med} \dot{H}_\varphi. \qquad (15.11)$$

De esta forma puede determinarse el campo electromagnético total de la onda del tipo T en una guía de ondas circular coaxial.

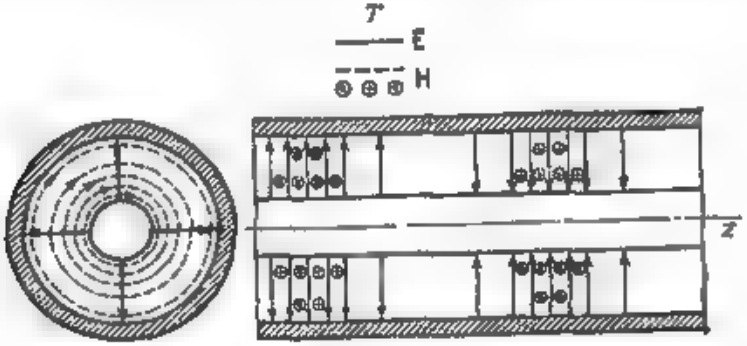

FIG. 15 2

Es de interés hallar la resistencia característica de una guía de ondas coaxial; como tal resistencia se entiende la relación entre las amplitudes complejas de tensión y de corriente en la sección prefijada de la línea de transmisión. Valiéndose de las fórmulas (1.4) y (15.11) se puede determinar la diferencia de potencial entre la barra interior y la envoltura exterior de la guía de ondas coaxial:

$$\dot{U} = \int_{r_1}^{r_2} \dot{E}_r \, dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Z_{med} \dot{I}_0 e^{-j\beta z}}{2\pi r} dr = Z_{med} \frac{\dot{I}_0 e^{-j\beta z}}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Al dividir $\dot{U}$ por la corriente $\dot{I}$ definida mediante la expresión (15.2), obtenemos la resistencia característica de la guía de ondas coaxial Z_l:

$$Z_l = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z_{\text{med}} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}. \qquad (15.12)$$

Una guía de ondas coaxial que trabaja con ondas del tipo T puede utilizarse empezando por frecuencias todo lo bajas que se quiera, incluyendo la canalización de la corriente continua, lo que representa una ventaja de semejantes sistemas de guiaondas.

En la fig. 15.2 se representa el cuadro del campo de una onda del tipo T en una guía de ondas circular coaxial.

§ 15.3. Ondas de los tipos eléctrico y magnético

En el § 14.1 se ha señalado que al analizar las ondas del tipo de guiaondas en una guía de ondas coaxial, en la solución de la ecuación fundamental, además de la función de Bessel, de primer género, debe incluirse también la función de Bessel de segundo género o la función de Neumann. Para $r = 0$ esta función tiene una particularidad, por lo cual se excluye de la solución en una guía de ondas circular ordinaria. En una guía de ondas circular coaxial el espacio ocupado por el campo electromagnético se encuentra en el siguiente diapasón de la variación del radio (véase la fig. 15.1):

$$r_1 < r < r_2. \qquad (15.13)$$

En este caso la función de Neumann se mantiene finita y es necesario incluirla en la solución.

Como se ha establecido en el § 14.1 la solución de la ecuación fundamental para la componente longitudinal del campo eléctrico $\dot{E}_{z0}$ en el sistema de coordenadas cilíndricas viene dada por las fórmulas (14.6), (14.15) y (14.16). Al sustituir las expresiones (14.15) y (14.16) en la fórmula (14.6) obtenemos

$$\dot{E}_{z0} = \{B_1 J_m(gr) + B_2 N_m(gr)\} A_1 \cos(m\varphi),$$

o bien

$$\dot{E}_{z0} = \{C_1 J_m(gr) + C_2 N_m(gr)\} \cos(m\varphi). \qquad (15.14)$$

Aquí

$$C_1 = B_1 A_1, \quad C_2 = B_2 A_1. \qquad (15.15)$$

La expresión para la componente longitudinal del campo magnético se escribirá de manera análoga:

$$\dot{H}_{z0} = \{D_1 J_m(gr) + D_2 N_m(gr)\} \cos(m\varphi). \qquad (15.16)$$

Examinemos, como ejemplo, el curso del análisis de las ondas del tipo eléctrico en una guía de ondas circular coaxial.

El campo $\dot{E}_{z0}$ es tangencial a las paredes de la guía de ondas. Junto a la superficie del metal ideal son justas las siguientes condiciones límites:

$$\dot{E}_{z0} = 0 \left(\text{para} \begin{matrix} r = r_1 \\ r = r_2 \end{matrix} \right). \tag{15.17}$$

Al aplicar las condiciones límites a la expresión (15.14) obtenemos

$$\left.\begin{aligned} C_1 J_m(gr_1) + C_2 N_m(gr_1) &= 0, \\ C_1 J_m(gr_2) + C_2 N_m(gr_2) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{15.18}$$

En este sistema de ecuaciones C_1 y C_2, en el caso general, son constantes distintas de cero, lo cual es posible si es igual a cero el determinante del sistema:

$$\begin{vmatrix} J_m(gr_1) & N_m(gr_1) \\ J_m(gr_2) & N_m(gr_2) \end{vmatrix} = 0. \tag{15.19}$$

o bien

$$J_m(gr_1)\, N_m(gr_2) - J_m(gr_2)\, N_m(gr_1) = 0. \tag{15.20}$$

La relación (15.20) es una ecuación transcendente respecto al número de onda transversal g. Para cada orden prefijado de las funciones m de Bessel y la relación dada de los radios

$$r_2/r_1 = p \tag{15.21}$$

la ecuación puede resolverse ya sea numérica, o bien gráficamente. En este caso puede hallarse una cantidad infinita de valores dis-

Tabla 15.1

p	$(p-1)\,k_{01}$	$(p-1)\,k_{02}$	$(p-1)\,k_{03}$
1,2	3,140	6,282	9,424
1,5	3,135	6,280	9,423
2,0	3,122	6,278	9,418
p	$(p-1)\,k_{11}$	$(p-1)\,k_{12}$	$(p-1)\,k_{13}$
1,2	3,146	6,285	9,426
1,5	3,161	6,293	9,431
2,0	3,197	6,312	9,445

cretos n de los números de onda g que satisfagan la ecuación (15.20). Designemos las raíces de esta ecuación por g_{mn}. Luego introduzcamos la designación

$$g_{mn}r_1 = k_{mn}. \tag{15.22}$$

En la tabla 15.1 se dan los valores k_{mn} multiplicados por $(p-1)$ para una relación dada de los radios p y algunos valores fijados del orden de las funciones m y el número de la raíz n.

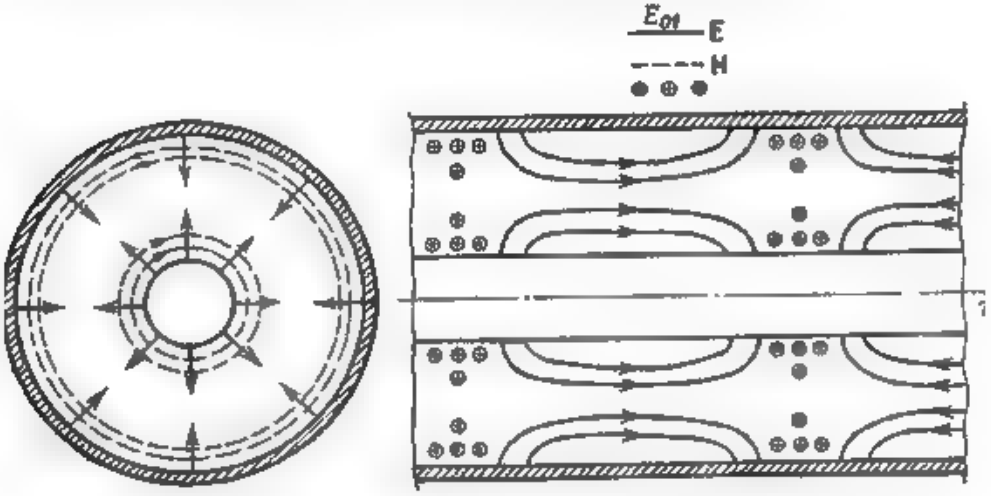

FIG. 15.3

La expresión para la longitud crítica de onda (12.43) teniendo en cuenta las correlaciones (15.21) y (15.22) se escribe en la forma

$$\lambda_{cr} = \frac{2\pi r_1}{k_{mn}} = \frac{2\pi r_1 (p-1)}{(p-1)\, k_{mn}} = \frac{2\pi (r_2 - r_1)}{(p-1)\, k_{mn}}. \tag{15.23}$$

Las componentes del campo para las ondas del tipo E_{mn} pueden determinarse mediante las fórmulas generales de transición (14.27) — (14.32).

La componente longitudinal del campo eléctrico $\dot{E}_{z_0}$ se define por la fórmula (15.14).

A título de ejemplo, en la fig. 15.3 se ilustra el cuadro del campo de la onda del tipo E_{01} en una guía de ondas coaxial. Las ondas del tipo magnético pueden investigarse de una forma análoga.

Actualmente, las ondas del tipo E_{mn} o H_{mn} no hallan utilización práctica en las guías de onda coaxiales, puesto que las pérdidas en estas últimas son mayores que las pérdidas en las guías de onda circulares ordinarias. Las líneas de transmisión del tipo coaxial trabajan en ondas del tipo T.

CAPITULO 16

Placa dieléctrica de extensión infinita como ejemplo de guía de ondas lentas

§ 16.1. Planteamiento del problema

Se ha colocado en el aire una placa dieléctrica plana con los parámetros μ_a, ε_a de espesor $2d$ en dirección de la coordenada x e infinitamente extendida a lo largo de la coordenada y y del eje z (fig. 16.1). Siendo $z < 0$, la placa se interrumpe y entra en una bocina (cono) que también está extendida infinitamente a lo largo del eje y y engendra un campo electromagnético irradiado a lo largo del eje z. Como resultado de la acción de este campo, en la placa y alrededor

FIG. 16.1

de ésta se crea una onda cuyos parámetros es necesario determinar. En el cono en que tiene lugar la excitación de la placa el vector de Poynting del campo excitador puede tener distinta dirección respecto a la normal a la placa que coincide con el eje x. Si el ángulo que el vector de Poynting forma con el eje x es menor que el ángulo de reflexión interna total, entonces, en correspondencia con el análisis de semejantes procesos efectuado en el § 9.4, la onda —procedente del seno del dieléctrico— recae sobre la superficie de separación dieléctrico—aire, se refractará en esta superficie y sale al aire. Si el ángulo formado por el vector de Poynting y el eje x es igual al ángulo de reflexión interna total o lo supera, la onda de este tipo se reflejará de la superficie de separación con el aire y, al incidir bajo el mismo ángulo sobre la otra superficie de separación, volverá a reflejarse de ésta. Dicho proceso continuará a medida que la onda se irá desplazando a lo largo del eje z. Como resultado, en la placa dieléctrica se engendra una onda del tipo de guiaondas ordinario que se propaga en la placa a la velocidad de fase superior a la velocidad de la luz en el dieléctrico c. En otras palabras, en la placa se propagará una onda rápida. De conformidad con el fenómeno de reflexión interna total (véase el § 9.4) en el aire junto a las superficies de la placa se forma una onda lenta que se propaga a lo largo del eje z a la velocidad de fase menor que la velocidad de la luz en el

aire c_0. Ambas ondas (la interna y la externa) forman un campo electromagnético común con la misma velocidad de fase v_f que satisface la desigualdad

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} < v_f < c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}. \tag{16.1}$$

Puesto que

$$c < c_0, \tag{16.2}$$

la observancia de esta desigualdad es completamente posible.

De este modo, una onda que dentro y fuera del dieléctrico posee la velocidad de fase v_f, puede ser rápida respecto a la velocidad de la luz en el dieléctrico y lenta cuando se trata de la velocidad de la luz en el aire. En el presente capítulo se determinarán los parámetros de semejantes ondas y se esclarecerán las condiciones de su existencia.

Se sobreentiende que una placa infinitamente extendida representa la idealización de sistemas de guías de ondas reales, sin embargo, esta circunstancia simplifica sustancialmente el análisis y permite de un modo palmario seguir los procesos que transcurren en guías de ondas lentas.

§ 16.2. Deducción de las relaciones fundamentales

Para mayor precisión empecemos por deducir las ecuaciones fundamentales para las ondas del tipo eléctrico. De forma análoga puede llevarse a cabo la investigación del campo magnético.

La ecuación fundamental para la componente longitudinal del campo eléctrico de una onda rápida que se propaga en la placa será la ecuación (12.9).

En el sistema de coordenadas cartesianas es justa la correspondencia

$$\xi \to x, \quad \eta \to y, \quad \zeta \to z, \quad h_\xi = h_\eta = 1.$$

En este caso la ecuación fundamental se escribe en la forma

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{z0}}{\partial y^2} + g^2 \dot{E}_{z0} = 0.$$

Debido a que la placa es infinitamente extendida a lo largo de la coordenada y (la onda se propaga a lo largo del eje z) y no hay reflexión desde los bordes de la placa, la derivada $\partial^2 \dot{E}_{z0}/\partial y^2 = 0$ y la ecuación fundamental se escriben en la forma

$$d^2 \dot{E}_{z0}/dx^2 + g^2 \dot{E}_{z0} = 0. \tag{16.3}$$

Como solución de esta ecuación se presenta la relación

$$\dot{E}_{z0} = A_1 \cos(gx) + A_2 \operatorname{sen}(gx). \tag{16.4}$$

Las demás componentes del campo que se propagan en la placa pueden obtenerse por medio de fórmulas generales de transición (13.24)—(13.28).

Al sustituir en estas fórmulas la solución (16.4) obtenemos las siguientes relaciones para las componentes del campo de la onda rápida que se propaga en la placa:

$$\dot{E}_x = -j\frac{h}{g^2}\{-gA_1 \operatorname{sen}(gx) + gA_2\cos(gx)\}e^{-jhz}, \qquad (16.5)$$

$$\dot{H}_y = -j\frac{\omega\varepsilon_a}{g^2}\{-gA_1 \operatorname{sen}(gx) + gA_2\cos(gx)\}e^{-jhz} \qquad (16.6)$$

$$\dot{E}_z = \{A_1\cos(gx) + A_2 \operatorname{sen}(gx)\}e^{-jhz}, \qquad (16.7)$$

La ecuación fundamental para la componente longitudinal del campo eléctrico de una onda lenta que se propaga en el aire será la ecuación (12.76).

Designemos la componente longitudinal del campo eléctrico en el aire con $\dot{E}_{z0\ a1}$. Al pasar al sistema de coordenadas cartesianas y tener en cuenta que la derivada $\partial\dot{E}_{z0\ a1}/\partial y = 0$, obtenemos la ecuación fundamental en la forma

$$\frac{d^2\dot{E}_{z0\ a1}}{dx^2} - p^2\dot{E}_{z0\ a1} = 0. \qquad (16.8)$$

con la solución

$$\dot{E}_{z0\ a1} = B_1e^{-px} + B_2e^{px}. \qquad (16.9)$$

La onda superficial decrece a medida que se aleja del sistema retardador, por esta razón conviene suponer

$$B_2 = 0, \qquad (16.10)$$

escribiendo la solución en la forma

$$\dot{E}_{z0\ a1} = B_1e^{-px}. \qquad (16.11)$$

Las relaciones (12.78)—(12.82) representan las fórmulas de paso de la componente longitudinal del campo eléctrico a las componentes transversales. Escribamos estas relaciones en el sistema de coordenadas cartesianas:

$$\dot{E}_{x\ a1} = j\frac{h}{p^2}\cdot\frac{\partial\dot{E}_{z0\ a1}}{\partial x}e^{-jhz}, \qquad (16.12)$$

$$\dot{E}_{y\ a1} = j\frac{h}{p^2}\cdot\frac{\partial\dot{E}_{z0\ a1}}{\partial y}e^{jhz}, \qquad (16.13)$$

$$\dot{H}_{x\ a1} = -j\frac{\omega\varepsilon_0}{p^2}\cdot\frac{\partial\dot{E}_{z0\ a1}}{\partial y}e^{-jhz}, \qquad (16.14)$$

$$\dot{H}_{y\ a1} = j\frac{\omega\varepsilon_0}{p^2}\cdot\frac{\partial\dot{E}_{z0\ a1}}{\partial x}e^{-jhz}, \qquad (16.15)$$

$$\dot{H}_{z\ a1} = 0. \qquad (16.16)$$

Al sustituir en estas fórmulas la solución (16.11) obtenemos las relaciones

$$\dot{E}_{x\,\mathrm{al}} = -j\frac{h}{p}B_1 e^{-px}e^{-jhz}, \tag{16.17}$$

$$\dot{H}_{y\,\mathrm{al}} = -j\frac{\omega\varepsilon_0}{p_0}B_1 e^{-px}e^{-jhz}, \tag{16.18}$$

$$\dot{E}_{z\,\mathrm{al}} = B_1 e^{-px}e^{-jhz}, \tag{16.19}$$

que caracterizan el campo de la onda lenta que se propaga en el aire cerca de la placa.

§ 16.3. Ondas pares e impares. Determinación de las ecuaciones transcendentes para los números de onda transversales

Para determinar los números de onda transversales g y p es necesario aplicar las condiciones límites en la superficie de separación dieléctrico—aire. A partir de las fórmulas (16.5)—(16.7) se infiere que cada componente del campo en la placa se forma de dos sumandos. Con el fin de simplificar las deducciones, la solución, habitualmente, se verifica para dos casos particulares: 1) el coeficiente de amplitud $A_1 = 0$; 2) el coeficiente de amplitud $A_2 = 0$.

En el primer caso, las componentes del campo $\dot{E}_x$, $\dot{H}_y$ que definen el vector de Poynting orientado a lo largo del eje z varían de acuerdo con la ley cos (gx), es decir, conforme a una ley par, mientras que en el segundo caso están sujetas a la ley sen (gx), o sea, representan funciones impares de la coordenada x. El primer caso corresponde a las ondas pares y el segundo a las ondas impares Considerémoslos por separado.

1. Ondas pares $A_1 = 0$. Escribamos las componentes del campo tangenciales a la superficie de separación aire—dieléctrico en la placa para $A_1 = 0$:

$$\dot{H}_y = -j\frac{\omega\varepsilon_a}{g}A_2\cos(gx)\,e^{-jhz}, \tag{16.20}$$

$$\dot{E}_z = A_2\,\mathrm{sen}\,(gx)\,e^{-jhz}, \tag{16.21}$$

o bien, aplicando las condiciones límites (8.9), (8.17),

$$\dot{H}_y = \dot{H}_{y\,\mathrm{al}}\ (\text{para } x = d), \tag{16.22}$$

$$\dot{E}_z = \dot{E}_{z\,\mathrm{al}}\ (\text{para } x = d), \tag{16.23}$$

$$-j\frac{\omega\varepsilon_a}{g}A_2\cos(gd)\,e^{-jhz} = -j\frac{\omega\varepsilon_0}{p}B_1 e^{-pd}e^{-jhz},$$

$$A_2\,\mathrm{sen}\,(gd)\,e^{-jhz} = B_1 e^{-pd}e^{-jhz}.$$

Al dividir término a término la segunda ecuación por la primera y al simplificar, obtenemos

$$\frac{g}{\varepsilon_a} tg\,(gd) = \frac{p}{\varepsilon_0}.$$

Al multiplicar ambos miembros por $\varepsilon_0 d$ obtenemos una ecuación transcendente que liga los números de onda transversales g y p en el caso de ondas pares:

$$\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_a} gd\,tg\,(gd) = pd. \qquad (16.24)$$

2. **Ondas impares** $A_2 = 0$. En este caso las componentes del campo tangenciales a la superficie de separación aire—dieléctrico en la placa se escriben en la forma

$$\dot{H}_y = j\frac{\omega\varepsilon_a}{g} A_1 \operatorname{sen}(gx)\, e^{-jhz}, \qquad (16.25)$$

$$\dot{E}_z = A_1 \cos(gx)\, e^{-jhz}, \qquad (16.26)$$

o bien, aplicando las condiciones límites (16.22) y (16.23)

$$j\frac{\omega\varepsilon_a}{g} A_1 \operatorname{sen}(gd)\, e^{-jhz} = -j\frac{\omega\varepsilon_0}{p} B_1 e^{-pd} e^{-jhz},$$

$$A_1 \cos(gd)\, e^{-jhz} = B_1 e^{-pd} e^{-jhz}.$$

Al dividir término a término la segunda ecuación por la primera hallamos

$$\frac{g}{\varepsilon_a} \operatorname{ctg}(gd) = -\frac{p}{\varepsilon_0}.$$

Al multiplicar ambos miembros por $\varepsilon_0 d$ obtenemos una ecuación transcendente que relaciona los números de onda transversales p y g en el caso de ondas impares:

$$\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_a} gd \operatorname{ctg}(gd) = -pd. \qquad (16.27)$$

§ 16.4. Solución de las ecuaciones transcendentes y determinación de los números de onda transversales. Frecuencias críticas en el caso de ondas eléctricas de distintos tipos

Las ecuaciones transcendentes obtenidas para las ondas pares e impares contienen las incógnitas g y p. Para determinarlas es necesario introducir una ecuación más que puede obtenerse empleando las expresiones (12.26) y (12.74) para los números de onda longitudinales h escritas teniendo en cuenta ondas rápidas y lentas.

En el caso considerado las ondas lentas se propagan en el aire para el cual $\mu_a = \mu_0$ y $\varepsilon_a = \varepsilon_0$. Por consiguiente, el número de

onda longitudinal para las ondas lentas es

$$h = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 + p^2}. \qquad (16.28)$$

Como se ha señalado en el § 16.1 la velocidad de fase de las ondas rápida y lenta debe ser la misma. En virtud de que la relación (12.19) es justa también deben ser idénticos los números de onda longitudinales Al igualar las expresiones (12.26) y (16.28) obtenemos

$$\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - g^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 + p^2,$$

o bien

$$\omega^2 (\mu_a \varepsilon_a - \mu_0 \varepsilon_0) = g^2 + p^2.$$

Al multiplicar esta correlación por d^2:

$$(gd)^2 + (pd)^2 = \omega^2 d^2 (\mu_a \varepsilon_a - \mu_0 \varepsilon_0) \qquad (16\ 29)$$

e introducir la designación

$$\omega^2 d^2 (\mu_a \varepsilon_a - \mu_0 \varepsilon_0) = R^2,$$

donde

$$R = \omega d \sqrt{\mu_a \varepsilon_a - \mu_0 \varepsilon_0}, \qquad (16.30)$$

obtenemos

$$(gd)^2 + (pd)^2 = R^2. \qquad (16.31)$$

La relación (16 31) representa la ecuación de una circunferencia de radio R en coordenadas gd y pd. Al resolver conjuntamente las

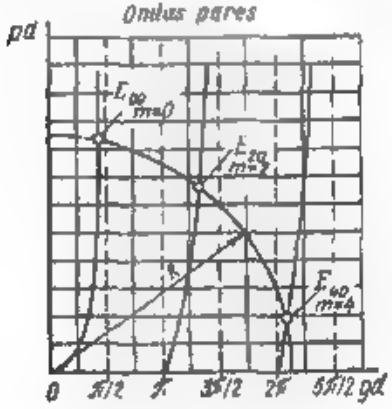

FIG. 16.2

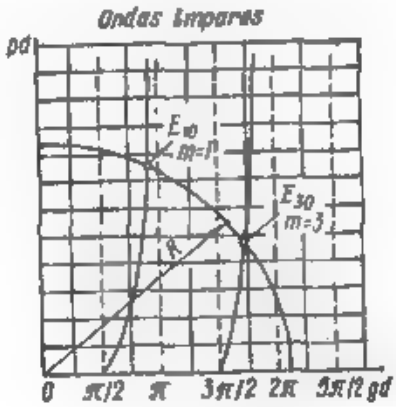

FIG. 16.3

ecuaciones transcendentes (16.24), (16.27) y la ecuación (16.31) se hallan los valores de los números de onda transversales g y p.

La solución puede hallarse recurriendo a ordenadores o por vía gráfica. En las figs. 16.2 y 16.3 se puede apreciar la solución gráfica de estas ecuaciones. Los puntos de intersección de las circunferencias con las curvas $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_a} gd \operatorname{tg}(gd) = pd$ y $-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_a} gd \operatorname{ctg}(gd) = pd$

representan los valores gd y pd, de donde se determinan los números de onda transversales g y p para el semiespesor prefijado d de la placa. Al representar las curvas cabe recordar que los valores pd y gd deben ser positivos, lo que corresponde a la presencia o ausencia de tangentoides o cotangentoides en los cuadrantes.

Puesto que el campo no depende de la coordenada y, en un sistema ordinario de designación de ondas eléctricas en una guía de ondas (ondas del tipo E_{mn}) el índice n, que determina el número de variaciones del campo por la coordenada y, debe ser igual a cero. El índice m significa el número de orden de intersección de la circunferencia con las curvas. A la intersección en el primer cuadrante corresponde $m = 0$, a la intersección en el segundo cuadrante, $m = 1$; a la intersección en el tercer cuadrante, $m = 2$, etc.

Como se deduce de las figuras, la onda del tipo E_{00} puede existir con cualquier valor de R, ya que en este caso hay un punto de intersección en el intervalo desde $gd = 0$ hasta $gd = \pi/2$.

La onda del tipo E_{10} puede existir tan sólo cuando $R > \pi/2$, etc.

De este modo, la condición de existencia de ondas del tipo E_{m0} será

$$R > m\frac{\pi}{2}. \tag{16.32}$$

Al sustituir el valor de R a partir de la ecuación (16.30) tenemos

$$\omega d \sqrt{\mu_a \varepsilon_a - \mu_0 \varepsilon_0} > m\frac{\pi}{2}. \tag{16.33}$$

Con los parámetros de la placa prefijados esta expresión permite obtener el valor de la frecuencia crítica, empezando por el cual es posible la existencia de la onda del tipo dado:

$$\omega_{cr} = \frac{m\pi}{2d\sqrt{\mu_a \varepsilon_a - \mu_0 \varepsilon_0}}. \tag{16.34}$$

Para la onda del tipo E_{00}, siendo $m = 0$,

$$\omega_{cr\,(E_{00})} = 0. \tag{16.35}$$

Sin embargo, la frecuencia crítica nula no significa que la placa dieléctrica puede aprovecharse en la práctica como sistema de guiaondas para frecuencias todo lo bajas que se quiera. Al pequeño valor de la frecuencia corresponde el pequeño valor del radio R y, de acuerdo con la fig. 16.2, valores pequeños de los números de onda transversales p, g. En este caso desaparece el carácter superficial del campo que deja de concentrarse cerca del sistema retardador, que es la placa dieléctrica. Dicho campo adquiere el carácter de onda emitida por el sistema excitador. El sistema dieléctrico deja de jugar un papel esencial en la formación del campo.

Como se infiere de la expresión (16.28), cuando el valor de p es pequeño el número de onda longitudinal h se aproxima al número

de onda $\beta = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$, que define la propagación de las ondas en el espacio libre.

Para el caso de una frecuencia prefijada el radio R y los números de onda transversales g y p crecen con el aumento de los parámetros μ_a, ε_a del dieléctrico y del espesor de la placa $2d$. El incremento de p provoca una mayor atenuación del campo a una distancia dada x desde la superficie de la placa. La mayor parte de la energía comienza a propagarse dentro del sistema retardador. El carácter imperfecto del dieléctrico origina en este caso un incremento de las pérdidas en el canal del guiaondas. Esta es la razón por la cual, en la práctica, al crear guías de ondas lentas, conviene optar por un compromiso, de modo que el campo posea una atenuación necesaria a medida que se aleja de la superficie del sistema retardador y que, al mismo tiempo, las pérdidas queden dentro de los límites de la norma prefijada.

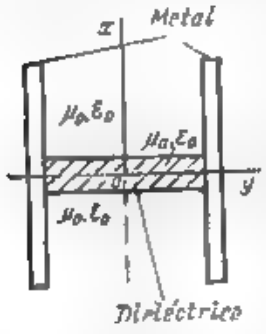

FIG. 16.4

En el caso de curvatura del sistema retardador surge el peligro, siendo pequeños los valores de p, de radiación del campo (separación del sistema retardador) en el lugar de la curvatura. Esta circunstancia también debe tomarse en consideración. Es indudable que a medida que la industria elabore dieléctricos más perfectos aumentará el papel de los sistemas de guiaondas que utilizan ondas lentas.

Se han analizado los procesos en un sistema de guiaondas idealizado. La admisión de una extensión infinita de la placa dieléctrica a lo largo de la coordenada permitía considerar el campo no dependiente de esta coordenada. En el caso de ondas del tipo magnético con las componentes $\dot{H}_x, \dot{H}_z$ y $\dot{E}_y$ se puede tomar una placa dieléctrica de dimensiones finitas a lo largo del eje y, colocando a cada lado una placa metálica tal como se muestra en la fig. 16.4. En este caso la componente del campo $\dot{E}_y$ está orientada normalmente a las paredes metálicas, lo que está permitido por las condiciones límites junto a la superficie del metal ideal, y el cuadro general del campo será el mismo que en el caso de extensión infinita de la placa dieléctrica a lo largo del eje y. Semejante guía de ondas metalo-dieléctrica en forma de H se utiliza en la práctica.

§ 16.5. Coeficiente de retardo de las ondas superficiales

La velocidad de fase se define por la relación (12.19). Al sustituir en ésta el valor de h (16.28), obtenemos

$$v_f = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 + p^2}} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_a} \sqrt{1 + \dfrac{p^2}{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_a}}},$$

o bien

$$v_f = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_0}}} \tag{16.36}$$

donde c_0 es la velocidad de la luz en el vacío.

El denominador de la expresión (16.36) puede representarse en la forma

$$\sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0}} = 1 + k_{ret}. \tag{16.37}$$

En este caso la velocidad de fase es

$$v_f = c_0/(1 + k_{ret}). \tag{16.38}$$

El coeficiente k_{ret} se denomina *coeficiente (o factor) de retardo (moderación)*. Este coeficiente caracteriza la disminución de la velocidad de fase en comparación con la velocidad de la luz. Dicho factor es un índice importante de los sistemas retardadores y se utiliza frecuentemente en el análisis de los mismos.

§ 16.6. Velocidad en grupo de las ondas superficiales

Como se ha señalado, el campo de la onda rápida que se propaga en la placa dieléctrica y el campo de la onda lenta que se emite fuera de la placa constituyen un campo electromagnético único del sistema retardador.

Para la velocidad en grupo es fundamental la expresión (12.47):

$$v_{gr} = \frac{1}{\partial h/d\omega}\Big|_{\substack{\omega=\omega_s \\ h=h_s}}.$$

Para el número de onda longitudinal h puede escogerse ya sea la expresión (12.26) o bien la expresión (16.28). Si elegimos como base la fórmula (12.26), entonces, teniendo en cuenta la dependencia de g respecto a ω

$$\frac{dh}{d\omega} = \frac{2\omega\mu_a\varepsilon_a - 2g\frac{dg}{d\omega}}{2\sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a - g^2}} = \frac{\omega\mu_a\varepsilon_a - g\frac{dg}{d\omega}}{\sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a - g^2}}.$$

En este caso

$$v_{gr} = \frac{\omega\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_0}}}{\omega\mu_a\varepsilon_a\left(1 - \frac{g}{\omega\mu_a\varepsilon_a}\cdot\frac{dg}{d\omega}\right)}\Bigg|_{\omega=\omega_s},$$

o bien

$$v_{gr} = \frac{c}{1 - \frac{g}{\omega\mu_a\varepsilon_a}\cdot\frac{dg}{d\omega}}\sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}}\Bigg|_{\omega=\omega_s}, \tag{16.39}$$

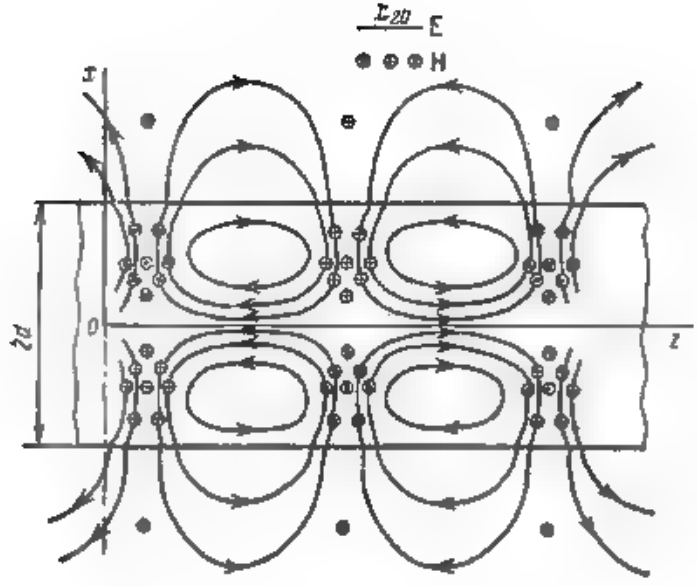

FIG. 16.5

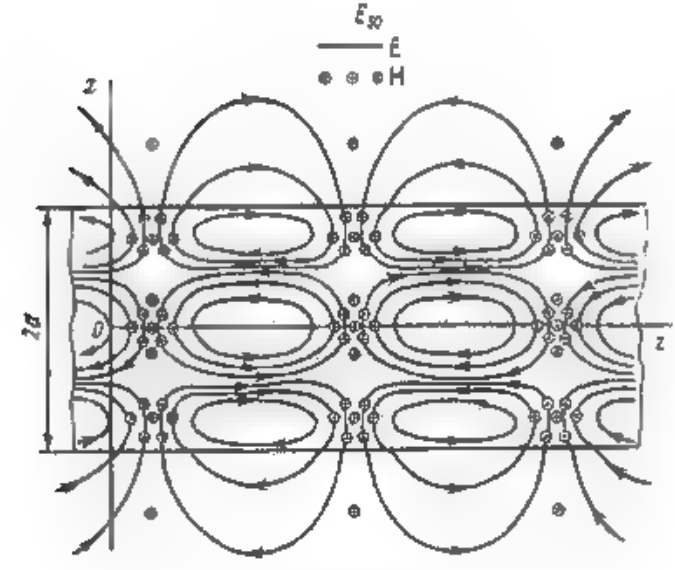

FIG. 16 6

donde c es la velocidad de la luz en un medio con los parámetros μ_a, ε_a.

Al variar la frecuencia ω, de acuerdo con la fórmula (16.30) y las figs. 16.2 y 16.3 cambian el radio R y el número de onda transversal g. Una vez determinado, para un caso concreto, el valor numérico de la derivada $dg/d\omega$, es posible, empleando la fórmula (16.39), calcular la velocidad en grupo.

§ 16.7. Cuadros del campo en el caso de utilización de la placa dieléctrica como sistema retardador

En las figs 16.5 y 16.6 se representan los cuadros del campo de las ondas del tipo E_{20} y E_{30} construidos para una guía de ondas dieléctrica plana, basándose en el cálculo de los números de onda transversales y empleando las fórmulas (16.5)—(16.7) y (16.17)—(16.19).

CAPÍTULO 17

Guía de ondas dieléctrica circular

§ 17.1. Planteamiento del problema

La placa dieléctrica de extensión infinita es una idealización de un sistema de guiaondas real. La extensión infinita de la placa a lo largo de la dirección de propagación de la onda electromagnética, es decir, a lo largo del eje z, equivale a la ausencia de un campo reflejado. Al elegir convenientemente la carga del sistema de guiaondas se puede garantizar la ausencia del campo reflejado, análogamente a como ello se hace al cargar una línea larga para la resistencia característica. La idealización esencial consiste en que la placa se considera extendida infinitamente a lo largo del eje y, lo que lleva aparejado la independencia del campo respecto a esta coordenada.

Los sistemas de guiaondas reales son finitos en el plano de la sección transversal. Es ejemplo de semejante sistema real una guía de ondas metalo-dieléctrica en forma de H (véase la fig. 16.4) que funciona a base de ondas del tipo magnético, así como una barra dieléctrica circular o un hilo suspendido en el aire mediante dispositivos especiales y cuya influencia puede despreciarse al examinar las propiedades principales de un sistema retardador de este tipo. En la barra dieléctrica, igual que en la placa dieléctrica analizada en el capítulo 16, se propagan ondas rápidas. El campo que se

refleja múltiplemente de la superficie lateral de la barra, bajo un ángulo igual o mayor que el ángulo de reflexión interna total, se propaga a lo largo del eje de la misma creando fuera de sus límites una onda superficial lenta tendiente a la superficie de la guía de ondas dieléctrica.

En el presente capítulo se deducirán las relaciones básicas que determinan el funcionamiento de tal dispositivo. A finales del capítulo se enumerarán brevemente las posibles modificaciones de los sistemas de guiaondas dieléctricos que se utilizan actualmente en la práctica. No se da el análisis detallado de estos sistemas ya que sale del marco del curso «Principios de electrodinámica».

§ 17.2. Deducción de la ecuación fundamental para las componentes longitudinales del campo de una onda rápida dentro de una barra dieléctrica circular y solución de esta ecuación

En la investigación del campo dentro de una guía de ondas dieléctrica circular es conveniente utilizar las ecuaciones fundamentales para las componentes longitudinales del campo escritas en el sistema de coordenadas cilíndrico. Estas ecuaciones se han definido en el § 14.1 al analizar la guía de ondas circular [véanse las relaciones (14.2) y (14.3)]. Haciendo uso de la sustitución del tipo (14.6), estas ecuaciones pueden dividirse en dos expresiones independientes (14.11) y (14.12).

La solución de la ecuación (14.11) es una suma de funciones de Bessel de primer y segundo géneros y se escribe en la forma (14.16). La solución de la ecuación (14.12) puede representarse en la forma (14.13).

Como se ha indicado, en el espacio hueco de una guía de ondas dieléctrica, al igual que en una placa dieléctrica, se propagan ondas rápidas de guías de ondas para las cuales son justas las ecuaciones (14.11) y (14.12). Puesto que el eje de la guía de ondas correspondiente a los valores de la coordenada $r = 0$ entra en el espacio en que tiene lugar la propagación de ondas, es necesario eliminar de la solución del tipo (14.16) la función de Bessel de segundo género $N_m(gr)$ que para $r = 0$ acusa una particularidad. En otras palabras, es preciso poner en esta solución que $B_2 = 0$, como se ha hecho al analizar la guía de ondas metálica circular, anotando la solución de la manera siguiente:

$$R = B_1 J_m(gr). \tag{17.1}$$

Las relaciones (14.6), (14.13) y (17.1) permiten escribir la siguiente expresión para la componente longitudinal del campo eléctrico en el interior de una barra dieléctrica:

$$\dot{E}_{z0} = B_1 J_m(gr)\{A_1 \cos(m\varphi) + A_2 \operatorname{sen}(m\varphi)\}. \tag{17.2}$$

Al introducir las designaciones

$$B_1 A_1 = C_1 \quad \text{y} \quad B_1 A_2 = C_2, \tag{17.3}$$

obtenemos

$$\dot{E}_{z0} \quad J_m(gr)\{C_1 \cos(m\varphi) + C_2 \operatorname{sen}(m\varphi)\} \tag{17.4}$$

Expresión análoga puede obtenerse resolviendo la ecuación (14.3) para la componente longitudinal del campo magnético en una barra dieléctrica:

$$\dot{H}_{z0} = J_m(gr)\{C_3 \cos(m\varphi) + C_4 \operatorname{sen}(m\varphi)\}. \tag{17.5}$$

§ 17.3. Deducción de la ecuación fundamental para las componentes longitudinales del campo de una onda lenta fuera de la barra dieléctrica y solución de esta ecuación

Como se ha demostrado en el § 12.4, cuando se trata de ondas lentas el número de onda transversal g se convierte en jp. Las ecuaciones fundamentales (14.2) y (14.3) para las componentes longitudinales de los campos $\dot{E}_{z10}$ y $\dot{H}_{z10}$ se escriben en este caso de la manera siguiente:

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \dot{E}_{z10}}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{z10}}{\partial \varphi}\right)\right\} - p^2 \dot{E}_{z10} = 0, \tag{17.6}$$

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \dot{H}_{z10}}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \dot{H}_{z10}}{\partial \varphi}\right)\right\} - p^2 \dot{H}_{z10} = 0. \tag{17.7}$$

Valiéndose de la sustitución del tipo

$$\dot{E}_{z10} = R_1(r)\,\Phi_1(\varphi) \tag{17.8}$$

es posible reducir la ecuación (17.4) a dos ecuaciones para las funciones $R_1(r)$ y $\Phi_1(\varphi)$:

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial R_1}{\partial r} - \left(p^2 + \frac{m^2}{r^2}\right) R_1 = 0. \tag{17.9}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} + m^2 \Phi_1 = 0. \tag{17.10}$$

Sirven de solución de la ecuación las funciones de Bessel de tercero y cuarto géneros del orden m que con frecuencia llevan el nombre de *funciones modificadas de Bessel* $\operatorname{Im}(pr)$ *y funciones de Macdonald* $K_m(pz)$ *del orden* m.

A diferencia de las funciones de Bessel de primer y segundo géneros las funciones modificadas de Bessel y las funciones de Macdonald no revisten carácter oscilatorio, sino creciente o decreciente monótonamente. Los gráficos de estas funciones de los órdenes cero y primero se muestran en la fig. 17.1. De este modo, en el caso general, la solución de la ecuación (17.9) debe contener la función modificada

de Bessel Im (*pr*) y la función de Macdonald K_m (*pr*):

$$R_1 = B_3 I_m (pr) + B_4 K_m (pr), \qquad (17.11)$$

donde B_3 y B_4 son coeficientes de amplitud

Según sea la región del espacio en que se busca la solución, una de estas constantes es igual a cero. Esto se debe al hecho de que la función I_m (*pr*) tiene una particularidad (tiende a ∞), como se infiere de la fig. 17.1, cuando $r \to \infty$, mientras que la función K_m (*pr*) lo hace cuando $r = 0$.

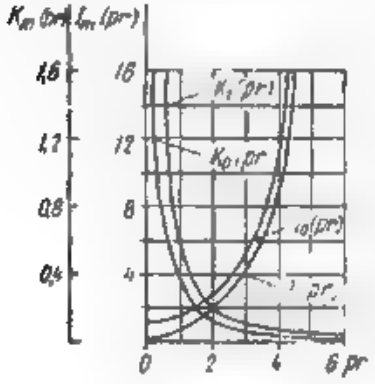

FIG. 17.1

Las ondas lentas existen fuera de la barra si $r \geqslant r_0$, donde r_0 es el radio de la barra.

La amplitud de las ondas lentas no puede incrementarse infinitamente a medida que se alejan de la superficie de la barra. Por consiguiente, en la solución (17.11) es necesario eliminar la función I_m (*pr*), tomando

$$B_3 = 0. \qquad (17.12)$$

La función K_m (*pr*) debe conservarse a raíz de que en ningún lugar de la región, en que existen las ondas lentas, el radio corriente alcanza el valor cero. En otras palabras, se excluye la particularidad de la función K_m (*pr*). En este caso es justa la expresión

$$R_1 = B_4 K_m (pr). \qquad (17.13)$$

La solución de la ecuación (17.10) se escribe de forma ordinaria:

$$\Phi_1 = A_1 \cos (m\varphi) + A_2 \operatorname{sen} (m\varphi). \qquad (17.14)$$

La componente longitudinal $\dot{E}_{z10}$ a base de la fórmula (17.8) es igual a

$$\dot{E}_{z10} = B_4 K_m (pr) \{A_1 \cos (m\varphi) + A_2 \operatorname{sen} (m\varphi). \qquad (17.15)$$

Al introducir la designación

$$B_4 A_1 = C_5, \quad B_4 A_2 = C_6, \qquad (17.16)$$

obtenemos

$$\dot{E}_{z10} = K_m (pr) \{C_5 \cos (m\varphi) + C_6 \operatorname{sen} (m\varphi)\}. \qquad (17.17)$$

La solución de la ecuación (17.7) para la componente longitudinal del campo magnético nos lleva a resultados análogos:

$$\dot{H}_{z10} = K_m (pr) \{C_7 \cos (m\varphi) + C_8 \operatorname{sen} (m\varphi)\}. \qquad (17.18)$$

§ 17.4. Determinación de las componentes transversales del campo de las ondas rápida y lenta

El paso de las componentes longitudinales del campo a las transversales se realiza empleando las fórmulas generales (14.27)—(14.32) y (14.41)—(14.46).

Las componentes del campo de la onda rápida que se propaga en el interior de la barra pueden obtenerse mediante la sustitución en estas fórmulas de las relaciones (17.4) y (17.5). Como resultado de la sustitución se pueden escribir las siguientes expresiones:

$$\dot{E}_{r\,el} = -j\frac{h}{g}J'_m(gr)\{C_1\cos(m\varphi)+C_2\operatorname{sen}(m\varphi)\}e^{-jhz}, \tag{17.19}$$

$$\dot{E}_{\varphi\,el} = -j\frac{hm}{rg^2}J_m(gr)\{-C_1\operatorname{sen}(m\varphi)+C_2\cos(m\varphi)\}e^{-jhz} \tag{17.20}$$

$$\dot{E}_{z\,el} = J_m(gr)\{C_1\cos(m\varphi)+C_2\operatorname{sen}(m\varphi)\}e^{-jhz}, \tag{17.21}$$

$$\dot{H}_{r\,el} = j\frac{\omega\varepsilon_a m}{rg^2}J_m(gr)\{-C_1\operatorname{sen}(m\varphi)+C_2\cos(m\varphi)\}e^{-jhz}, \tag{17.22}$$

$$\dot{H}_{\varphi\,el} = -j\frac{\omega\varepsilon_a}{g}J'_m(gr)\{C_1\cos(m\varphi)+C_2\operatorname{sen}(m\varphi)\}e^{-jhz}, \tag{17.23}$$

$$\dot{H}_{z\,el} = 0, \tag{17.24}$$

$$\dot{H}_{rm} = -j\frac{h}{g}J'_m(gr)\{C_3\cos(m\varphi)+C_4\operatorname{sen}(m\varphi)\}e^{-jhz}, \tag{17.25}$$

$$\dot{H}_{\varphi m} = -j\frac{hm}{rg^2}J_m(gr)\{-C_3\operatorname{sen}(m\varphi)+C_4\cos(m\varphi)\}e^{-jhz}, \tag{17.26}$$

$$\dot{H}_{zm} = J_m(gr)\{C_3\cos(m\varphi)+C_4\operatorname{sen}(m\varphi)\}e^{-jhz}, \tag{17.27}$$

$$\dot{E}_{rm} = -j\frac{\omega\mu_a m}{rg^2}J_m(gr)\{-C_3\operatorname{sen}(m\varphi)+C_4\cos(m\varphi)\}e^{-jhz}, \tag{17.28}$$

$$\dot{E}_{\varphi m} = j\frac{\omega\mu_a}{g}J'_m(gr)\{C_3\cos(m\varphi)+C_4\operatorname{sen}(m\varphi)\}e^{-jhz}, \tag{17.29}$$

$$\dot{E}_{zm} = 0. \tag{17.30}$$

Las componentes del campo de la onda lenta que se propaga fuera de la barra dieléctrica se obtienen sustituyendo en las expresiones (14.27)—(14.32) y (14.41)—(14.46) las fórmulas para las componentes longitudinales del campo (17.17) y (17.18). Además, hay que tener en cuenta la expresión (12.68) válida para las ondas lentas:

$$g^2 \to -p^2.$$

La permitividad ε_a y la permeabilidad magnética μ_a se convierten, respectivamente, en constantes eléctrica y magnética ε_0 y μ_0.

Como resultado de las operaciones citadas se obtienen las siguientes relaciones para las componentes del campo de la onda lenta:

$$\dot{E}_{r1\,el} = j\frac{h}{p}K'_m(pr)\{C_5\cos(m\varphi) + C_6\,\mathrm{sen}\,(m\varphi)\}\,e^{-jhz}, \quad (17.31)$$

$$\dot{E}_{\varphi 1\,el} = j\frac{hm}{rp^2}K_m(pr)\{-C_5\,\mathrm{sen}\,(m\varphi) + C_6\cos(m\varphi)\}\,e^{-jhz}, \quad (17.32)$$

$$\dot{E}_{z1\,el} = K_m(pr)\{C_5\cos(m\varphi) + C_6\,\mathrm{sen}\,(m\varphi)\}\,e^{-jhz}, \quad (17.33)$$

$$\dot{H}_{r1\,el} = -j\frac{\omega\varepsilon_0 m}{rp^2}K_m(pr)\{-C_5\,\mathrm{sen}\,(m\varphi) + C_6\cos(m\varphi)\}\,e^{-jhz}, \quad (17.34)$$

$$\dot{H}_{\varphi 1\,el} = j\frac{\omega\varepsilon_0}{p}K'_m(pr)\{C_5\cos(m\varphi) + C_6\,\mathrm{sen}\,(m\varphi)\}\,e^{-jhz}, \quad (17.35)$$

$$\dot{H}_{z1\,el} = 0. \quad (17.36)$$

$$\dot{H}_{r1\,m} = j\frac{h}{p}K'_m(pr)\{C_7\cos(m\varphi) + C_8\,\mathrm{sen}\,(m\varphi)\}\,e^{-jhz}, \quad (17.37)$$

$$\dot{H}_{\varphi 1\,m} = j\frac{hm}{rp^2}K_m(pr)\{-C_7\,\mathrm{sen}\,(m\varphi) + C_8\cos(m\varphi)\}\,e^{-jhz}, \quad (17.38)$$

$$\dot{H}_{z1\,m} = K_m(pr)\{C_7\cos(m\varphi) + C_8\,\mathrm{sen}\,(m\varphi)\}\,e^{-jhz}, \quad (17.39)$$

$$\dot{E}_{r1\,m} = j\frac{\omega\mu_0 m}{rp^2}K_m(pr)\{-C_7\,\mathrm{sen}\,(m\varphi) + C_8\cos(m\varphi)\}\,e^{-jhz} \quad (17.40)$$

$$\dot{E}_{\varphi 1\,m} = -j\frac{\omega\mu_0}{p}K'_m(pr)\{C_7\cos(m\varphi) + C_8\,\mathrm{sen}\,(m\varphi)\}\,e^{-jhz}, \quad (17.41)$$

$$\dot{E}_{z1\,m} = 0. \quad (17.42)$$

§ 17.5. Determinación de los números de onda transversales g y p y del número de onda longitudinal h. Posibilidad de existencia por separado de las ondas de los tipos eléctrico y magnético

Los números de onda transversales se determinan por medio de las condiciones límites junto a la superficie de la barra dieléctrica

$$\dot{E}_\varphi = \dot{E}_{\varphi 1},\ \dot{H}_\varphi = \dot{H}_{\varphi 1},\ \dot{E}_z = \dot{E}_{z1},\ \dot{H}_z = \dot{H}_{z1}\ (\text{para } r = r_0). \quad (17.43)$$

Por ahora faltan datos que permitan juzgar sobre la posibilidad de existencia por separado de ondas de los tipos eléctrico y magnético en una guía de ondas dieléctrica circular. Esta es la razón por la cual, al principio, es racional aplicar las condiciones límites al campo total que representa la superposición de los campos de los tipos eléctrico y magnético y, luego, determinar si es posible la existencia separada de los campos de dichos tipos.

Escribamos las expresiones para el campo total $\dot{E}_{\varphi\Sigma}$ dentro de la barra y $\dot{E}_{\varphi 1\Sigma}$ fuera de la barra, utilizando, respectivamente,

las fórmulas (17.20), (17.29) y (17.32), (17.41):

$$\dot{E}_{\varphi 2}=\dot{E}_{\varphi\,2\,el}+\dot{E}_{\varphi 2\,m}=-j\frac{hm}{rg^2}J_m(gr)\{-C_1\operatorname{sen}(m\varphi)+C_2\cos(m\varphi)\}\,e^{-jhz}+$$

$$+j\frac{\omega\mu_2}{g}J'_m(gr)\{C_3\cos(m\varphi)+C_4\operatorname{sen}(m\varphi)\}\,e^{-jhz}, \qquad (17.44)$$

$$\dot{E}_{\varphi 1}=\dot{E}_{\varphi 1\,el}+\dot{E}_{\varphi 1\,m}=j\frac{hm}{rp^2}K_m(pr)\{-C_5\operatorname{sen}(m\varphi)+$$

$$+C_6\cos(m\varphi)\}\,e^{-jhz}-j\frac{\omega\mu_0}{p}K'_m(pr)\times$$

$$\times\{C_7\cos(m\varphi)+C_8\operatorname{sen}(m\varphi)\}\,e^{-jhz}. \qquad (17.45)$$

Apliquemos las condiciones límites (17.43):

$$\dot{E}_{\varphi 2}=\dot{E}_{\varphi 1}\ (\text{para } r=r_0). \qquad (17.46)$$

Las componentes idénticas del campo en el interior de la barra y fuera de ésta deben variar a lo largo de la coordenada φ de acuerdo con una misma ley, de lo contrario, es imposible el cumplimiento de las condiciones límites. Puesto que la elección del origen para calcular el ángulo φ es arbitraria, como esta ley puede figurar sen $(m\varphi)$, o bien, cos $(m\varphi)$. Lo importante es que las correspondientes componentes del campo (por ejemplo, $\dot{E}_\varphi$) tanto dentro como fuera de la barra tengan la misma ley de variación.

Supongamos que todas las componentes del campo $\dot{E}_\varphi$ varían conforme a la ley sen $(m\varphi)$. Entonces, en las expresiones para las componentes del campo en el interior de la barra (17.19)—(17.30) los coeficientes de amplitud C_2 y C_3 deben tomarse iguales a cero. Análogamente, en las expresiones (17.31)—(17.42) para las componentes del campo fuera de la barra es necesario igualar a cero los coeficientes de amplitud C_6 y C_7:

$$C_2=C_4=C_6=C_7=0. \qquad (17.47)$$

No es difícil cerciorarse de que, al observar estas condiciones, según una misma ley cambian a lo largo de la coordenada φ las mismas componentes del campo tanto dentro como fuera de la barra dieléctrica.

El cumplimiento de las condiciones límites (17.46) nos da

$$\frac{hm}{r_0g^2}J_m(gr_0)C_1+\frac{\omega\mu_0}{g}J'_m(gr_0)C_4=$$

$$=-\frac{hm}{r_0p^2}K_m(pr_0)C_5-\frac{\omega\mu_0}{p}K'_m(pr_0)C_8. \qquad (17.48)$$

Procediendo de modo análogo con respecto a las componentes $\dot{H}_\varphi$, $\dot{E}_z$ y $\dot{H}_z$ obtenemos las siguientes expresiones:

$$-\frac{\omega\varepsilon_a}{g} J'_m(gr_0) C_1 - \frac{hm}{r_0 g^2} J_m(gr_0) C_4 = \\ = \frac{\omega\varepsilon_0}{p} K'_m(pr_0) C_5 + \frac{hm}{r_0 p^2} K_m(pr_0) C_6, \tag{17.49}$$

$$J_m(gr_0) C_2 = K_m(pr_0) C_5, \tag{17.50}$$

$$J_m(gr_0) C_4 = K_m(pr_0) C_6. \tag{17.51}$$

Determinemos los coeficientes C_5 y C_6 a partir de las relaciones (17.50) y (17.51)

$$C_5 = \frac{J_m(gr_0)}{K_m(pr_0)} C_2, \tag{17.52}$$

$$C_6 = \frac{J_m(gr_0)}{K_m(pr_0)} C_4. \tag{17.53}$$

Hagamos la sustitución de los valores de estos coeficientes en las ecuaciones (17.48) y (17.49) cambiando de lugar los términos:

$$\frac{hm}{r_0 g^2} J_m(gr_0) C_1 + \frac{hm J_m(gr_0)}{r_0 p^2 K_m(pr_0)} K_m(pr_0) C_2 = \\ = -\frac{\omega\mu_a J'_m(gr_0)}{g} C_4 - \frac{\omega\mu_0 K'_m(pr_0) J_m(gr_0)}{p K_m(pr_0)} C_4, \tag{17.54}$$

$$-\frac{\omega\varepsilon_a}{g} J'_m(gr_0) C_1 - \frac{\omega\varepsilon_0 K'_m(pr_0) J_m(gr_0)}{p K_m(pr_0)} C_2 = \\ = \frac{hm}{r_0 g^2} J_m(gr_0) C_4 + \frac{hm}{r_0 p^2} \cdot \frac{K_m(pr_0) J_m(gr_0)}{K_m(pr_0)} C_4. \tag{17.55}$$

Dividamos término a término la ecuación (17.54) por la ecuación (17.55)

$$\frac{\frac{hm}{r_0 g^2} J_m(gr_0) + \frac{hm}{r_0 p^2} J_m(gr_0)}{\frac{\omega\varepsilon_a}{g} J'_m(gr_0) + \frac{\omega\varepsilon_0}{p} \cdot \frac{K'_m(pr_0) J_m(gr_0)}{K_m(pr_0)}} = \\ = \frac{\frac{\omega\mu_a}{g} J'_m(gr_0) + \frac{\omega\mu_0}{p} \cdot \frac{K'_m(pr_0) J_m(gr_0)}{K_m(pr_0)}}{\frac{hm}{r_0 g^2} J_m(gr_0) + \frac{hm}{r_0 p^2} J_m(gr_0)}.$$

Al efectuar las simplificaciones necesarias, obtenemos

$$\frac{\frac{hm}{r_0}\left(\frac{1}{g^2} + \frac{1}{p^2}\right)}{\frac{\omega\varepsilon_a}{g} \cdot \frac{J'_m(gr_0)}{J_m(gr_0)} + \frac{\omega\varepsilon_0}{p} \cdot \frac{K'_m(pr_0)}{K_m(pr_0)}} = \frac{\frac{\omega\mu_a}{g} \cdot \frac{J'_m(gr_0)}{J_m(gr_0)} + \frac{\omega\mu_0}{p} \cdot \frac{K'_m(pr_0)}{K_m(pr_0)}}{\frac{hm}{r_0}\left(\frac{1}{g^2} + \frac{1}{p^2}\right)},$$

o bien

$$(hmr_0)^2\left\{\frac{1}{(gr_0)^2}+\frac{1}{[(pr_0)^2}\right\}^2=(\omega r_0)^2\left\{\frac{\varepsilon_a J'_m(gr_0)}{gr_0 J_m(gr_0)}+\frac{\varepsilon_a K'_m(pr_0)}{pr_0 K_m(pr_0)}\right\}\times$$
$$\times\left\{\frac{\mu_a J'_m(gr_0)}{gr_0 J_m(gr_0)}+\frac{\mu_a K'_m(pr_0)}{pr_0 K_m(pr_0)}\right\}. \qquad (17.56)$$

La ecuación (17.56) relaciona las incógnitas g y p. Es necesario determinar la segunda ecuación que también relaciona estas incógnitas.

El número de onda longitudinal h para las ondas rápidas y lentas se define por las relaciones (12.26) y (16.28). En el § 16.4 se ha señalado que los números de onda longitudinales deben ser idénticos para las ondas rápida y lenta. En consecuencia, es justa la ecuación

$$\omega^2\mu_a\varepsilon_a - g^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 + p^2.$$

Al multiplicarla por r_0^2 y agrupar sus términos, obtenemos la segunda ecuación que relaciona las incógnitas g y p:

$$(pr_0)^2 + (gr_0)^2 = (\omega r_0)^2(\mu_a\varepsilon_a - \mu_0\varepsilon_0). \qquad (17.57)$$

La solución conjunta de las ecuaciones (17.56) y (17.57) puede llevarse a cabo ya sea empleando ordenadores, o bien (lo que es más laborioso y menos exacto) por vía gráfica. En este caso el curso del razonamiento es el siguiente.

Se prefijan los valores de gr_0 y a partir de la ecuación (17.57) se determina pr_0. Seguidamente, de la relación (12 26) o de la (16.28) se halla el número de onda longitudinal h. Luego, por los puntos correspondientes a los diferentes valores de gr_0, así como para los respectivos valores de pr_0 y h se efectúa la construcción de los gráficos del primero y segundo miembros de la ecuación (17.56).

En este caso se forman dos gráficos independientes cuyos puntos de intersección proporcionan los valores de gr_0 y, por consiguiente, también de pr_0 que satisfacen la ecuación (17.56). De esta manera se pueden obtener los valores de los números de onda transversales g y p en la guía de ondas y del número de onda longitudinal h.

Teniendo en cuenta las relaciones (17.47), (17.19) — (17.30), así como las (17.31) — (17.42), las fórmulas para las componentes del campo dentro y fuera de la barra toman la siguiente forma:

$$\dot{E}_{r\Sigma} = -j\left\{\frac{h}{g}J'_m(gr)C_1 + \frac{\omega\mu_a m}{rg^2}J_m(gr)C_4\right\}\cos(m\varphi)\,e^{-jhz}, \qquad (17.58)$$

$$\dot{E}_{\varphi\Sigma} = j\left\{\frac{hm}{rg^2}J_m(gr)C_1 + \frac{\omega\mu_a}{g}J'_m(gr)C_4\right\}\operatorname{sen}(m\varphi)\,e^{-jhz}, \qquad (17.59)$$

$$\dot{E}_{z\Sigma} = J_m(gr)C_1\cos(m\varphi)\,e^{-jhz}, \qquad (17.60)$$

$$\dot{H}_{r\Sigma} = -j\left\{\frac{\omega\varepsilon_a m}{rg^2}J_m(gr)C_1 + \frac{h}{g}J'_m(gr)C_4\right\}\operatorname{sen}(m\varphi)\,e^{-jhz}, \qquad (17.61)$$

$$\dot{H}_{\varphi\Sigma} = -j\left\{\frac{\omega\varepsilon_a}{g}J'_m(gr)C_1 + \frac{hm}{gr^2}J_m(gr)C_4\right\}\cos(m\varphi)\,e^{-jhz}, \qquad (17.62)$$

$$\dot{H}_{z\Sigma} = J_m(gr)C_4\operatorname{sen}(m\varphi)\,e^{-jhz}; \qquad (17.63)$$

y para las componentes del campo fuera de la barra:

$$\dot{E}_{r1\Sigma} = j\left\{\frac{h}{p}K'_m(pr)C_5 + \frac{\omega\mu_0 m}{rp^2}K_m(pr)C_8\right\}\cos(m\varphi)\,e^{-jhz}, \quad (17.64)$$

$$\dot{E}_{\varphi 1\Sigma} = -j\left\{\frac{hm}{rp^2}K_m(pr)C_5 + \frac{\omega\mu_0}{p}K'_m(pr)C_8\right\}\operatorname{sen}(m\varphi)\,e^{-jhz}, \quad (17.65)$$

$$\dot{E}_{z1\Sigma} = C_5 K_m(pr)\cos(m\varphi)\,e^{-jhz}, \quad (17.66)$$

$$\dot{H}_{r1\Phi} = j\left\{\frac{\omega\varepsilon_a m}{rp^2}K_m(pr)C_5 + \frac{h}{p}K'_m(pr)C_8\right\}\operatorname{sen}(m\varphi)\,e^{-jhz}, \quad (17.67)$$

$$\dot{H}_{\varphi 1\Sigma} = j\left\{\frac{\omega\varepsilon_a}{p}K'_m(pr)C_5 + \frac{hm}{rp^2}K_m(pr)C_8\right\}\cos(m\varphi)\,e^{-jhz}, \quad (17.68)$$

$$\dot{H}_{z1\Sigma} = C_8 K_m(pr)\operatorname{sen}(m\varphi)\,e^{-jhz}. \quad (17.69)$$

Recurriendo a las relaciones (17.48), (17.49), (17.52) y (17.53) se puede expresar los coeficientes de amplitud C_4, C_5 y C_8 por medio de un solo coeficiente de amplitud C_1. Sin embargo en las fórmulas (17.58) — (17.69) este procedimiento se ha despreciado con el fin de conservar el carácter patente de su deducción.

En la determinación de los números de onda transversales y longitudinales mediante las condiciones límites se ha utilizado el campo total que es la superposición de ondas de los tipos eléctrico y magnético. Consideremos la posibilidad de existencia por separado de estas ondas, valiéndose con este objeto de la relación (17.55).

La condición de ausencia del campo del tipo eléctrico en la barra es la igualdad a cero del coeficiente de amplitud C_1.

De la fórmula (17.52) se infiere que la condición $C_1 = 0$ asegura la igualdad a cero del coeficiente de amplitud C_8 para el campo del tipo eléctrico fuera de la barra.

De este modo, siendo $C_1 = 0$ desaparece el campo del tipo eléctrico tanto en el interior, como fuera de la barra. En este caso la expresión (17.55) se representa en la forma

$$\frac{hm}{r_0 g^2}J_m(gr_0)C_4 + \frac{hm}{r_0 p^2}J_m(gr_0)C_4 = 0,$$

o bien

$$\frac{hm}{r_0}\left(\frac{1}{g^2} + \frac{1}{p^2}\right)J_m(gr_0)C_4 = 0, \quad (17.70)$$

de donde $C_4 = 0$.

Basándose en la relación (17.53) para $C_4 = 0$ también es igual a cero el coeficiente de amplitud C_8. En este caso desaparece no sólo el campo eléctrico, sino también el magnético.

De este modo, en el caso general, al aprovechar una guía de ondas dieléctrica surge la onda del tipo electromagnético combinado que representa la combinación de ondas de los tipos eléctrico y magnético. De la expresión (17.70) deriva solamente una posibilidad de existencia

del coeficiente de amplitud C_4 y, en consecuencia, del coeficiente C_3. Esta posibilidad corresponde a la condición

$$m = 0. \qquad (17.71)$$

Si se engendra una onda del tipo simétrico cuyo campo no varía a lo largo de la coordenada φ, resulta que al ser iguales a cero los coeficientes C_1 y C_2, es decir, en ausencia de una onda del tipo eléctrico, es posible que existan los coeficientes C_4 y C_3 y, por consiguiente, la onda del tipo magnético. Si se observa la condición (17.71) es posible también el proceso inverso en que existe la onda del tipo eléctrico y falta la onda del tipo magnético. Se puede cerciorarse de ello en el ejemplo de un análisis análogo, eligiendo como relación de partida no la expresión (17.55), sino la (17.54).

El análisis se ha llevado a cabo suponiendo que las componentes del campo $\dot{E}_\varphi$ varían según la ley sen $(m\varphi)$. También podría admitirse la variación de esta componente de conformidad con la ley cos $(m\varphi)$. En este caso la ecuación característica para determinar los números de onda sigue siendo invariable, cambiándose tan sólo las expresiones para las componentes del campo.

Las componentes del campo en el caso de ondas simétricas se determinan por medio de relaciones generales (17.19) — (17.42), tomando en éstas $m = 0$. Como resultado, cuando tenemos ondas del tipo eléctrico aparecen las componentes del campo $\dot{E}_{r\,e1}$, $\dot{H}_{\varphi\,e1}$ y $\dot{E}_{z\,e1}$ en el interior y fuera de la barra. Para las ondas del tipo magnético se conservan las componentes del campo $\dot{H}_{rm}$, $\dot{E}_{\varphi m}$ y $\dot{H}_{zm}$ dentro y fuera de la barra.

Uno de los defectos principales del sistema de guiaondas formado por una barra dieléctrica redonda cuando el campo depende del ángulo φ, o sea, cuando se observa la condición $m \neq 0$, es la inestabilidad de polarización del campo. A raíz de que el sistema de guiaondas es simétrico respecto al eje z, el cuadro inicial del campo en el plano transversal originado por un sistema determinado de corrientes que excitan el campo puede girar a lo largo de la coordenada φ a medida del avance de la onda electromagnética a lo largo del eje de la guía de ondas. En este caso la disposición de las líneas de fuerza de los campos eléctrico y magnético o la polarización del campo con respecto al origen de cálculo del ángulo φ varía a lo largo del eje de la guía de ondas. Esta inestabilidad de polarización puede producirse como consecuencia de pequeños cambios de los parámetros del dieléctrico o de las dimensiones máximas de la guía de ondas a lo largo del eje z, así como debido a la curvatura de la guía de ondas. En virtud de que el dispositivo destinado a la recepción del campo electromagnético transmitido por medio de una guía de ondas dieléctrica está calculado para una determinada polarización del campo, el funcionamiento normal del sistema de guiaondas en el caso de inestabilidad de polarización puede alterarse.

Para obtener características de polarización estables sirve el sistema (fig. 17.2) en el que la barra dieléctrica de sección transversal semicircular está situada sobre una placa metálica. El campo eléctrico, en correspondencia con las condiciones límites junto a la superficie de un metal ideal siempre debe ser normal a la superficie del metal, lo que asegura una polarización estable del campo a lo largo del eje de la guía de ondas. Cabe señalar que el número de sistemas de guiaondas que trabajan a base de ondas superficiales y que utilizan

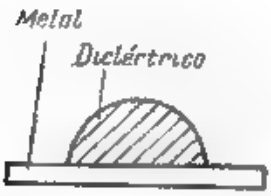

FIG. 17.2

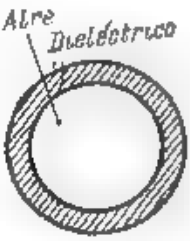

FIG. 17.3

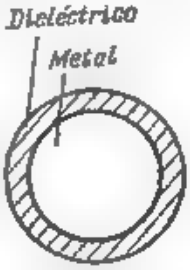

FIG. 17.4

un dieléctrico o un dieléctrico en combinación con un metal puede ser bastante grande. En la fig. 17.3 se muestra una guía de ondas dieléctrica tubular y en la fig. 17.4, una guía de ondas en cuyo interior se encuentra una barra metálica. La guía de ondas de este tipo se denomina línea de Goubau, por el nombre del investigador que la propuso. Como guía de ondas de este tipo puede utilizarse un alambre de cobre esmaltado. También puede haber guías de ondas dieléctricas de distintas secciones, por ejemplo, de sección elíptica o cruciforme. Tales sistemas de guiaondas representan un amplio campo para las investigaciones.

CAPITULO 18

Guía de ondas circular en hélice

§ 18.1. Planteamiento del problema

En una serie de casos se utiliza como sistema retardador una espiral metálica circular excitada mediante una línea coaxial que se desarrolla en un cono circular (fig. 18.1). El ángulo α de inclinación de las vueltas de la espiral respecto al plano de la sección transversal está relacionado con los parámetros de la espiral mediante la razón

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a/2}{2r_0} = \frac{\pi a}{4r_0}. \qquad (18.1)$$

Un análisis exacto del sistema retardador en hélice es bastante difícil, por eso su examen se efectuará con una simplificación sustancial.

Supongamos que la espiral representa un cilindro macizo confeccionado de un material con conductibilidad anisótropa en dirección de las vueltas de la espiral. Esta suposición es tanto más precisa cuanto más fino es el alambre y menor el paso del arrollamiento.

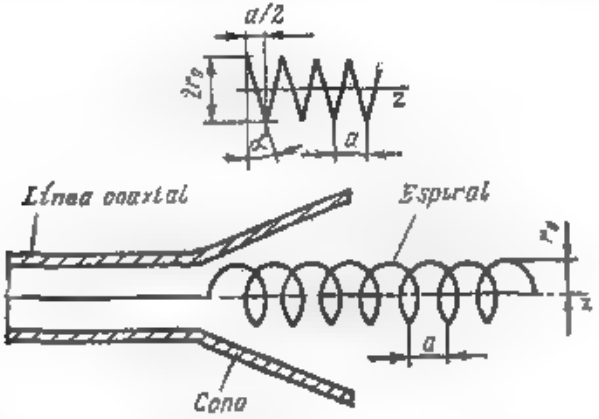

FIG. 18.1

Después hagamos una simple suposición acerca del carácter finito del campo en el eje de la espiral para $r = 0$ y el decrecimiento del campo hasta cero a una distancia infinitamente grande del eje de la espiral, es decir, cuando $r \to \infty$. Debido a lo complicado del análisis sólo se estudiarán las ondas simétricas independientes de la coordenada φ. Además, se supone que alrededor de la espiral se forma un campo de onda lenta que tanto en el interior, como fuera de la espiral se aprietan a sus vueltas. A diferencia de la barra dieléctrica la onda lenta se propaga no sólo fuera del sistema, sino también en su interior. Esta circunstancia debe tenerse en cuenta al escribir y resolver la ecuación fundamental para las componentes longitudinales del campo.

§ 18.2. Deducción de la ecuación fundamental para las componentes longitudinales del campo y solución de esta ecuación. Componentes del campo en una guía de ondas en hélice

Para las componentes longitudinales del campo de una onda lenta $\dot{E}_{z10}$ y $\dot{H}_{z10}$ son fundamentales las ecuaciones (17.6) y (17.7). Más adelante se analizarán sólo las ondas simétricas cuyo campo no depende de la coordenada φ y, por consiguiente,

$$\frac{\partial \dot{E}_{z10}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \dot{H}_{z10}}{\partial \varphi} = 0. \qquad (18.2)$$

En este caso las ecuaciones para las componentes longitudinales del campo se escriben en la forma

$$\frac{d^2\dot{E}_{z10}}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{d\dot{E}_{z10}}{dr} - p^2\dot{E}_{z10} = 0, \tag{18.3}$$

$$\frac{d^2\dot{H}_{z10}}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{d\dot{H}_{z10}}{dr} - p^2\dot{H}_{z10} = 0. \tag{18.4}$$

Estas ecuaciones por su expresión matemática coinciden con la ecuación (17.9) deducida en el § 17 3 a condición de que $m = 0$.

La solución de la ecuación (17.9) se escribe en la forma (17.11)

$$R_1 = B_3 I_m(pr) + B_4 K_m(pr),$$

donde $I_m(pr)$ es la función modificada de Bessel de orden m y $K_m(pr)$, la función de Macdonald del orden m.

Los gráficos de estas funciones están representados en la fig. 17.1.

Las soluciones de las ecuaciones (18.3) y (18 4) son la función modificada de Bessel $I_0(pr)$ y la función de Macdonald $K_0(pr)$ del orden cero. Para el espacio dentro de la espiral debe utilizarse solamente la función modificada de Bessel en virtud de su carácter finito cuando $r = 0$. Para el espacio fuera de la espiral es necesario aplicar tan sólo la función de Macdonald debido a su carácter limitado cuando $r \to \infty$. Basándose en lo expuesto, las soluciones de las ecuaciones (18.3) y (18.4) pueden escribirse en la forma:
el espacio dentro de la espiral ($r \leqslant r_0$)

$$\begin{aligned} \dot{E}_{z10} &= A_1 I_0(pr), \\ \dot{H}_{z10} &= B_1 I_0(pr); \end{aligned} \tag{18.5}$$

el espacio fuera de la espiral ($r \geqslant r_0$)

$$\begin{aligned} \dot{E}_{z20} &= A_2 K_0(pr), \\ \dot{H}_{z20} &= B_2 K_0(pr). \end{aligned} \tag{18.6}$$

Para hallar las componentes del campo dentro y fuera de la espiral se pueden utilizar las relaciones generales (14.27) — (14.32) y (14.41) — (14.46) escritas para las ondas rápidas. El paso a las ondas lentas se realiza sustituyendo el número de onda transversal g por jp y g^2 por $-p^2$. Además, debe tomarse en consideración la independencia de las componentes longitudinales del campo respecto a la coordenada φ, o sea, la relación (18.2). La onda lenta se propaga en el aire, en virtud de lo cual $\mu_a = \mu_0$, $\varepsilon_a = \varepsilon_0$.

Teniendo en cuenta lo expuesto se puede escribir las siguientes expresiones:

$$\dot{E}_r = j\frac{h}{p^2}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial r}\,e^{-jhz}, \tag{18.7}$$

$$\dot{H}_\varphi = j\frac{\omega\varepsilon_0}{p^2}\cdot\frac{\dot{E}_{z0}}{\partial r}\,e^{-jhz}, \tag{18.8}$$

$$\dot{E}_z = \dot{E}_{z0}e^{-jhz}, \tag{18.9}$$

$$\dot{H}_r = j\frac{h}{p^2}\cdot\frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial r}\,e^{-jhz}, \tag{18.10}$$

$$\dot{E}_\varphi = -j\frac{\omega\mu_0}{p^2}\cdot\frac{\partial \dot{H}_{z0}}{\partial r}\,e^{-jhz}, \tag{18.11}$$

$$\dot{H}_z = \dot{H}_{z0}e^{-jhz}. \tag{18.12}$$

Procediendo de la misma manera que en el análisis de los procesos en una barra dieléctrica suponemos que el campo de la onda lenta en la espiral es una superposición de ondas de los tipos eléctrico y magnético. Al sustituir las expresiones (18.5) y (18.6) en las fórmulas (18.7) — (18.12) obtenemos las siguientes relaciones para las componentes del campo en el interior y fuera de la espiral:

el espacio dentro de la espiral ($r \leqslant r_0$)

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_{r1} &= j\frac{h}{p}A_1 I_0'(pr)\,e^{-jhz},\\
\dot{H}_{\varphi 1} &= j\frac{\omega\varepsilon_0}{p}A_1 I_0'(pr)\,e^{-jhz},\\
\dot{E}_{z1} &= A_1 I_0(pr)\,e^{-jhz},\\
\dot{H}_{r1} &= j\frac{h}{p}B_1 I_0'(pr)\,e^{-jhz},\\
\dot{E}_{\varphi 1} &= -j\frac{\omega\mu_0}{p}B_1 I_0'(pr)\,e^{-jhz},\\
\dot{H}_{z1} &= B_1 I_0(pr)\,e^{-jhz},
\end{aligned}\right\} \tag{18.13}$$

el espacio fuera de la espiral ($r \geqslant r_0$)

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_{r2} &= j\frac{h}{p}A_2 K_0'(pr)\,e^{-jhz},\\
\dot{H}_{\varphi 2} &= j\frac{\omega\varepsilon_0}{p}A_2 K_0'(pr)\,e^{-jhz},\\
\dot{E}_{z2} &= A_2 K_0(pr)\,e^{-jhz},\\
\dot{H}_{r2} &= j\frac{h}{p}B_2 K_0'(pr)\,e^{-jhz},\\
\dot{E}_{\varphi 2} &= -j\frac{\omega\mu_0}{p}B_2 K_0'(pr)\,e^{-jhz},\\
\dot{H}_{z2} &= B_2 K_0(pr)\,e^{-jhz}.
\end{aligned}\right\} \tag{18.14}$$

§ 18.3. Determinación de los números de onda transversal y longitudinal

En la búsqueda de los números de onda transversal p y longitudinal h utilizamos las siguientes condiciones límites:

1) la igualdad a cero de las componentes del campo eléctrico tangenciales a las vueltas de la espiral en dirección de la conductibilidad anisótropa (es decir, a lo largo de las vueltas de la espiral); esta igualdad debe cumplirse para las componentes del campo externo e interno respecto a la espiral;

2) la igualdad, siendo $r = r_0$, de las componentes exteriores e interiores del campo eléctrico tangenciales a la generatriz del cilindro anisótropo (o sea, orientadas a lo largo de la coordenada z); la conductibilidad del cilindro anisótropo en esta dirección es igual a cero;

3) como se conoce, una de las condiciones límites para las componentes tangenciales junto a la superficie del metal ideal es la igualdad de la componente tangencial del campo magnético a la densidad de la corriente superficial [véase la condición (8.13)]; puesto que la densidad de la corriente superficial de las superficies interior y exterior de la espiral es idéntica, esta condición límite se transforma en igualdad de las componentes tangenciales del campo magnético en dirección de la conductibilidad anisótropa, es decir, a lo largo de las vueltas de la espiral.

Expresemos en forma matemática las condiciones límites enumeradas (para $r = r_0$):

$$\left.\begin{aligned} &\dot{E}_{\varphi 1}\cos\alpha + \dot{E}_{z1}\operatorname{sen}\alpha = 0,\\ &\dot{E}_{\varphi 2}\cos\alpha + \dot{E}_{z2}\operatorname{sen}\alpha = 0,\\ &\dot{E}_{z1} = \dot{E}_{z2},\\ &\dot{H}_{\varphi 1}\cos\alpha + \dot{H}_{z1}\operatorname{sen}\alpha = \dot{H}_{\varphi 2}\cos\alpha + \dot{H}_{z2}\operatorname{sen}\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (18.15)$$

Al poner los valores de las componentes del campo a partir de las expresiones (18.7) — (18.12) en las condiciones límites (18.15), obtenemos

$$-j\frac{\omega\mu_0}{p}B_1I_0'(pr_0) + A_1I_0(pr_0)\operatorname{tg}\alpha = 0, \qquad (18.16)$$

$$-j\frac{\omega\mu_0}{p}B_2K_0'(pr_0) + A_2K_0(pr_0)\operatorname{tg}\alpha = 0, \qquad (18.17)$$

$$A_1I_0(pr_0) = A_2K_0(pr_0), \qquad (18.18)$$

$$j\frac{\omega\varepsilon_0}{p}A_1I_0'(pr_0) + B_1I_0(pr_0)\operatorname{tg}\alpha = -j\frac{\omega\varepsilon_0}{p}A_2K_0'(pr_0) + B_2K_0(pr_0)\operatorname{tg}\alpha. \qquad (18.19)$$

Al sustituir la expresión (18.18) en (18.16), hallamos

$$-j\frac{\omega\mu_0}{p}B_1I_0'(pr_0)+A_2K_0(pr_0)\operatorname{tg}\alpha=0,$$

o bien, teniendo en cuenta la relación (18.17),

$$-j\frac{\omega\mu_0}{p}B_1I_0'(pr_0)+j\frac{\omega\mu_0}{p}B_2K_0'(pr_0)=0,$$

$$-B_1I_0'(pr_0)+B_2K_0'(pr_0)=0. \qquad (18.20)$$

Determinemos de las expresiones (18.16) y (18.17) los coeficientes de amplitud A_1 y A_2:

$$A_1=\frac{j\omega\mu_0B_2I_0'(pr_0)}{pI_0(pr_0)\operatorname{tg}\alpha}, \qquad (18.21)$$

$$A_2=\frac{j\omega\mu_0B_2K_0'(pr_0)}{pK_0(pr_0)\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (18.22)$$

Al poner los valores de estos coeficientes en la expresión (18.19), se puede escribir

$$\frac{j\omega\varepsilon_0j\omega\mu_0B_1\{I_0'(pr_0)\}^2}{p^2I_0(pr_0)\operatorname{tg}\alpha}+B_1I_0(pr_0)\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=\frac{j\omega\varepsilon_0j\omega\mu_0B_2\{K_0'(pr_0)\}^2}{p^2K_0(pr_0)\operatorname{tg}\alpha}+B_2K_0(pr_0)\operatorname{tg}\alpha. \qquad (18.23)$$

De la ecuación (18.20) hallemos el coeficiente B_1:

$$B_1=\frac{K_0'(pr_0)}{I_0'(pr_0)}B_2. \qquad (18.24)$$

Al sustituir el valor del coeficiente B_1 en la expresión (18.23) y eliminar los coeficientes B_2, obtenemos

$$-\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0K_0'(pr_0)I_0'(pr_0)}{p^2I_0(pr_0)\operatorname{tg}\alpha}+\frac{K_0'(pr_0)I_0(pr_0)\operatorname{tg}\alpha}{I_0'(pr_0)}=$$

$$=-\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0\{K_0'(pr_0)\}^2}{p^2K_0(pr_0)\operatorname{tg}\alpha}+K_0(pr_0)\operatorname{tg}\alpha,$$

o bien

$$-\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0I_0'(pr_0)}{p^2I_0(pr_0)\operatorname{tg}\alpha}+\frac{I_0(pr_0)\operatorname{tg}\alpha}{I_0'(pr_0)}-\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0K_0'(pr_0)}{p^2K_0(pr_0)\operatorname{tg}\alpha}+\frac{K_0(pr_0)}{K_0'(pr_0)}\operatorname{tg}\alpha,$$

de donde

$$\omega^2\mu_0\varepsilon_0\left\{\frac{K_0'(pr_0)}{K_0(pr_0)}-\frac{I_0'(pr_0)}{I_0(pr_0)}\right\}=p^2\operatorname{tg}^2\alpha\left\{\frac{K_0(pr_0)}{K_0'(pr_0)}-\frac{I_0(pr_0)}{I_0'(pr_0)}\right\}.$$

Esta expresión puede escribirse en otra forma:

$$\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=p\operatorname{tg}\alpha\sqrt{\frac{\dfrac{K_0(pr_0)}{K_0'(pr_0)}-\dfrac{I_0(pr_0)}{I_0'(pr_0)}}{\dfrac{K_0'(pr_0)}{K_0(pr_0)}-\dfrac{I_0'(pr_0)}{I_0(pr_0)}}}=$$

$$=p\operatorname{tg}\alpha\sqrt{\frac{K_0(pr_0)I_0'(pr_0)-K_0'(pr_0)I_0(pr_0)}{K_0'(pr_0)I_0'(pr_0)\{K_0'(pr_0)I_0(pr_0)-K_0(pr_0)I_0'(pr_0)\}}},$$

o bien

$$\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = p \operatorname{tg} \alpha \sqrt{-\frac{K_0(pr_0) I_0(pr_0)}{K_0'(pr_0) I_0'(pr_0)}}.$$

De aquí

$$p = \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{\operatorname{tg} \alpha} \sqrt{-\frac{K_0'(pr_0) I_0'(pr_0)}{K_0(pr_0) I_0(pr_0)}}. \qquad (18.25)$$

La expresión (18.25) es una ecuación trascendente para el número de onda transversal p. El número de onda longitudinal h se determina por medio de la relación (16.28).

Para grandes valores de p, para los cuales es justa la desigualdad $pr_0 \gg 1$, a la función modificada de Bessel y a la función de Macdonald pueden aplicarse relaciones asintóticas. En este caso se puede demostrar que la raíz de la expresión (18.25) es próxima a la unidad, o sea, para p se obtiene la expresión aproximada

$$p \approx \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{\operatorname{tg} \alpha}. \qquad (18.26)$$

La velocidad de fase se determina por la relación (12.19). Al aumentar el número de onda transversal p incrementa el número de onda longitudinal h y disminuye la velocidad de fase v_f.

El crecimiento de p se opera con la disminución de tg α que, de acuerdo con la expresión (18.1), es proporcional al paso del arrollamiento a. De este modo, la velocidad de fase disminuye al reducirse el paso del arrollamiento de la espiral.

En el análisis de la guía de ondas en hélice se ha sugerido la existencia simultánea de campos de los tipos eléctrico y magnético. Consideremos la posibilidad de su existencia por separado.

Como se infiere de las fórmulas (18.5) y (18.6), un campo del tipo eléctrico se define por los coeficientes de amplitud A_1 y A_2, mientras que para determinar un campo del tipo magnético se emplean los coeficientes B_1 y B_2. De las condiciones límites (18.18) se deduce que la igualdad a cero del coeficiente A_1 conduce a que sea igual a cero el coeficiente A_2, y a partir de las condiciones límites (18.16) y (18.17) queda claro que, siendo iguales a cero los coeficientes A_1 y A_2, son idénticamente iguales a cero los coeficientes B_1 y B_2. En consecuencia, la desaparición del campo del tipo eléctrico lleva aparejada, inevitablemente, la desaparición del campo del tipo magnético, y viceversa.

De este modo, la suposición expuesta anteriormente acerca de la necesidad de la existencia simultánea de campos de los tipos eléctrico y magnético en una guía de ondas en hélice resulta correcta. Es imposible la existencia por separado de estos campos en una guía de ondas en hélice.

CAPÍTULO 19

Guía de ondas metálica con reentrante

§ 19.1. Planteamiento del problema

Actualmente existe gran cantidad de sistemas de guíaondas cuyo funcionamiento se basa en ondas superficiales lentas, que representan tal o cual estructura metálica periódica a lo largo del eje de propagación. Pertenecen a este tipo: la estructura metálica con reentrante (fig. 19.1), la guía de ondas metálica nervada circular (fig. 19.2), las guías de ondas estructurales de cintas (fig. 19.3, *a* y *b*) y la guía

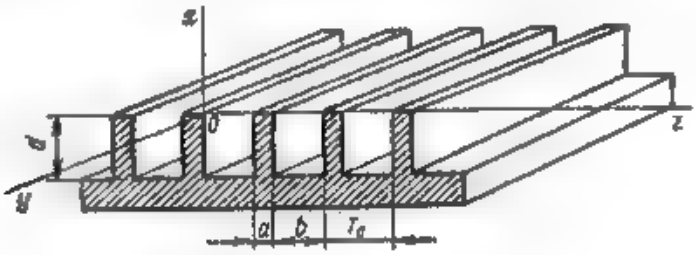

FIG. 19.1

FIG. 19.2

de ondas estructural de barras (fig. 19.4). También pueden proponerse otras muchas variantes de semejantes estructuras que ofrecen un vasto campo para la investigación.

En el presente capítulo se someterá al análisis una guía de ondas metálica con reentrante (en peine). Para simplificar se supone que la extensión de la guía de ondas a lo largo del eje *y* es infinita. Si las corrientes eléctricas que circulan por la superficie del metal de esta guía de ondas están orientadas a lo largo del eje *z*, entonces, a costa de los surcos en la estructura, sus trayectorias se hacen más largas en comparación con la distancia a lo largo del eje *z*. En ciertas condiciones esta circunstancia, como se verá del análisis, conduce a la aminoración de la velocidad de fase del campo electromagnético que se propaga a lo largo del eje *z*. Semejantes corrientes eléctricas pueden engendrarse tan sólo por el campo magnético que se encuentra en el

plano perpendicular al sentido de orientación de las corrientes, es decir, en el plano xy. En otras palabras, pueden crearse solamente por una onda del tipo eléctrico cuyo campo magnético está situado en el plano xy. Una onda del tipo magnético engendra corrientes orienta-

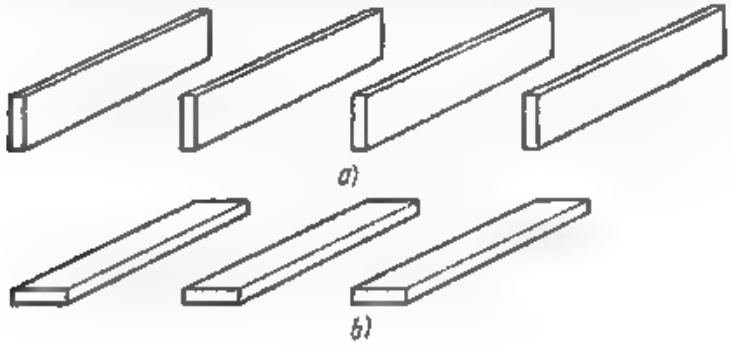

FIG. 19.3

FIG 19.4

das a lo largo del eje y cuya trayectoria no se alarga a costa de la estructura de la guía de ondas. De esta forma, en el presente capítulo se examinará la propagación de una onda del tipo eléctrico en una guía de ondas con reentrante.

§ 19.2. Deducción de la ecuación fundamental para la componente longitudinal del campo eléctrico en una guía de ondas con reentrante y solución de esta ecuación

La ecuación fundamental para la componente longitudinal del campo eléctrico que se propaga sobre una guía de ondas con reentrante si se tienen ondas del tipo eléctrico es la ecuación (11.35):

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_\zeta}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\xi}\cdot\frac{\partial \dot{E}_\zeta}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\cdot\frac{\partial \dot{E}_\zeta}{\partial \eta}\right)\right\} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{E}_\zeta = 0.$$

Esta ecuación está escrita en el sistema de coordenadas ortogonales curvilíneas ξ, η, ζ. Representémosla en el sistema de coordenadas cartesianas, eligiendo la siguiente correspondencia entre las coordenadas $\xi \to x$, $\eta \to y$, $\zeta \to z$, $h_\xi = h_\eta = 1$:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{E}_z = 0.$$

Debido a la extensión ilimitada de la estructura a lo largo de la coordenada y y a la ausencia de pérdidas en el medio tomemos $\partial/\partial y = 0$, $\tilde{\mu}_a = \mu_a$, $\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a$, donde μ_a, ε_a son los parámetros del dieléctrico que rodea la guía de ondas con reentrante.

En estas condiciones la ecuación fundamental se escribirá en la forma

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + \omega^2 \mu_a \varepsilon_a \dot{E}_z = 0. \qquad (19.1)$$

Debido a la periodicidad de la estructura hagamos la suposición de que la solución de esta ecuacion puede representarse en forma de onda progresiva en la que influye el proceso periódico con un período T_{es} igual al período de la estructura. En otras palabras, representemos la solución como la superposición de un número infinito de armónicos:

$$\dot{E}_z = e^{-jh_0 z} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, e^{-j\frac{2\pi n}{T_{es}} z}. \qquad (19.2)$$

Las funciones $f_n(x)$ reflejan la dependencia de las amplitudes de los armónicos respecto a la coordenada x.

Al sustituir la expresión (19.2) en la ecuación (19.1), obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \left\{ \omega^2 \mu_a \varepsilon_a - \left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_{es}} \right)^2 \right\} f_n(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{d^2 f_n(x)}{dx^2} \right\rangle e^{-j\left(\frac{2\pi n}{T_{es}} + h_0\right) z} = 0. \qquad (19.3)$$

Para que se cumpla esta igualdad es necesario que sea igual a cero cada término de la serie:

$$\frac{d^2 f_n(x)}{dx^2} + \left\{ \omega^2 \mu_a \varepsilon_a - \left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_{es}} \right)^2 \right\} f_n(x) = 0. \qquad (19.4)$$

Cuando

$$\omega^2 \mu_a \varepsilon_a > \left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_{es}} \right)^2 \qquad (19.5)$$

la solución de la ecuación (19.4) tiene la forma

$$f_n = A_n e^{-ig_n x}, \qquad (19.6)$$

donde

$$g_n = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - \left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_{es}} \right)^2}.$$

Esta solución representa una onda que se propaga a lo largo del eje x. A nosotros nos interesa una onda superficial lenta que se propaga a lo largo del eje z. La amplitud de esta onda debe decrecer con el aumento de la coordenada x, lo que es posible al observarse la

desigualdad

$$\left(h_0+\frac{2\pi n}{T_{es}}\right)^2>\omega^2\mu_a\varepsilon_a. \tag{19.7}$$

En este caso la ecuación (19.4) se escribe en la forma

$$\frac{d^2f_n(x)}{dx^2}-\left\{\left(h_0+\frac{2\pi n}{T_{es}}\right)^2-\omega^2\mu_a\varepsilon_a\right\}f_n(x)=0 \tag{19.8}$$

con la solución

$$f_n(x)=A_ne^{-p_nx}, \tag{19.9}$$

donde

$$p_n=\sqrt{\left(h_0+\frac{2\pi n}{T_{es}}\right)^2-\omega^2\mu_a\varepsilon_a}. \tag{19.10}$$

Teniendo en cuenta las expresiones (19.2) y (19.10) se puede escribir

$$\dot{E}_z=e^{-jh_0z}\sum_{n=0}^{\infty}A_ne^{-p_nx}e^{-j\frac{2\pi n}{T_{es}}z},$$

o bien

$$\dot{E}_z=\sum_{n=0}^{\infty}A_ne^{-p_nx}e^{-j\left(h_0+\frac{2\pi n}{T_{es}}\right)z} \tag{19.11}$$

De este modo, el campo sobre la guía de ondas con reontrante representa la superposición de ondas que se atenúan a lo largo de la coordenada x con el factor de atenuación p_n y cuyas constantes de fase son h_n, donde

$$h_n=h_0+\frac{2\pi n}{T_{es}}. \tag{19.12}$$

En este caso el factor de atenuación p_n desempeña el papel del número de onda transversal, y la constante de fase, el del número de onda longitudinal.

Como se conoce, la velocidad de fase es igual a la relación de la frecuencia angular ω a la constante de fase: $v_f=\omega/h$.

En el caso examinado

$$v_f=\omega/h_n. \tag{19.13}$$

Cuando

$$h_n=\omega\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}=\beta, \tag{19.14}$$

la velocidad de fase $v_f=1/\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}$ es igual a la velocidad de la luz en un medio con los parámetros μ_a, ε_a. Para

$$h_n<\omega\sqrt{\mu_a\varepsilon_a} \tag{19.15}$$

$v_f>c$, lo que corresponde a una onda rápida. Para

$$h_n>\omega\sqrt{\mu_a\varepsilon_a} \tag{19.16}$$

$v_f<c$, lo que corresponde a una onda lenta.

De la relación (19.10) se infiere que p_n aumenta con el incremento del número del armónico n y la disminución del período de la estructura T_{es}. El valor mínimo lo tiene p_n cuando $n = 0$

$$p_0 = \sqrt{h_0^2 - \omega^2 \mu_a \varepsilon_a}. \tag{19.17}$$

Cuando el período de la estructura T_{es} es lo suficientemente pequeño se puede considerar que el campo sobre la guía de ondas con reentrante se determina preferentemente por el primer armónico (armónico fundamental) correspondiente a $n = 0$, y la influencia de los armónicos superiores en la estructura de la onda lenta no es grande. En este caso la guía de ondas puede considerarse como cierta superficie retardadora enteriza del tipo de placa dieléctrica. Esta aproximación, evidentemente, es tanto más precisa cuanto menor es el período de la estructura con reentrante (en peine).

El análisis ulterior se efectuará prescindiendo de los armónicos superiores, lo que simplifica esencialmente la tarea.

Evaluemos la magnitud del período de la estructura para el cual es posible despreciar los armónicos superiores.

Si se quiere lograr que el amortiguamiento de los armónicos superiores transcurra con mucha mayor rapidez en comparación con el primer armónico, es necesario observar la desigualdad

$$p_n \gg p_0. \tag{19.18}$$

Al sustituir en ésta las fórmulas (19.10) y (19.17), obtenemos

$$\sqrt{\left(h_0 + \frac{2\pi n}{T_{es}}\right)^2 - \omega^2 \mu_a \varepsilon_a} \gg \sqrt{h_0^2 - \omega^2 \mu_a \varepsilon_a}. \tag{19.19}$$

Esta desigualdad es válida para

$$\frac{2\pi n}{T_{es}} \gg h_0. \tag{19.20}$$

La desigualdad (19.20) se intensifica con el aumento del número del armónico n, pero para el primer armónico debe observarse la siguiente condición: $2\pi/T_{es} \gg h_0$, de donde

$$T_{es} \ll \frac{2\pi}{h_0}. \tag{19.21}$$

La onda lenta deja de existir al acercarse la velocidad de fase a la velocidad de la luz o al observarse la igualdad (19.14), que para el primer armónico tiene la forma

$$h_0 = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{19.22}$$

Supongamos que la onda lenta debe poseer una velocidad de fase k veces menor que la velocidad de la luz. Para lograrlo es necesario que

$$h_0 = k \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{19.23}$$

Al sustituir la relación (19.23) en la desigualdad (19.21), obtenemos

$$T_{es} \ll \lambda/k. \tag{19.24}$$

Admitamos convencionalmente que

$$T_{es} \approx 0{,}1\,\frac{\lambda}{k}. \tag{19.25}$$

Entonces, incluso para deceleraciones pequeñas correspondientes a $k \approx 1$, el período de la estructura debe constituir una magnitud del orden de 0,1 de la longitud de onda. Cabe recordar que λ corresponde a la longitud de onda en el espacio libre con los parámetros μ_a, ε_a.

§ 19.3. Determinación de los números de onda transversal y longitudinal

Los números de onda se determinan aplicando las condiciones límites e igualando las componentes tangenciales de los campos $\dot{E}$ y $\dot{H}$ junto a la superficie de la guía de ondas con reentrante, es decir, cuando $x = 0$.

Basándose en la expresión (19.11) la componente longitudinal del campo eléctrico del armónico fundamental (primer armónico) es

$$\dot{E}_{z(0)} = A_0 e^{-p_0 x} e^{-jh_0 z}, \tag{19.26}$$

o bien, en la forma más empleada

$$\dot{E}_{z(0)} = \dot{E}_{z_0} e^{-jh_0 z}, \tag{19.27}$$

donde

$$\dot{E}_{z0} = A_0 e^{-p_0 x}, \tag{19.28}$$

El paso desde la componente longitudinal del campo eléctrico hacia las componentes transversales, cuando se trata de una onda lenta, se efectúa mediante las fórmulas generales de paso (12.78) — (12.82).

En el caso considerado

$$\gamma_z = h_0, \quad p = p_0, \quad \xi \to x, \quad \eta \to y, \quad \zeta \to z,$$
$$h_\xi = h_\eta = 1, \quad \bar{\varepsilon}_a = \varepsilon_a, \quad \partial/\partial y = 0$$

y las fórmulas de paso se escriben en la forma

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_x &= j\,\frac{h_0}{p_0^2}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial x}\,e^{-jh_0 z}, \\ \dot{H}_y &= j\,\frac{\omega \varepsilon_a}{p_0^2}\cdot\frac{\partial \dot{E}_{z0}}{\partial x}\,e^{-jh_0 z}, \\ \dot{E}_y &= \dot{H}_x = \dot{H}_z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{19.29}$$

Haciendo uso de la relación (19.28) hallamos las componentes del campo del armónico fundamental de la onda lenta sobre la superficie de la guía de ondas con reentrante:

$$\dot{E}_{x(0)} = -j\frac{h_0}{p_0}A_0 e^{-p_0 x}e^{-jh_0 x}, \tag{19.30}$$

$$\dot{H}_{y(0)} = -j\frac{\omega\varepsilon_a}{p_0}A_0 e^{-p_0 x}e^{-jh_0 x}, \tag{19.31}$$

$$\dot{E}_{y(0)} = \dot{H}_{x(0)} = \dot{H}_{z(0)} = 0. \tag{19.32}$$

Seguidamente es necesario determinar el campo en los surcos del «peine». Los surcos pueden considerarse como guías de ondas de dos planos paralelos formadas por las placas del «peine» y cortocircuitadas en el extremo. El campo exterior respecto a los surcos tiene las componentes $\dot{E}_x$, $\dot{H}_y$ y $\dot{E}_z$. El campo en los surcos debe contener las mismas componentes. En el § 10.4 se ha demostrado que la existencia de ondas del tipo eléctrico en una guía de ondas de dos planos paralelos con las componentes $\dot{E}_z$, $\dot{E}_x$, $\dot{H}_y$ (cuyo eje de propagación, en el caso analizado, es el eje x) es posible a condición de que la distancia entre los planos constituya no menos de $0{,}5\lambda$, donde λ es la longitud de onda. En la fig. 19.1 sirve de esta distancia la dimensión b. Según se ha señalado en el § 19.2, el análisis realizado es justo para valores pequeños del período de la estructura, cuando $b \ll 0{,}5\lambda$.

Tal sistema es semejante a una línea larga de dos planos en la cual puede existir sólo la onda del tipo T que se propaga a lo largo del eje x y que posee $\dot{E}_z$ y $\dot{H}_y$.

La línea larga de dos planos está cerrada en su extremo, por consiguiente, en ella debe engendrarse una onda estacionaria. En correspondencia con las condiciones límites el vector $\dot{\mathbf{E}}_{zs}$ del campo en el surco, tangencial a su fondo, debe ser igual a cero si $x = -d$ (véase la fig. 19.1). Teniendo en cuenta esta circunstancia la componente longitudinal del campo eléctrico en el surco es

$$\dot{E}_{zs} = B_0 \operatorname{sen}\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(x+d)\right\} = B_0 \operatorname{sen}\{\omega\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\,(x+d)\}. \tag{19.33}$$

El campo magnético en el surco $\dot{H}_{ys}$ puede determinarse por medio de la segunda ecuación de Maxwell (7.12). En el caso examinado $\tilde{\mu}_a = \mu_a$ y

$$\dot{\mathbf{H}}_{ys} = \frac{1_y}{j\omega\mu_a}\cdot\frac{\partial\dot{E}_{zs}}{\partial x},$$

o bien

$$\dot{\mathbf{H}}_{ys} = \frac{1_y}{j\omega\mu_a}\,\omega\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\cos\{\omega\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\,(x+d)\}.$$

Definitivamente, podemos escribir

$$\dot{H}_{ys} = \frac{1}{j\sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}}\cos\{\omega\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\,(x+d)\}. \tag{19.34}$$

A continuación, valiéndonos de las condiciones límites:

$$\dot{E}_{x(0)} = \dot{E}_{xs},\ \dot{H}_{y(0)} = \dot{H}_{ys} \text{ (para } x = 0),$$

así como de las fórmulas (19.26), (19.33) y (19.31), (19.34), obtenemos

$$A_0 e^{-jh_0 z} = B_0 \operatorname{sen}(\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} d),$$

$$-j \frac{\omega \varepsilon_a}{p_0} A_0 e^{-jh_0 z} = \frac{1}{j \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}} \cos(\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} d).$$

Al dividir la primera ecuación por la segunda, hallamos

$$\frac{p_0}{\omega \varepsilon_a} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \operatorname{tg}(\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} d),$$

de donde

$$p_0 = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \operatorname{tg}(\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} d) = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right). \qquad (19.35)$$

A base de la fórmula (19.17) se puede escribir que

$$h_0 = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a + p_0^2}. \qquad (19.36)$$

La velocidad de fase es

$$v_f = \frac{\omega}{h_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 + \frac{p_0^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{p_0^2}{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}}}. \qquad (19.37)$$

De la fórmula (19.35) se infiere que para $d = \lambda/4$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right) \to \infty \quad \text{y} \quad p_0 \to \infty.$$

Se crean una moderación (retardo) y una atenuación infinitamente grandes del campo a lo largo del eje x. Esta deducción no es exacta y es consecuencia del análisis aproximado.

Para $d > \lambda/4$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right) < 0 \quad \text{y} \quad p_0 < 0.$$

La onda lenta no existe puesto que el campo comienza a crecer a medida que se aleja de la estructura retardadora, lo que no corresponde a las condiciones físicas del problema que se investiga. El resultado obtenido permite tomar en consideración, aproximadamente, el comportamiento de los armónicos superiores de la onda lenta. Las fórmulas (19.10) y (19.12) dan la posibilidad de determinar los números de onda p_n y h_n, mientras que la fórmula (19.13), la velocidad de fase de los armónicos superiores. La inexactitud consiste en que al buscar los números de onda p_0 y h_0 se emplea el método aproximado. Además, las condiciones límites se aplicaban no para el campo total, sino para los armónicos fundamentales, hecho que también condiciona el carácter aproximado del cálculo.

CAPÍTULO 20

Atenuación del campo en guías de ondas reales

§ 20.1. Planteamiento del problema

Las guías de ondas reales se fabrican de los metales que poseen una conductibilidad eléctrica finita. Los dieléctricos utilizados en las guías de ondas no son ideales. Por eso la amplitud de las ondas electromagnéticas que se propagan en las guías de ondas disminuye a medida que el campo avanza a lo largo del eje de la guía de ondas.

Es imposible evaluar la utilidad práctica de tal o cual canal de guiaondas sin determinar la atenuación del campo. La imperfección de los materiales empleados en las guías de ondas no sólo acarrea la reducción de la amplitud del campo y pérdidas de potencia, sino también deforma el cuadro del campo en las guías de ondas determinado en los capítulos anteriores. Sin embargo, las pérdidas en los dieléctricos y metales reales son insignificantes y, como lo demuestra un análisis más profundo, la influencia que la imperfección de estos materiales ejerce sobre la estructura del campo también es insignificante. Debido a ello, al analizar las pérdidas en las guías de ondas, la estructura del campo se toma análoga a aquella que poseen los sistemas de guiaondas ideales sin pérdidas. En el presente capítulo las ecuaciones necesarias se deducirán precisamente con el grado de aproximación indicado.

§ 20.2. Deducción de las ecuaciones para las potencias perdidas en el metal y en el dieléctrico de la guía de ondas. Determinación de los coeficientes de atenuación

Si tenemos pérdidas, el coeficiente de propagación γ_g, como se ha establecido en el § 12.3 se determina por la fórmula

$$\gamma_g = h - jh' - jh''.$$

Aquí h' y h'' son los coeficientes (factores) de atenuación del campo debidos a las pérdidas en el metal y en el dieléctrico, respectivamente.

La parte real del vector de Poynting aparecido en el campo que se propaga en la guía de ondas se define por la expresión general (4.29). De conformidad con las fórmulas (12.51), (12.52) y (12.58) – (12.63) se puede escribir

$$\dot{E} = \dot{E}_0 e^{-j\gamma_g z}, \quad \dot{H} = \dot{H}_0 e^{-j\gamma_g z}. \tag{20.1}$$

Haciendo uso de la expresión (12.65), obtenemos

$$\dot{E} = \dot{E}_0 e^{-(h'+h'')z} e^{-jhz}, \tag{20.2}$$

$$\dot{H} = \dot{H}_0 e^{-(h'+h'')z} e^{-jhz}. \tag{20.3}$$

Correspondientemente, para el valor conjugado de $\dot{H}^*$ se tiene

$$\dot{H}^* = \dot{H}_0^* e^{-(h'+h'')\zeta_0 / h\zeta}. \qquad (20.4)$$

Al sustituir las expresiones (20.2) y (20.4) en la fórmula (4.29), hallamos

$$\dot{\Pi}_{Re} = \frac{1}{2} Re\,[\dot{E}_0 \dot{H}_0^*]\, e^{-2(h'+h'')\zeta}. \qquad (20.5)$$

Determinemos la potencia P que pasa por la sección transversal de la guía de ondas S_g. En el caso de guías de ondas tubulares se debe entender por S_g la sección transversal del tubo, y cuando se trata de guías de ondas lentas, la sección dentro de cuyos límites se propaga la parte aplastante del campo electromagnético. El término «aplastante» es hasta cierto punto convencional y puede interpretarse de distinta manera en situaciones diferentes. Habitualmente, se entiende por S_g la sección en cuyo marco se propaga el 95 % de potencia del campo electromagnético.

Para la potencia P se puede escribir la siguiente expresión general:

$$P = \int_{S_g} \dot{\Pi}_{Re}\, dS = \frac{1}{2} \int_{S_g} Re\,[\dot{E}_0 \dot{H}_0^*] e^{-2(h'+h'')\zeta}\, dS =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2(h'+h'')\zeta} \int_{S_g} Re\,[\dot{E}_0 \dot{H}_0^*]\, dS. \qquad (20.6)$$

El factor $e^{-2(h'+h'')\zeta}$ puede sacarse fuera del signo de la integral, ya que la integración se realiza respecto a la superficie de la sección transversal de la guía de ondas, es decir, por las coordenadas ξ, η.

La variación de la potencia a lo largo de la coordenada ζ se caracteriza por la derivada

$$\frac{dP}{d\zeta} = -2(h'+h'')\frac{1}{2} e^{-2(h'+h'')\zeta} \int_{S_g} Re\,[\dot{E}_0 \dot{H}_0^*]\, dS =$$

$$= -(h'+h'')\, e^{-2(h'+h'')\zeta} \int_{S_g} Re\,[\dot{E}_0 \dot{H}_0^*]\, dS. \qquad (20.7)$$

La potencia P_p que se pierde en la distancia infinitamente pequeña $d\zeta$: $dP_p = \left|\frac{dP}{d\zeta}\right| d\zeta$ se expresa por la relación

$$dP_p = \left\{(h'+h'')\, e^{-2(h'+h'')\zeta} \int_{S_g} Re\,[\dot{E}_0 \dot{H}_0^*]\, dS\right\} d\zeta.$$

La potencia que se pierde en el tramo finito l de la longitud de la guía de ondas puede hallarse por medio de la integración:

$$P_p = \int_0^l \left\{ (h' + h'') e^{-2(h'+h'')\zeta} \int_{S_g} \mathrm{Re}\,[\dot{E}_0 \dot{H}_0^*]\, dS \right\} d\zeta =$$

$$= (h' + h'') \int_{S_g} \mathrm{Re}\,[\dot{E}_0 \dot{H}_0^*]\, dS \int_0^l e^{-2(h'+h'')\zeta}\, d\zeta =$$

$$= -\frac{h' + h''}{2(h' + h'')} \int_{S_g} \mathrm{Re}\,[\dot{E}_0 \dot{H}_0^*]\, dS\, e^{-2(h'+h'')\zeta} \Big|_0^l,$$

o bien

$$P_p = (1 - e^{-2(h'+h'')l}) \frac{1}{2} \int_{S_g} \mathrm{Re}\,[\dot{E}_0 \dot{H}_0^*]\, dS. \qquad (20.8)$$

La expresión obtenida incluye la potencia de las pérdidas en el metal y en el dieléctrico de la guía de ondas. Aquí son incógnitas las magnitudes P_p, h' y h''.

En el § 9.7 se ha dado la siguiente expresión para la potencia que se pierde en el metal real a condición de que el área de la superficie del metal sea igual a S_1:

$$P_{pér} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{a\,r}\omega}{2\gamma_{el\,s}}} \int_{S_1} |\dot{H}_\tau|^2\, dS.$$

En el caso considerado la integración debe realizarse por la superficie del metal que forma el sistema de guíaondas. Las componentes del campo magnético $\dot{H}_\tau$ tangencial a las paredes metálicas son parte del campo total $\dot{E}$ y $\dot{H}$ en la guía de ondas, y su dependencia respecto a la coordenada ζ es análoga a las relaciones (20.2) y (20.3):

$$\dot{H}_\tau = \dot{H}_{0\tau} e^{-(h'+h'')\zeta} e^{-j\beta\zeta}. \qquad (20.9)$$

En virtud de ello

$$\int_{S_1} |\dot{H}_\tau|^2\, dS = \left(\int_\xi |\dot{H}_{0\tau}|^2 h_\xi\, d\xi + \int_\eta |\dot{H}_{0\tau}|^2 h_\eta\, d\eta \right) \int_0^l e^{-2(h'+h'')\zeta}\, d\zeta =$$

$$= -\frac{1}{2(h' + h'')} e^{-2(h'+h'')\zeta} \Big|_0^l \left(\int_\xi |\dot{H}_{0\tau}|^2 h_\xi\, d\xi + \int_\eta |\dot{H}_{0\tau}|^2 h_\eta\, d\eta \right) =$$

$$= \frac{1}{2(h' + h'')} (1 - e^{-2(h'+h'')l}) \left(\int_\xi |\dot{H}_{0\tau}|^2 h_\xi\, d\xi + \int_\eta |\dot{H}_{0\tau}|^2 h_\eta\, d\eta \right). \qquad (20.10)$$

Aquí las integrales $\int_{\xi} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_\xi\, d\xi$ y $\int_{\eta} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_\eta\, d\eta$ representan fracciones de las integrales de superficie tomadas, respectivamente, por las coordenadas ξ y η.

Al sustituir la expresión (20.10) en la fórmula (9.80), obtenemos la potencia que se pierde en el metal del sistema de guíaondas teniendo en cuenta las pérdidas en el dieléctrico de este sistema

$$P_{\text{pér}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_{a2}\omega}{2\gamma_{e1}}}\,\frac{1}{2(h'+h'')}\left\{1-e^{-2(h'-h'')l}\right\}\times$$
$$\times\left(\int_{\xi}|\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_\xi\, d\xi + \int_{\eta}|\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 h_\eta\, d\eta\right). \qquad (20.11)$$

Si no hay pérdidas en el dieléctrico el coeficiente de atenuación h'' debe igualarse a cero. La fórmula (20.11) contiene tres magnitudes incógnitas: $P_{\text{pér}}$, h' y h''. Hallemos la expresión para la potencia de las pérdidas en el dieléctrico $P_{\text{pér. d}}$.

En el § 4.2 se ha deducido el teorema de Poynting (4.26).

$$\oint_{S_1}\operatorname{Re}\frac{1}{2}[\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*]\,d\mathbf{S} + \int_{V_1}\operatorname{Re}\frac{1}{2}\dot{\mathbf{J}}_m\dot{\mathbf{H}}^*\,dV + \int_{V_1}\operatorname{Re}\frac{1}{2}\dot{\mathbf{J}}^*_{e1}\dot{\mathbf{E}}\,dV +$$
$$+\int_{V_1}\frac{1}{2}\gamma_m|\dot{\mathbf{H}}|^2\,dV + \int_{V_1}\frac{1}{2}\gamma_{e1}|\dot{\mathbf{E}}|^2\,dV = 0.$$

Las dos últimas integrales en esta relación representan la potencia promediada por el período, que se consume para calentar el dieléctrico poseedor de conductibilidades magnética y eléctrica. Al aprovechar las relaciones (20.2) y (20.3), se puede escribir estas integrales de la siguiente manera:

$$\int_{V_1}\frac{1}{2}\gamma_m|\dot{\mathbf{H}}|^2\,dV = \frac{1}{2}\int_{\xi}\int_{\eta}\gamma_m|\dot{\mathbf{H}}_0|^2 h_\eta\,d\eta h_\xi\,d\xi\int_0^l e^{-2(h'+h'')\zeta}\,d\zeta =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2(h'+h'')}\left\{1-e^{-2(h'+h'')l}\right\}\int_{\xi}\int_{\eta}\gamma_m|\dot{\mathbf{H}}_0|^2 h_\eta\,d\eta h_\xi\,d\xi, \qquad (20.12)$$

$$\int_{V_1}\frac{1}{2}\gamma_{e1}|\dot{\mathbf{E}}|\,dV = \frac{1}{2}\int_{\xi}\int_{\eta}\gamma_{e1}|\dot{\mathbf{E}}_0|^2 h_\eta\,d\eta h_\xi\,d\xi\int_0^l e^{-2(h'+h'')\zeta}\,d\zeta =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2(h'+h'')}\left\{1-e^{-2(h'+h'')l}\right\}\int_{\xi}\int_{\eta}\gamma_{e1}|\dot{\mathbf{E}}_0|^2 h_\eta\,d\eta h_\xi\,d\xi. \qquad (20.13)$$

Aquí, las integrales $\int_{\xi}\int_{\eta}\gamma_m|\dot{\mathbf{H}}_0|^2 h_\eta\,d\eta h_\xi\,d\xi$ y $\int_{\xi}\int_{\eta}\gamma_{e1}|\dot{\mathbf{E}}_0|^2 h_\eta\,d\eta\,h_\xi\,d\xi$ representan las integrales tomadas por la superficie de la sección transversal, por las coordenadas ξ y η.

De este modo, la potencia total que se pierde en el dieléctrico poseedor de conductibilidades magnética y eléctrica es:

$$P_{\text{pér. d}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2(h' + h'')} \{1 - e^{-2(h' + h'')l}\} \left(\int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_{m} |\dot{H}_0|^2 h_{\eta} \, d\eta h_{\xi} \, d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_{el} |\dot{E}_0|^2 h_{\eta} \, d\eta h_{\xi} \, d\xi \right). \qquad (20.14)$$

La potencia perdida por el campo al pasar el tramo de la guía de ondas de longitud l se determina mediante la fórmula (20.8). Ella es igual a la potencia total que se pierde en el metal y en el dieléctrico del sistema de guíaondas:

$$P_p = P_{\text{pér}} + P_{\text{pér. d}}.$$

Valiéndonos de las relaciones (20.8), (20.11) y (20.14), obtenemos

$$P_p = \{1 - e^{-2(h' + h'')l}\} \frac{1}{2} \int_{S_g} \operatorname{Re} [\dot{E}_0 \dot{H}_0^*] \, dS =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{a2}\omega}{2\gamma_{el2}}} \cdot \frac{1}{2(h' + h'')} \{1 - e^{-2(h' + h'')l}\} \left(\int_{\xi} |\dot{H}_{0\tau}|^2 h_{\xi} \, d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{\eta} |\dot{H}_{0\tau}|^2 h_{\eta} \, d\eta \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2(h' + h'')} \{1 - e^{-2(h' + h'')l}\} \times$$

$$\times \left(\int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_{m} |\dot{H}_0|^2 h_{\eta} \, d\eta h_{\xi} \, d\xi + \int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_{el} |\dot{E}_0|^2 h_{\eta} \, d\eta h_{\xi} \, d\xi \right),$$

o bien, después de simplificar

$$\int_{S_g} \operatorname{Re} [\dot{E}_0 \dot{H}_0^*] \, dS =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{a2}\omega}{2\gamma_{el2}}} \cdot \frac{1}{(h' + h'')} \left(\int_{\xi} |\dot{H}_{0\tau}|^2 h_{\xi} \, d\xi + \int_{\eta} |\dot{H}_{0\tau}|^2 h_{\eta} \, d\eta \right) +$$

$$+ \frac{1}{h' + h''} \left(\int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_{m} |\dot{H}_0|^2 h_{\eta} \, d\eta h_{\xi} \, d\xi + \int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_{el} |\dot{E}_0|^2 h_{\eta} \, d\eta h_{\xi} \, d\xi \right).$$

A partir de esta expresión se puede hallar el coeficiente total de atenuación $h' + h''$:

$$h' + h'' = \frac{\sqrt{\frac{\mu_{a2}\omega}{2\gamma_{el2}}} \left(\int_{\xi} |\dot{H}_{0\tau}|^2 h_{\xi} \, d\xi + \int_{\eta} |\dot{H}_{0\tau}|^2 h_{\eta} \, d\eta \right) + \int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_{m} |\dot{H}_0|^2 h_{\eta} \, d\eta h_{\xi} \, d\xi + \int_{\xi} \int_{\eta} \gamma_{el} |\dot{E}_0|^2 h_{\eta} \, d\eta h_{\xi} \, d\xi}{2 \int_{S_g} \operatorname{Re} [\dot{E}_0 \dot{H}_0^*] \, dS}. \qquad (20.15)$$

Cada uno de estos coeficientes se determina mediante las fórmulas

$$h' = \frac{\sqrt{\frac{\mu_{a2}\omega}{2\gamma_{el2}}}\left(\int\limits_{\xi} |\dot{H}_{0\tau}|^2 h_\xi \, d\xi + \int\limits_{\eta} |\dot{H}_{0\tau}|^2 h_\eta \, d\eta\right)}{2\int\limits_{S_g} \mathrm{Re}\,[\dot{E}_0 \dot{H}_0^*]\, dS}, \qquad (20.16)$$

$$h'' = \frac{\int\limits_{\xi}\int\limits_{\eta} \gamma_{m1} |\dot{H}_0|^2 h_\eta \, d\eta h_\xi \, d\xi + \int\limits_{\xi}\int\limits_{\eta} \gamma_{e1} |\dot{E}_0|^2 h_\eta \, d\eta h_\xi \, d\xi}{2\int\limits_{S_g} \mathrm{Re}\,[\dot{E}_0 \dot{H}_0^*]\, dS}. \qquad (20.17)$$

Vale recordar que las integrales en los denominadores de estas expresiones son integrales por la superficie de la sección transversal ocupada por el campo electromagnético.

Las integrales en el numerador de la expresión (20.16) se toman por el ancho de cada una de las superficies metálicas que forman la guía de ondas, y las integrales en el numerador de la expresión (20.17), por el área de la sección transversal del dieléctrico de la guía de ondas. Según sea la situación concreta, pueden tomarse en consideración tanto los dos coeficientes de atenuación h' y h'', como cada uno de ellos por separado.

En el dieléctrico pueden existir tanto pérdidas de los tipos magnético y eléctrico, como de uno de estos tipos. Son posibles los casos en que las pérdidas en el dieléctrico se pueden despreciar. Los ejemplos de cálculo del coeficiente de atenuación h' se dan en el Apéndice II.

CAPITULO 21

Nociones generales sobre los resonadores de cavidad. Resonador de cavidad creado a base de una guía de ondas rectangular de ondas rápidas

§ 21.1. Nociones generales sobre los resonadores de cavidad

En los diapasones de ondas decimétricas, centimétricas y más cortas, al crear circuitos oscilatorios hay que enfrentar serias dificultades. Capacitancias vagabundas (capacidades parásitas) y la disminución del factor de mérito de las bobinas de inductancia hacen

imposible su utilización en los diapasones indicados. Cuando las dimensiones del circuito oscilatorio llegan a ser conmensurables con la longitud de onda dicho circuito con las constantes localizadas deja de ser oscilatorio. En este caso desde los sistemas con constantes localizadas se pasa a los sistemas con constantes repartidas.

Como se conoce, una línea larga cerrada en su extremo cuya longitud es igual a un cuarto de longitud de onda de la oscilación suministrada es equivalente a un circuito oscilatorio paralelo y se utiliza, con frecuencia, como circuito oscilatorio. Sin embargo, el concepto de «línea larga» es justo mientras las dimensiones trans-

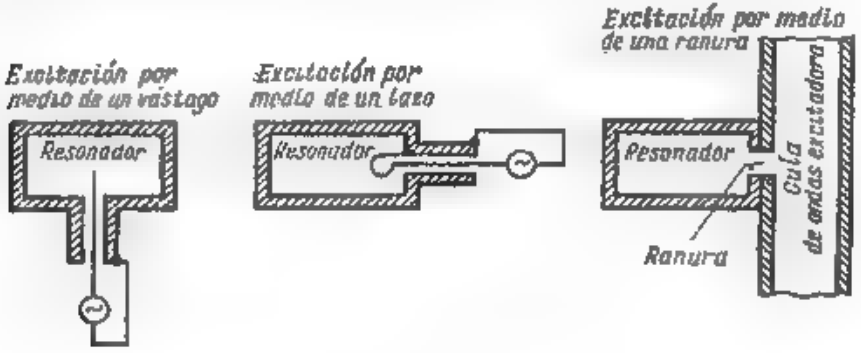

FIG. 21.1

versales son esencialmente menores que la longitud de onda. En la práctica, los segmentos de las líneas largas pueden servir de circuitos oscilatorios en los diapasones de ondas métrico y decimétrico.

Habitualmente, en estos diapasones se emplean como líneas largas segmentos de guías de ondas coaxiales, y el circuito oscilatorio confeccionado de esta manera se denomina *resonador de cavidad coaxial*.

En la parte corta del diapasón decimétrico, así como en el diapasón centimétrico de ondas, en los resonadores coaxiales, además de las ondas del tipo T, sobre cuya base trabajan, es posible también la excitación de ondas de tipos de guiaondas superiores lo que dificulta la utilización de estos resonadores.

En dichos diapasones han encontrado una amplia difusión los resonadores de cavidad hechos a base de guías de ondas rápidas con distintas secciones. Un segmento de la guía de ondas se cierra por los dos lados con paredes metálicas y a través de los orificios en estas paredes se introduce un vástago (sonda) o un lazo (bucle) tal como se ilustra en la fig. 21.1, y con su ayuda en el resonador se excita un campo electromagnético. También es posible excitar el resonador recurriendo a ranuras practicadas en las paredes del resonador y a una guía de ondas excitadora (fig. 21.1). La onda electromagnética que se propaga en el resonador experimenta una múltiple reflexión de las paredes, y si las correlaciones de fase entre las ondas incidentes

y reflejadas son favorables en el sistema pueden establecerse oscilaciones no amortiguadas.

Una de las propiedades principales de semejantes sistemas es su alto factor de mérito (factor de calidad) que alcanza el valor de decenas de miles. En el caso de utilizar para las paredes del resonador materiales superconductores y la técnica criógena, su factor de mérito puede aumentar sustancialmente. Como se ha establecido las guías de ondas rápidas trabajan normalmente cuando sus dimensiones

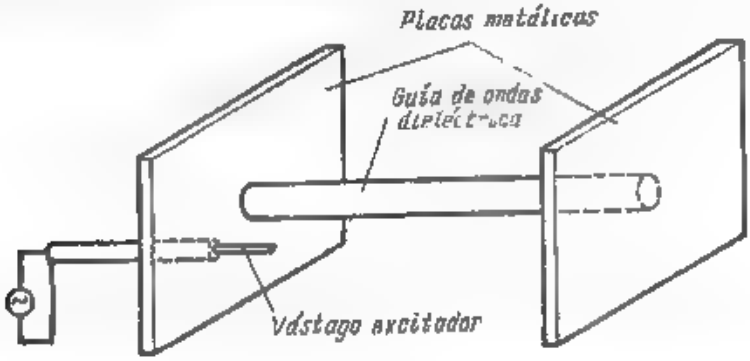

FIG. 21.2

transversales son conmensurables con la longitud de onda. Al pasar a los diapasones de ondas milimétricas y submilimétricas, la utilización de guías de ondas rápidas se torna dificultosa, ya que sus dimensiones transversales llegan a ser muy pequeñas.

Al crear resonadores en las gamas de ondas milimétricas y submilimétricas se emplean guías de ondas lentas que funcionan en estas gamas. En este caso el tramo de la guía de ondas lentas se limita por dos lados con placas metálicas (fig. 21 2, cuando se trata de una guía de ondas dieléctrica circular). En las estructuras de los resonadores de cavidad que utilizan las guías de ondas lentas es posible una gran diversidad. En el diapasón de ondas submilimétricas encuentran aplicación resonadores de cavidad del llamado tipo abierto construidos a guisa de los interferómetros ópticos. El examen de tales resonadores está al margen del temario del presente libro.

§ 21.2. Deducción de las expresiones para las componentes del campo del tipo eléctrico en el resonador creado sobre la base de una guía de ondas rectangular de ondas rápidas

Utilicemos como resonador de cavidad el segmento de una guía de ondas rectangular de longitud l, cuyas dimensiones interiores se muestran en la fig. 21.3. Tomemos como iniciales las relaciones (13.29) — (13.34) para las componentes del campo del tipo eléctrico en una guía de ondas rectangular, deducidas en el § 13.2.

Estas expresiones caracterizan el campo que se desplaza en la guía de ondas en dirección de los valores positivos del eje z. En el resonador de cavidad, como resultado de la reflexión de la onda desde la pared que cierra la guía de ondas, se engendra el campo electromagnético que se desplaza en dirección opuesta, o sea, en dirección de los valores negativos del eje z. La onda reflejada se diferencia de la incidente por el signo ante la constante longitudinal de propagación h. En el § 12.2 se han obtenido las expresiones para la velocidad de fase de la onda que se propaga en la guía de ondas en dirección de los valores positivos y negativos del eje z. En el primer caso la velocidad de fase $v_f = \omega/h$, en el segundo, $v_f = -\omega/h$.

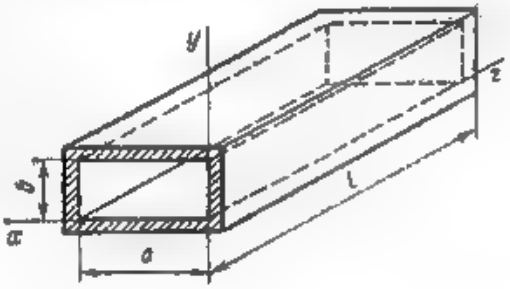

FIG. 21.3

De este modo, si es necesario obtener las expresiones para las componentes del campo de la onda reflejada es suficiente en las fórmulas (13.29) — (13.34) cambiar por el contrario el signo delante de la constante h, sustituyendo, además, el coeficiente de amplitud de la onda directa C_1 por el coeficiente C_2 de la onda reflejada. Como resultado de estas operaciones se obtienen las siguientes expresiones para las componentes del campo de la onda reflejada:

$$\dot{E}_{x0} = -j\frac{h}{g_{mn}^2} C_2 \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{jhz}, \qquad (21.1)$$

$$\dot{E}_{y0} = -j\frac{h}{g_{mn}^2} C_2 \frac{n\pi}{b} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{jhz}, \qquad (21.2)$$

$$\dot{E}_{z0} = C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{jhz}, \qquad (21.3)$$

$$\dot{H}_{x0} = -j\frac{\omega\varepsilon_a}{g_{mn}^2} C_2 \frac{n\pi}{b} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{jhz}, \qquad (21.4)$$

$$\dot{H}_{y0} = j\frac{\omega\varepsilon_a}{g_{mn}^2} C_2 \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{jhz}, \qquad (21.5)$$

$$\dot{H}_{z0} = 0. \qquad (21.6)$$

El campo total en el resonador es la superposición de las ondas directa y reflejada. En este caso deben observarse las condiciones límites junto a las paredes que acotan la guía de ondas:

$$\dot{E}_t = 0 \text{ (para } z = 0 \text{ y } z = l). \qquad (21.7)$$

Las componentes $\dot{E}_{xr}$ y $\dot{E}_{yr}$ del campo total en el resonador son tangenciales respecto a las paredes acotadoras que se encuentran en

el plano xy:

$$\dot{E}_{xr} = \dot{E}_x + \dot{E}_{x0}, \quad \dot{E}_{yr} = \dot{E}_y + \dot{E}_{y0}. \tag{21.8}$$

En este caso, las condiciones límites se escriben en la forma

$$\dot{E}_x + \dot{E}_{x0} = 0 \text{ (para } z = 0 \text{ y } z = l), \tag{21.9}$$

$$\dot{E}_y + \dot{E}_{y0} = 0 \text{ (para } z = 0 \text{ y } z = l). \tag{21.10}$$

Al sustituir en las condiciones límites (21.9) las expresiones para $\dot{E}_x$ y $\dot{E}_{x0}$ (13.29) y (21.1), obtenemos

$$j \frac{h}{g_{mn}^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (C_1 e^{-jhz} - C_2 e^{jhz}) = 0$$

(para $z = 0$ y $z = l$),

de donde

$$C_1 - C_2 = 0, \text{ o bien } C_1 = C_2 \tag{21.11}$$

y

$$j \frac{h}{g_{mn}^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) C_1 (e^{-jhl} - e^{jhl}) = 0.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{e^{jhl} - e^{-jhl}}{2j} = \operatorname{sen}(hl)$, se puede escribir

$$j \frac{h}{g_{mn}^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) C_1 (-2j) \operatorname{sen}(hl) = 0.$$

De aquí

$$\operatorname{sen}(hl) = 0, \quad hl = p\pi, \tag{21.12}$$

donde

$$h = \frac{p\pi}{l} \ (p = 0, 1, 2, 3 \ldots). \tag{21.13}$$

El cumplimiento de las condiciones límites (21.10) lleva a resultados análogos. Valiéndonos de las igualdades (21.11) y de las relaciones (13.29) — (13.34) y (21.1) — (21.6), obtenemos las siguientes expresiones para las componentes del campo total en el resonador:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_{xr} &= j \frac{h}{g_{mn}^2} C_1 \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (e^{-jhz} - e^{jhz}), \\
\dot{E}_{yr} &= j \frac{h}{g_{mn}^2} C_1 \frac{n\pi}{b} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (e^{-jhz} - e^{jhz}), \\
\dot{E}_{zr} &= C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (e^{-jhz} + e^{jhz}), \\
\dot{H}_{xr} &= -j \frac{\omega_r \varepsilon_a}{g_{mn}^2} C_1 \frac{n\pi}{b} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (e^{-jhz} + e^{jhz}), \\
\dot{H}_{yr} &= j \frac{\omega_r \varepsilon_a}{g_{mn}^2} C_1 \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (e^{-jhz} + e^{jhz}), \\
\dot{H}_{zr} &= 0.
\end{aligned}\right\}$$

En estas expresiones, en vez de la frecuencia ω figura la frecuencia de resonancia ω_r del resonador de cavidad.

En virtud del carácter justo de las relaciones

$$\frac{e^{jhz}-e^{-jhz}}{2j}=\operatorname{sen}(hz),\quad \frac{e^{jhz}+e^{-jhz}}{2}=\cos(hz) \tag{21.14}$$

las componentes del campo en el resonador, teniendo en cuenta la fórmula (21.13), adquieren la siguiente forma:

$$\dot{E}_{xr}=2\frac{p\pi}{lg_{mn}^2}C_i\frac{m\pi}{a}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \tag{21.15}$$

$$\dot{E}_{yr}=2\frac{p\pi}{lg_{mn}^2}C_i\frac{n\pi}{b}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \tag{21.16}$$

$$\dot{E}_{zr}=2C_i\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \tag{21.17}$$

$$\dot{H}_{xr}=-j2\frac{\omega_r\varepsilon_a}{g_{mn}^2}C_i\frac{n\pi}{b}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \tag{21.18}$$

$$\dot{H}_{yr}=j2\frac{\omega_r\varepsilon_a}{g_{mn}^2}C_i\frac{m\pi}{a}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \tag{21.19}$$

$$\dot{H}_{zr}=0. \tag{21.20}$$

Cuando $p=0$ desaparecen las componentes del campo $\dot{E}_{xr}$ y $\dot{E}_{yr}$, mas quedan las componentes $\dot{E}_{zr}$, $\dot{H}_{xr}$ y $\dot{H}_{yr}$. De este modo, la serie de números enteros en la expresión (21.13) puede comenzar por cero.

A diferencia de la guía de ondas, el campo en el resonador de cavidad representa ondas estacionarias por las tres direcciones de las coordenadas.

El numero de onda transversal g_{mn} se halla mediante la fórmula (13.23). En el caso de ondas del tipo eléctrico los índices m y n no pueden ser iguales a cero.

El campo en el resonador se define por tres índices: m, n y p. La onda del tipo eléctrico se designa por E_{mnp}.

§ 21.3. Deducción de las expresiones para las componentes del campo del tipo magnético en el resonador creado sobre la base de una guía de ondas rectangular de ondas rápidas

Elijamos como expresiones de partida las expresiones (13.52) — (13.57) para las componentes del campo del tipo magnético en una guía de ondas rectangular, deducidas en el § 13.3.

Cambiando por inverso el signo ante la constante h e introduciendo un nuevo coeficiente de amplitud C_i obtenemos las siguientes fórmu-

las para las componentes del campo de la onda reflejada:

$$\dot{H}_{x0} = -j\frac{h}{g^2_{mn}} C_4 \frac{m\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{jhz}, \quad (21.21)$$

$$\dot{H}_{y0} = -j\frac{h}{g^2_{mn}} C_4 \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{jhz}, \quad (21.22)$$

$$\dot{H}_{z0} = C_4 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{jhz}, \quad (21.23)$$

$$\dot{E}_{x0} = j\frac{\omega\mu_a}{g^2_{mn}} C_4 \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{jhz}, \quad (21.24)$$

$$\dot{E}_{y0} = -j\frac{\omega\mu_a}{g^2_{mn}} C_4 \frac{m\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{jhz}, \quad (21.25)$$

$$\dot{E}_{z0} = 0. \quad (21.26)$$

Al aplicar las condiciones límites (21.9), obtenemos

$$j\frac{\omega\mu_a}{g^2_{mn}} \cdot \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (C_2 e^{-jhz} + C_4 e^{jhz}) = 0$$

(para $z = 0$ y $z = l$),

de donde

$$C_4 = -C_2 \quad (21.27)$$

y

$$j\frac{\omega\mu_a}{g^2_{mn}} \cdot \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) C_2 (e^{-jhl} - e^{jhl}) = 0.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{e^{jhl} - e^{-jhl}}{2j} = \operatorname{sen}(hl)$, la condición límite se escribe en la forma

$$-j2\frac{\omega\mu_a}{g^2_{mn}} \cdot \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) C_2 \operatorname{sen}(nl) = 0.$$

De aquí

$$\operatorname{sen}(hl) = 0, \quad hl = p\pi, \quad (21.28)$$

donde $h = \frac{p\pi}{l}$ $(p = 1, 2, 3 \ldots)$.

A diferencia de la expresión (21.13) para las ondas del tipo magnético la serie de números p no puede comenzar por cero. Como se señalará más adelante, para $p = 0$ desaparecen todas las componentes del campo.

Al realizar operaciones análogas a las explicadas en el § 21.2 y tomando en consideración las relaciones (21.14), (21.27), (21.28), hallamos las componentes del campo de las ondas del tipo magnético

en el resonador:

$$\dot{H}_{xr} = j2\frac{p\pi}{lg_{mn}^2}C_2\frac{m\pi}{a}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \quad (21.29)$$

$$\dot{H}_{yr} = j2\frac{p\pi}{lg_{mn}^2}C_2\frac{n\pi}{b}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \quad (21.30)$$

$$\dot{H}_{zr} = -j2C_2\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \quad (21.31)$$

$$\dot{E}_{xr} = 2\frac{\omega_r\mu_a}{g_{mn}^2}C_2\frac{n\pi}{b}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \quad (21.32)$$

$$\dot{E}_{yr} = -2\frac{\omega_r\mu_a}{g_{mn}^2}C_2\frac{m\pi}{a}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \quad (21.33)$$

$$\dot{E}_{zr} = 0 \quad (21.34)$$

Se ve que cuando $p = 0$ todas las componentes del campo se convierten en cero, por eso la serie de números p en la fórmula (21.28) debe iniciarse por la unidad. El número de onda transversal g_{mn} se define por la fórmula (13.23). Los índices m y n pueden ser iguales a cero tan sólo alternativamente Su igualdad simultánea a cero es imposible, puesto que en este caso todas las componentes del campo se convierten en cero.

Las ondas del tipo magnético, al igual que las ondas del tipo eléctrico se definen por tres índices m, n y p y se designan por H_{mnp}.

§ 21.4. Determinación de la frecuencia de resonancia y de los tipos fundamentales de ondas en el caso de ondas de los tipos eléctrico y magnético en el resonador creado sobre la base de una guía de ondas rectangular de ondas rápidas

Los números de ondas longitudinal h y transversal g_{mn} en las guías de ondas están enlazados entre sí por la relación (13 35). Esta relación también es válida para los resonadores de cavidad, con la única diferencia de que al investigar los procesos en las guías de ondas se entiende como frecuencia ω la frecuencia de las oscilaciones suministradas a la guía de ondas desde el generador, y en los resonadores de cavidad dicha frecuencia se sustituye por la frecuencia de resonancia ω_r de las oscilaciones propias en el resonador. Teniendo en cuenta esta circunstancia la expresión (13.35) debe escribirse de nuevo en la siguiente forma:

$$h = \sqrt{\omega_r^2\mu_a\varepsilon_a - g_{mn}^2}. \quad (21.35)$$

de donde la frecuencia de resonancia es

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}}\sqrt{h^2 + g_{mn}^2}. \quad (21.36)$$

Tomando en consideración las fórmulas (21.13), (21.28) y (13.23) obtenemos para la frecuencia de resonancia

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}, \qquad (21.37)$$

Esta relación sirve para las ondas de los tipos eléctrico y magnético. Lo importante es recordar que para las ondas del tipo eléctrico la serie de números m y n debe comenzar por la unidad (los valores cero están prohibidos), mientras que la serie de números p puede iniciarse con cero. En el caso de ondas del tipo magnético los números m y n, alternativamente, pueden ser iguales a cero, pero la serie de números p debe empezar por la unidad.

Debido a la validez de la relación (12.29) la frecuencia de resonancia

$$\omega_r = c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}. \qquad (21\ 38)$$

Valiéndose de la relación (21 38) no es difícil obtener las expresiones para la frecuencia de resonancia f_r y la longitud de onda de resonancia λ_r:

$$f_r = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}, \qquad (21.39)$$

$$\lambda_r = \frac{c}{f_r} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}. \qquad (21.40)$$

No se puede olvidar que la longitud de onda de resonancia λ_r (21.40) corresponde a un medio con los parámetros μ_a, ε_a que llena el resonador.

Como se desprende de las relaciones deducidas, en el resonador pueden existir ondas de diferentes tipos con frecuencias de resonancia distintas. En otras palabras, el resonador, a diferencia del circuito oscilatorio paralelo ordinario es un sistema multiondulatorio.

Análogamente a las guías de ondas, al analizar los procesos en los resonadores puede plantearse el problema acerca de las ondas del tipo fundamental que posee la longitud de onda de resonancia máxima λ_r y la frecuencia de resonancia mínima ω_r.

Para las ondas del tipo eléctrico los valores mínimos admisibles de los índices m, n y p son

$$m = 1,\ n = 1,\ p = 0. \qquad (21.41)$$

A estos índices corresponde la onda del tipo E_{110} con la frecuencia de resonancia

$$\omega_{r(E_{110})} = \pi c \sqrt{1/a^2 + 1/b^2} \qquad (21.42)$$

y la longitud de onda de resonancia

$$\lambda_{r(E_{110})} = \frac{2}{\sqrt{1/a^2 + 1/b^2}}, \qquad (21.43)$$

Para las ondas del tipo magnético los valores mínimos admisibles de los índices m, n y p se determinan mediante las igualdades:

$$m = 1,\ n = 0,\ p = 1. \tag{21.44}$$

A estos índices corresponde la onda del tipo H_{101} con la frecuencia de resonancia

$$\omega_{r(H_{101})} = \pi c \sqrt{1/a^2 + 1/l^2} \tag{21.45}$$

y la longitud de onda de resonancia

$$\lambda_{r(H_{101})} = \frac{2}{\sqrt{1/a^2 + 1/l^2}}. \tag{21.46}$$

En el caso de onda del tipo E_{110} la frecuencia de resonancia $\omega_{r(E_{110})}$ no depende de la longitud del resonador l, y en el caso de onda del tipo H_{101}, de la altura del resonador b.

§ 21.5. Condiciones de existencia en el resonador de ondas del tipo prefijado

Como se ha señalado, el resonador representa un segmento de la guía de ondas de longitud l cerrado por los dos lados con superficies metálicas. En consecuencia, las condiciones de existencia de ondas del tipo dado se determinan ante todo por la posibilidad de propagación de una onda de los tipos E_{mn} y H_{mn} en la guía de ondas dada. Estas cuestiones se han examinado en el § 13.5. La condición general de propagación de ondas del tipo E_{mn} o H_{mn} se determina por la fórmula (13.76). En los resonadores $\lambda = \lambda_r$, y la condición (13.76) se escribe en la forma

$$\lambda_r < \frac{2}{\sqrt{m/a^2 + (n/b)^2}}. \tag{21.47}$$

Supongamos que las dimensiones a y b se han elegido de modo que esta condición se satisface, las ondas con los índices m y n se propagan, mientras que las ondas con los índices $m + 1$, n o m, $n + 1$ se amortiguan y para éstas no se cumple la desigualdad (21.47).

Es necesario hallar la condición que determine la longitud del resonador l para la cual sea posible la existencia de ondas del tipo E_{mnp} o H_{mnp}.

En el caso de ondas del tipo E_{mn0} tal condición no existe, ya que la longitud de onda de resonancia no depende de la longitud del resonador l. Además, en correspondencia con la fórmula (21.40),

$$\lambda_r = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}. \tag{21.48}$$

Al comparar esta expresión con la (21.47) se puede hacer la conclusión de que cuando $p = 0$ en el resonador se engendran ondas del tipo eléctrico correspondientes al caso crítico, o sea, al límite de las condiciones de propagación de las ondas del tipo E_{mn} en la guía de ondas.

Para $p \neq 0$ la longitud de onda de resonancia disminuye en comparación con el caso crítico [fórmula (21.48)] y se observa la

condición de propagación (21.47) de las ondas con los índices m y n en la guía de ondas. Entonces, siendo prefijadas las dimensiones a y b, el tipo de la onda y la longitud de onda de resonancia λ_r, la longitud del resonador l se determina unívocamente a partir de la expresión (21.40):

$$l = \frac{p}{\sqrt{(2/\lambda_r)^2 - (m/a)^2 - (n/b)^2}}. \qquad (21.49)$$

§ 21.6. Cuadros del campo en un resonador rectangular

Si se comparan las relaciones (13.29) — (13.34) para las componentes del campo en una guía de ondas rectangular en el caso de ondas del tipo eléctrico con las expresiones (21.15) — (21.20) para las componentes del campo en un resonador de cavidad rectangular,

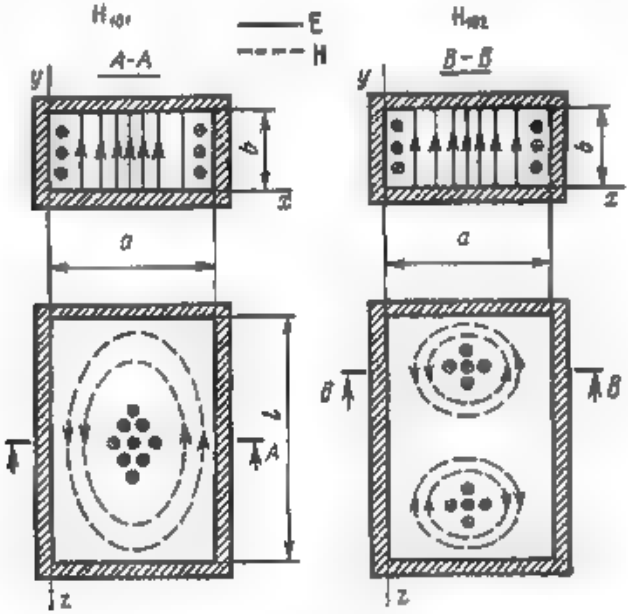

FIG. 21.4

tratándose también de ondas del tipo eléctrico, se puede ver que las leyes de variación del campo a lo largo de los ejes x, y en la guía de ondas y en el resonador son las mismas. La diferencia consiste en el carácter de la variación del campo a lo largo del eje z. En la guía de ondas el campo representa una onda progresiva, mientras que en el resonador de cavidad, una onda estacionaria. Un cuadro análogo se observa al confrontar las expresiones (13.52) — (13.57) y (21.29) — (21.34) válidas para los campos del tipo magnético en la guía de ondas y en el resonador, respectivamente.

De este modo, en el plano de la sección transversal, en las coordenadas x, y, los cuadros del campo en la guía de ondas y en el resonador de cavidad tendrán un carácter parecido. Al examinar los cuadros del campo a lo largo del eje z deben observarse las condiciones límites junto a la superficie del metal ideal, de acuerdo con las cuales junto a las paredes transversales del resonador situadas en los planos $z = 0$ y $z = l$ deben existir componentes del campo magnético tangenciales a las paredes y no pueden existir componentes tangenciales del campo eléctrico. Este hecho conduce a que los cuadros de los campos eléctrico y magnético en el resonador de cavidad se desplacen a un cuarto de longitud de onda a lo largo del eje z en comparación con los cuadros del campo instantáneos en la guía de ondas. Las expresiones (13.94), (13.95) y (13.96) obtenidas en el § 13.7 para la onda del tipo H_{10} en la guía de ondas rectangular corresponden al cuadro instantáneo del campo en el momento de tiempo $t = 0$.

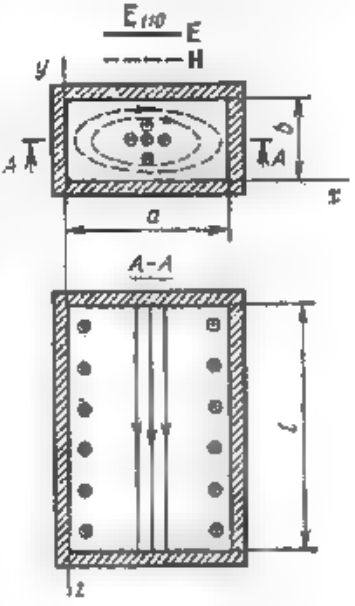

FIG. 21.5

En el resonador de cavidad las componentes del campo se determinan por las fórmulas (21.29) — (21.34). Cuando los índices son $m = 1$, $n = 0$ y $p = 1$ éstas se escriben en la forma

$$\dot{H}_{xr} = -j2\frac{\pi}{g\hat{k}_{mn}l}C_2\frac{\pi}{a}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{l}z\right), \qquad (21.50)$$

$$\dot{H}_{zr} = -j2C_2\cos\left(\frac{j\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l}z\right), \qquad (21.51)$$

$$\dot{E}_{yr} = -\frac{2\omega_r\mu_a}{g\hat{k}_{mn}}C_2\frac{\pi}{a}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l}z\right). \qquad (21.52)$$

Cuando se comparan las expresiones (13.94) (13.96) y (21.50) — (21.52), es posible advertir el desplazamiento de los campos magnético y eléctrico un cuarto de la longitud de onda a lo largo del eje z en el resonador frente a la guía de ondas. Teniendo en cuenta lo expuesto es fácil construir los cuadros del campo en el resonador de cavidad tomando por base los cuadros del campo en la guía de ondas con los índices m y n correspondientes a los índices del campo en el resonador. A título de ejemplo, en la fig. 21.4 se representa el cuadro del campo de las ondas de los tipos H_{101} y H_{103}, y en la fig. 21.5 se da el cuadro del campo de la onda del tipo E_{110} cuando la frecuencia de resonancia no depende de la longitud del resonador l. De conformi-

dad con las expresiones (21.15) — (21.20) en este caso $\dot{E}_{xr} = \dot{E}_{yr} = 0$ y existe una sola componente del campo eléctrico $\dot{E}_{zr}$. El cuadro del campo de esta onda en el plano x, y de diferencia del cuadro del campo de la correspondiente onda del tipo E_{11} en la guía de ondas ectangular (véase la fig. 13.3).

CAPITULO 22

Resonador de cavidad creado sobre la base de una guía de ondas circular de ondas rápidas

§ 22.1. Deducción de las expresiones para las componentes del campo del tipo eléctrico en el resonador creado sobre la base de una guía de ondas circular de ondas rápidas

Utilicemos como resonador de cavidad el segmento de una guía de ondas circular de longitud l y radio r_0 cuyas dimensiones interiores se representan en la fig. 22.1.

En calidad de relaciones de partida elijamos las expresiones (14.33) — (14.38) para las componentes del campo eléctrico en la guía de ondas circular deducidas en el § 14.2.

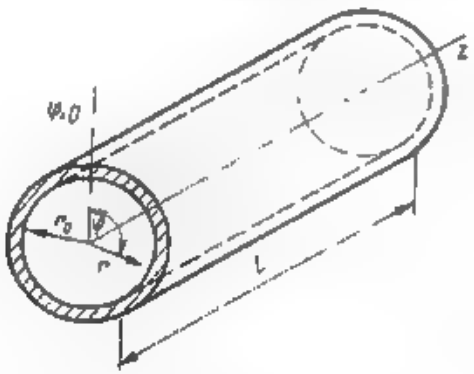

FIG. 22.1

Los razonamientos que siguen no se diferencian de aquellos que se han expuesto al investigar el campo en el resonador rectangular.

Se escriben las expresiones para la onda inversa en el resonador reflejada de la pared del resonador dispuesta en el plano $z = l$. Con este fin, en las expresiones presentadas se cambian los signos ante la constante h y se introduce el coeficiente de amplitud de la onda reflejada C_3. Como resultado de estas operaciones se obtienen

las siguientes expresiones que caracterizan el campo de la onda reflejada:

$$\dot{E}_{r0} = j\frac{hr_0}{\eta_{mn}} C_3 J'_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi)\, e^{jhz}, \tag{22.1}$$

$$\dot{E}_{\varphi 0} = -j\frac{hr_0^2}{r\eta_{mn}^2} C_3 m J_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \operatorname{sen}(m\varphi)\, e^{jhz}, \tag{22.2}$$

$$\dot{E}_{z0} = C_3 J_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi)\, e^{jhz}, \tag{22.3}$$

$$\dot{H}_{r0} = -j\frac{\omega\varepsilon_a r_0^2}{r\eta_{mn}^2} C_3 m J_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \operatorname{sen}(m\varphi)\, e^{jhz}, \tag{22.4}$$

$$\dot{H}_{\varphi 0} = -j\frac{\omega\varepsilon_a r_0}{\eta_{mn}} C_3 J'_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi)\, e^{jhz}, \tag{22.5}$$

$$\dot{H}_{z0} = 0 \tag{22.6}$$

El campo total en el resonador es una superposición de las ondas incidente y reflejada. En este caso deben observarse las condiciones límites:

$$\dot{E}_{\Sigma r} = \dot{E}_r + \dot{E}_{r0} = 0 \quad (\text{para } z = 0 \text{ y } z = l),$$

$$\dot{E}_{\Sigma\varphi} = \dot{E}_\varphi + \dot{E}_{\varphi 0} = 0 \quad (\text{para } z = 0 \text{ y } z = l).$$

Al sustituir la expresión para $\dot{E}_r$ y $\dot{E}_{r0}$ y aprovechar las condiciones límites cuando $z = 0$, obtenemos

$$j\frac{hr_0}{\eta_{mn}} J'_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi)\,(C_3 - C_1) = 0,$$

de donde

$$C_3 = C_1. \tag{22.7}$$

La aplicación de las condiciones límites para $z = l$ y la observancia de la igualdad (22.7) nos conduce a la relación

$$j\frac{hr_0}{\eta_{mn}} J'_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi) C_1 \left(e^{jhl} - e^{-jhl}\right) = 0.$$

Teniendo en cuenta la fórmula (21.14) es posible escribir las condiciones límites en la forma

$$-2\frac{hr_0}{\eta_{mn}} J'_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi) C_1 \operatorname{sen}(hl) = 0.$$

De aquí

$$\operatorname{sen}(hl) = 0 \text{ y } hl = p\pi,$$

donde p es la serie de números enteros la cual, como se señalará más adelante, puede comenzar con cero.

De este modo

$$h = p\pi/l, \quad p = 0, 1, 2, 3 \ldots \tag{22.8}$$

Valiéndose de las expresiones (14.33) — (14.38) y (22.1) — (22.6), así como de las relaciones (22.7), (22.8) y (21.14) se puede escribir las siguientes fórmulas para el campo total en el resonador:

$$\dot{E}_{rr} = -2\frac{p\pi r_0}{l\eta_{mn}} C_4 J'_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi) \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (22.9)$$

$$\dot{E}_{\varphi r} = 2\frac{p\pi r_0^2}{r l \eta_{mn}^2} C_4 m J_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \operatorname{sen}(m\varphi) \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (22.10)$$

$$\dot{E}_{zr} = 2C_4 J_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (22.11)$$

$$\dot{H}_{rr} = -2j\frac{\omega\varepsilon_a r_0^2}{r\eta_{mn}^2} C_4 m J_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \operatorname{sen}(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (22.12)$$

$$\dot{H}_{\varphi r} = -2j\frac{\omega\varepsilon_a r_0}{\eta_{mn}} C_4 J'_m\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \quad (22.13)$$

$$\dot{H}_{zr} = 0. \quad (22.14)$$

Al igual que en el resonador rectangular, la onda del tipo eléctrico en el resonador circular se designa por E_{mnp}, donde m es el número de variaciones del campo a lo largo de la coordenada φ, así como el orden de la función de Bessel; n es el número de la raíz de la función de Bessel y p es el número de variación del campo a lo largo del eje z del resonador. Cuando $p = 0$ desaparecen las componentes $\dot{E}_{rr}$ y $\dot{E}_{\varphi r}$, pero se conservan las componentes $\dot{E}_{zr}$, $\dot{H}_{rr}$ y $\dot{H}_{\varphi r}$ que no dependen de la coordenada z.

§ 22.2. Deducción de las expresiones para las componentes del campo del tipo magnético en el resonador creado sobre la base de una guía de ondas circular de ondas rápidas

Al hacer uso de las expresiones (14.51)—(14.56) que definen el campo del tipo magnético en la guía de ondas, se pueden escribir las relaciones para las componentes del campo de la onda inversa:

$$\dot{H}_{r0} = j\frac{hr_0}{\mu_{mn}} C_4 J'_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi) e^{jhz}, \quad (22.15)$$

$$\dot{H}_{\varphi 0} = -j\frac{hr_0^2}{r\mu_{mn}^2} C_4 m J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \operatorname{sen}(m\varphi) e^{jhz}, \quad (22.16)$$

$$\dot{H}_{z0} = C_4 J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi) e^{jhz}, \quad (22.17)$$

$$\dot{E}_{r0} = j\frac{\omega\mu_a r_0^2}{r\mu_{mn}^2} C_4 m J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \operatorname{sen}(m\varphi) e^{jhz}, \quad (22.18)$$

$$\dot{E}_{\varphi 0} = j\frac{\omega\mu_a r_0}{\mu_{mn}} C_4 J'_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi) e^{jhz}, \quad (22.19)$$

$$\dot{E}_{z0} = 0. \quad (22.20)$$

Al superponer los campos de las ondas directa e inversa y aplicar las condiciones límites para $z = 0$ y $z = l$, así como las relaciones (21.14) análogamente a como esto se hizo en el § 22.1, obtenemos definitivamente

$$C_4 = -C_2, \tag{22.21}$$

$$h = \frac{p\pi}{l}, \quad p = 1, 2, 3 \ldots \tag{22.22}$$

$$\dot{H}_{rr} = -2j \frac{p\pi r_0}{l\mu_{mn}} C_2 J'_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \tag{22.23}$$

$$\dot{H}_{\varphi r} = 2j \frac{p\pi r_0^2}{lr\mu_{mn}^2} C_2 m J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \operatorname{sen}(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \tag{22.24}$$

$$\dot{H}_{zr} = -2jC_2 J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi) \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \tag{22.25}$$

$$\dot{E}_{rr} = 2 \frac{\omega_r \mu_a r_0^2}{r\mu_{mn}^2} C_2 m J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \operatorname{sen}(m\varphi) \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \tag{22.26}$$

$$\dot{E}_{\varphi r} = 2 \frac{\omega_r \mu_a r_0}{\mu_{mn}} C_2 J'_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi) \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \tag{22.27}$$

$$\dot{E}_{zr} = 0. \tag{22.28}$$

Las ondas del tipo magnético se designan por H_{mnp}, donde m y p son los números de variaciones respecto a las coordenadas φ y z, mientras que n es el número de la raíz de la derivada de las funciones de Bessel. La serie para el índice p debe empezar por la unidad, puesto que cuando $p = 0$ todas las componentes del campo desaparecen.

§ 22.3. Determinación de la frecuencia de resonancia y de los tipos fundamentales de ondas en el caso de ondas de los tipos eléctrico y magnético en el resonador creado sobre la base de una guía de ondas circular de ondas rápidas

Al investigar los procesos en una guía de ondas circular se han deducido las relaciones (14.40) y (14.57) para los números de onda longitudinales en el caso de ondas de los tipos eléctrico y magnético. Estas relaciones son válidas también para el resonador de cavidad circular, con la única diferencia de que en vez de la frecuencia de las oscilaciones ω debe tomarse la frecuencia de resonancia de las oscilaciones en el resonador ω_r. Además, hay que tener en cuenta la expresión (22.8) si se trata de ondas del tipo eléctrico y la expresión (22.22) cuando se tiene que ver con las ondas del tipo magnético.

Al tomar en consideración lo expuesto, las expresiones (14.40) y (14.57) se escriben en la forma

$$\frac{p\pi}{l} = \sqrt{\omega_r^2 \mu_a \varepsilon_a - \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}\right)^2},$$

$$\frac{p\pi}{l} = \sqrt{\omega_r^2 \mu_a \varepsilon_a - \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}\right)^2}.$$

A partir de la primera expresión es posible obtener la fórmula para la frecuencia de resonancia del resonador anular en el caso de ondas del tipo eléctrico:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} \sqrt{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}\right)^2} =$$

$$= c \sqrt{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}\right)^2} \quad (p = 0, 1, 2, 3 \ldots). \qquad (22.29)$$

En correspondencia, no es difícil hallar las fórmulas para la frecuencia de resonancia f_r y la longitud de onda λ_r:

$$f_r = \frac{C}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}\right)^2} \qquad (22.30)$$

$$\lambda_r = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}\right)^2}}. \qquad (22.31)$$

En el caso de ondas del tipo magnético son justas las relaciones

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} \sqrt{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}\right)^2} =$$

$$= c \sqrt{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}\right)^2} \quad (p = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (22.32)$$

$$f_r = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}\right)^2}, \qquad (22.33)$$

$$\lambda_r = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}\right)^2}}. \qquad (22.34)$$

El resonador anular, al igual que el rectangular, representa un sistema multiondulatorio para el cual son fundamentales las oscilaciones que poseen una longitud de resonancia máxima de onda. Como se infiere de las relaciones (22.31) y (22.34), para las dimensiones dadas del resonador l y r_0, las ondas fundamentales se engendran siendo mínimos los valores del índice p y de los coeficientes η_{mn} y μ_{mn}. De acuerdo con las tablas 14.1 y 14.2 los valores mínimos de η_{mn} y μ_{mn} son:

$$\eta_{01} = 2{,}405 \text{ y } \mu_{11} = 1{,}84.$$

En el caso de ondas del tipo eléctrico es admisible el valor $p = 0$. A las ondas del tipo magnético les corresponde el valor mínimo $p = 1$. Por consiguiente, para las ondas del tipo eléctrico es fundamental la onda del tipo E_{010} con la frecuencia de resonancia

$$\omega_{r(E_{010})} = c \frac{2{,}405}{r_0}. \qquad (22.35)$$

y para las ondas del tipo magnético, la onda H_{111} cuya frecuencia de resonancia es

$$\omega_{r(H_{111})} = c\sqrt{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{1{,}84}{r_0}\right)^2}. \qquad (22.36)$$

En el caso de ondas del tipo eléctrico cuyo último índice es cero, la frecuencia de resonancia depende tan sólo del dieléctrico que llena el resonador y de su radio.

§ 22.4. Condiciones de existencia en el resonador de ondas del tipo prefijado

Las condiciones de existencia de ondas del tipo prefijado se determinan, en primer lugar, por la posibilidad de su propagación en la guía de ondas sobre cuya base está construido el resonador. Estos problemas se han estudiado en el § 14.4.

Para las ondas del tipo eléctrico la condición de propagación es la desigualdad $\lambda < \lambda_{cr}$, donde λ_{cr} se halla por medio de la relación (14.58). Cuando se trata de ondas del tipo magnético es justa la relación (14.59) para λ_{cr}. En el resonador, la longitud de onda de oscilación es igual a la longitud de onda de resonancia definida por las relaciones (22.31) y (22.34). Respectivamente, las condiciones de propagación se escriben en la forma

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0}\right)^2}} < \frac{2\pi r_0}{\eta_{mn}} \qquad (22.37)$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}\right)^2}} < \frac{2\pi r_0}{\mu_{mn}}. \qquad (22.38)$$

Estas desigualdades siempre se observan para $p \neq 0$. En el caso de ondas del tipo eléctrico, siendo $p = 0$, la desigualdad (22.37) se convierte en igualdad. En estas circunstancias, en el resonador existen oscilaciones correspondientes al caso crítico, o sea, al límite de las condiciones de propagación de ondas del tipo E_{mn} en una guía de ondas circular.

§ 22.5. Cuadros del campo en un resonador anular

Al comparar las expresiones (14.33)—(14.38) para las componentes del campo del tipo eléctrico en una guía de ondas circular con las expresiones (22.9)—(22.14) para las componentes del campo en el resonador y al realizar una comparación análoga de las fórmulas (14.51)—(14.56) y (22.23)—(22.28) para las ondas del tipo magnético, se puede establecer que el carácter de variación del campo a lo largo de las coordenadas r y φ en el resonador es el mismo que en la guía de ondas. Análogamente a los resonadores rectangulares, la necesidad de observar las condiciones límites conduce a que los

campos eléctrico y magnético en el resonador de cavidad se desplazan uno respecto al otro a un cuarto de longitud de onda en comparación con la posición de los campos en la guía de ondas. Por esta razón no es difícil construir el cuadro del campo en el resonador de

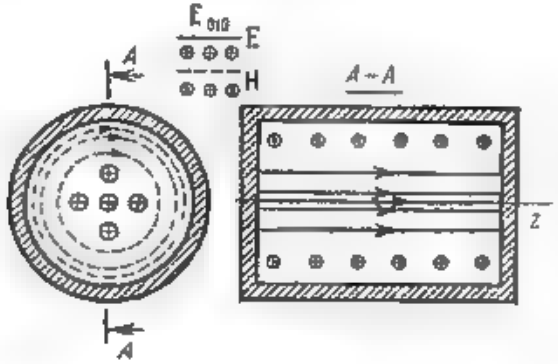

FIG. 22.2

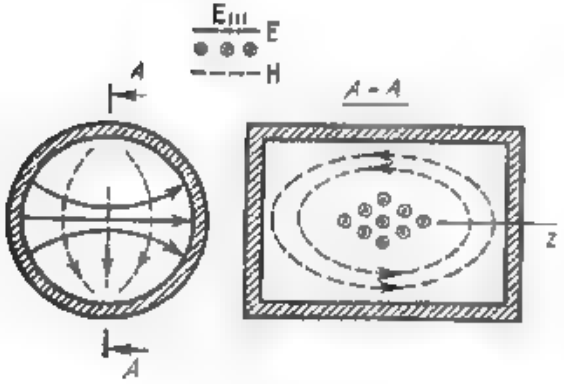

FIG. 22.3

cavidad basándose en el cuadro del campo conocido en la guía de ondas con los índices m y n correspondientes a las ondas en el resonador.

En las figs. 22.2 y 22.3, como ejemplo, se dan los cuadros del campo de las ondas de los tipos fundamentales E_{010} y H_{111}.

CAPÍTULO 23

Resonador de cavidad creado sobre la base de una guía de ondas circular coaxial

§ 23.1. Planteamiento del problema

Habitualmente, cuando se trabaja con guías de ondas coaxiales, se utilizan las ondas del tipo T para las cuales la frecuencia crítica disminuye hasta el valor cero. Los resonadores de cavidad construidos a base de tales guías de ondas también trabajan con las ondas del tipo T. Estos resonadores que se emplean ampliamente en el diapasón de ondas decimétricas y en la región corta del diapasón métrico se analizarán en el presente capítulo.

§ 23.2. Deducción de las expresiones para las componentes del campo en un resonador de cavidad coaxial que trabaja a base de ondas del tipo T

Examinemos el resonador coaxial (fig. 23.1) que representa un segmento de guía de ondas coaxial cortocircuitado mediante una placa metálica en el plano $z = 0$ y abierto a una distancia l del plano cortocircuitador.

FIG 23.1

Supongamos que por el lado abierto de la guía de ondas en ésta se genera un campo electromagnético que se desplaza a la velocidad de la luz en dirección del plano cortocircuitador, es decir, en dirección de los valores negativos del eje z. Al llegar al plano cortocircuitador este campo se refleja y se desplaza en el sentido de los valores positivos del eje z. El campo total del resonador es una superposición de las ondas incidente y reflejada.

En el § 15.2 se han deducido las relaciones (15.4) y (15.9) para las componentes del campo de la onda incidente en la guía de ondas coaxial propagada en dirección de los valores positivos del eje z.

En el caso considerado la onda incidente se propaga en el sentido de los valores negativos del eje z, por eso, en las expresiones (15.4) y (15.9) es necesario cambiar por el opuesto el signo del exponente de la potencia. En este caso las componentes del campo de la onda incidente en el resonador se escriben en la forma

$$\dot{H}_{\varphi\,\mathrm{inc}} = \frac{\dot{I}_0}{2\pi r}\, e^{j\beta z}, \tag{23.1}$$

$$\dot{E}_{r\,\mathrm{inc}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \cdot \frac{\dot{I}_0}{2\pi r} \cdot e^{j\beta z} \tag{23.2}$$

La onda reflejada se propaga en dirección de los valores positivos del eje z debido a lo cual el signo ante el exponente de la potencia se conserva como en las expresiones (15.4) y (15.9). Además, en el plano $z = 0$ deben observarse las condiciones límites junto a la superficie del metal ideal, o sea, la igualdad a cero de las componentes tangenciales del campo eléctrico total. La componente $\dot{E}_{r\,\text{inc}}$ de la onda incidente y la componente análoga $\dot{E}_{r\,\text{refl}}$ de la onda reflejada, sumadas, deben dar cero en el plano $z = 0$, hecho que resulta posible si la componente del campo reflejado se escribe en la forma

$$\dot{E}_{r\,\text{refl}} = -\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \cdot \frac{\dot{I}_0}{2\pi r} e^{-j\beta z}. \qquad (23.3)$$

En este caso el campo eléctrico total del resonador se determina por la relación

$$\dot{E}_{rr} = \dot{E}_{r\,\text{inc}} + \dot{E}_{r\,\text{refl}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \cdot \frac{\dot{I}_0}{2\pi r} (e^{j\beta z} - e^{-j\beta z}). \qquad (23.4)$$

En virtud del carácter justo de la igualdad

$$\frac{e^{j\beta z} - e^{-j\beta z}}{2j} = \operatorname{sen}(\beta z) \qquad (23.5)$$

la fórmula (23.4) puede representarse de otra manera:

$$\dot{E}_{rr} = 2j \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \cdot \frac{\dot{I}_0}{2\pi r} \operatorname{sen}(\beta z). \qquad (23.6)$$

Para $z = 0$, $\dot{E}_{r\,r} = 0$ y las condiciones límites se satisfacen.

Seguidamente, hallemos la expresión para el campo magnético total del resonador

$$\dot{H}_{\varphi r} = \dot{H}_{\varphi\,\text{inc}} + \dot{H}_{\varphi\,\text{refl}}.$$

De acuerdo con las condiciones límites este campo debe existir en el plano $z = 0$, lo que es posible si la componente del campo reflejado se escribe en la forma

$$\dot{H}_{\varphi\,\text{refl}} = \frac{\dot{I}_0}{2\pi r} e^{-j\beta z}. \qquad (23.7)$$

Entonces

$$\dot{H}_{\varphi r} = \frac{\dot{I}_0}{2\pi r} (e^{j\beta z} + e^{-j\beta z}). \qquad (23.8)$$

En virtud de que la igualdad

$$\frac{e^{j\beta z} + e^{-j\beta z}}{2} = \cos(\beta z) \qquad (23.9)$$

es justa, la expresión para el campo magnético total se escribirá de la forma siguiente:

$$\dot{H}_{\varphi r} = 2 \frac{\dot{I}_0}{2\pi r} \cos(\beta z). \qquad (23.10)$$

Esta expresión satisface las condiciones límites en el plano $z = 0$.

Hallemos la diferencia de potencial entre la barra interior y la envoltura exterior en la sección dada z del resonador coaxial:

$$\dot{U} = \int_{r_1}^{r_2} \dot{E}_{rr}\, dr = \int_{r_1}^{r_2} 2j \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \cdot \frac{\dot{I}_0}{2\pi r} \operatorname{sen}(\beta z)\, dr =$$

$$= 2j \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \cdot \frac{\dot{I}_0}{2\pi} \operatorname{sen}(\beta z) \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} =$$

$$= 2j \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \cdot \frac{\dot{I}_0}{2\pi} \operatorname{sen}(\beta z) \ln \frac{r_2}{r_1}. \qquad (23.11)$$

A continuación, determinemos la corriente en la sección dada del resonador. Con este fin hay que aplicar la ley de la corriente total en la forma (1.72) y la oxpresión (23.10) para el campo magnético total del resonador:

$$\dot{I} = \oint_{l_1} \dot{H}_{\varphi r}\, dl = \int_0^{2\pi} 2 \frac{\dot{I}_0}{2\pi r} \cos(\beta z)\, r\, d\varphi =$$

$$= \frac{\dot{I}_0}{\pi r} \cos(\beta z)\, r 2\pi = 2\dot{I}_0 \cos(\beta z). \qquad (23.12)$$

Al dividir $\dot{U}$ por $\dot{I}$, obtenemos la resistencia característica del resonador coaxial:

$$Z_{cr} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = j \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \cdot \frac{\dot{I}_0 \operatorname{sen}(\beta z) \ln \frac{r_2}{r_1}}{\pi 2 \dot{I}_0 \cos(\beta z)},$$

bien

$$Z_{cr} = j \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \ln \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg}(\beta z). \qquad (23.13)$$

Cuando $\operatorname{tg}(\beta z) > 0$, la resistencia característica Z_{cr} tiene carácter inductivo, mientras que para $\operatorname{tg}(\beta z) < 0$ su carácter es capacitivo. Al elegir z de modo que la resistencia característica sea inductiva, se puede determinar la magnitud de la inductancia equivalente L_{eq} que en la frecuencia de resonancia posee la misma resistencia:

$$j\omega_r L_{eq} = j \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \ln \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg}(\beta z),$$

o bien

$$\omega_r L_{eq} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \ln \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg}(\beta z). \qquad (23.14)$$

Si al extremo abierto del resonador se conecta un condensador con una capacidad concentrada C tal como se indica en la fig. 23.2, el sistema representará un circuito oscilatorio paralelo. La frecuencia de las oscilaciones propias de este circuito se determina empleando la relación conocida $\omega_r L_{eq} = 1/(\omega_r C)$. Al sustituir el valor de $\omega_r L_{eq}$ a partir de la fórmula (23 14), obtenemos

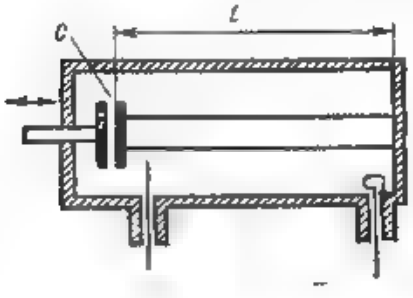

FIG. 23.2

$$\frac{1}{\omega_r C} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \ln \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg} (\beta z),$$

de donde la frecuencia de resonancia es:

$$\omega_r = \frac{1}{C \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \ln \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg} (\beta s)} \tag{23.15}$$

Si es necesario hallar la capacidad C que se requiere para obtener la frecuencia de resonancia prefijada ω_r, la fórmula (23.15) debe escribirse de nuevo de la siguiente manera:

$$C = \frac{1}{\omega_r \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \ln \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg} (\beta s)}. \tag{23.16}$$

Las ventajas del resonador descrito son la sencillez y su carácter cerrado. El campo electromagnético existe dentro de un volu-

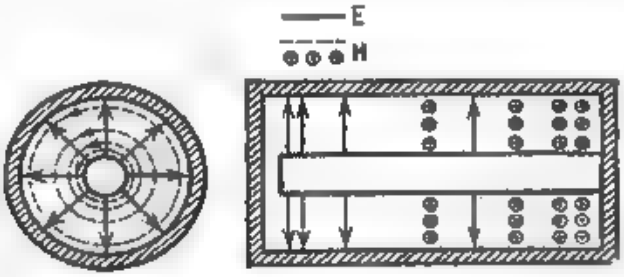

FIG. 23.3

men cerrado. La conexión del resonador con los dispositivos exteriores se efectúa por medio de vástagos o bucles (véase la fig. 23.2). En la fig. 23.3 se muestra el cuadro de los campos eléctrico y magnético en el resonador coaxial.

CAPÍTULO 24

Resonador de cavidad creado sobre la base de una guía de ondas lentas metalo-dieléctrica en forma de H

§ 24.1. Planteamiento del problema

En el § 16.4 se ha descrito una guía de ondas lentas metalo-dieléctrica en forma de H que es una guía de ondas real de ondas lentas creada a base de una placa dieléctrica. En el presente capítulo

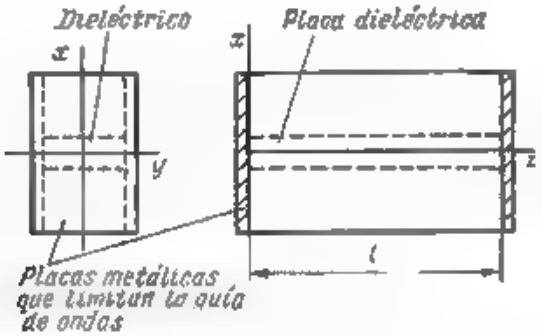

FIG. 24.1

se hablará sobre el empleo de la guía de ondas de este tipo en calidad de resonador de cavidad que trabaja a base de ondas lentas. El esquema del resonador se representa en la fig. 24.1.

§ 24.2. Deducción de las relaciones para las componentes del campo del tipo magnético en una guía de ondas lentas metalo-dieléctrica en forma de H

La guía de ondas examinada funciona a base de ondas del tipo magnético con las componentes del campo $\dot{H}_x$, $\dot{E}_y$, $\dot{H}_z$. Los ejes de coordenadas están dispuestos como se muestra en la fig. 16.4. En el § 16.2 se han obtenido las fórmulas (16.5)—(16.7) para las componentes del campo en el seno de la placa y las (16.17)—(16.19) para las componentes del campo fuera de ésta (en el aire) en el caso de ondas del tipo eléctrico.

No es difícil determinar las componentes del campo del tipo magnético empleando el principio de dualidad permutativa y realizando

en las fórmulas enumeradas las conversiones del tipo

$$\dot{E} \rightleftarrows \dot{H}, \quad \varepsilon_a \to -\mu_a, \quad \varepsilon_0 \to -\mu_0.$$

En este caso aparecen las siguientes relaciones para las componentes del campo de las ondas del tipo magnético en la guía de ondas metalo-dieléctrica en forma de H:

a) para el campo en el seno de la placa

$$\dot{H}_x = -j\frac{h}{g^2}\{-gA_1 \operatorname{sen}(gx) + gA_2 \cos(gx)\}\, e^{-jhz}, \tag{24.1}$$

$$\dot{E}_y = j\frac{\omega\mu_a}{g^2}\{-gA_1 \operatorname{sen}(gx) + gA_2 \cos(gx)\}\, e^{-jhz}, \tag{24.2}$$

$$\dot{H}_z = \{A_1 \cos(gx) + A_2 \operatorname{sen}(gx)\}\, e^{-jhz}, \tag{24.3}$$

b) para el campo fuera de la placa

$$\dot{H}_{x\ \text{aire}} = -j\frac{h}{p} B_1 e^{-px} e^{-jhz}, \tag{24.4}$$

$$\dot{E}_{y\ \text{aire}} = j\frac{\omega\mu_a}{p} B_1 e^{-px} e^{-jhz}, \tag{24.5}$$

$$\dot{H}_{z\ \text{aire}} = B_1 e^{-px} e^{-jhz}. \tag{24.6}$$

De la misma manera que para las ondas del tipo eléctrico se pueden analizar por separado ondas pares e impares. En el primer caso se considera $A_1 = 0$ y en el segundo $A_2 = 0$. Ambos casos se examinan de forma análoga.

Estudiemos a título de ejemplo ondas pares para las cuales las componentes del campo dentro de la placa se escriben en forma de las relaciones

$$\dot{H}_x = -j\frac{h}{g} A_2 \cos(gx)\, e^{-jhz}, \tag{24.7}$$

$$\dot{E}_y = j\frac{\omega\mu_a}{g} A_2 \cos(gx)\, e^{-jhz}, \tag{24.8}$$

$$\dot{H}_z = A_2 \operatorname{sen}(gx)\, e^{-jhz}. \tag{24.9}$$

§ 24.3. Determinación de las componentes del campo en el resonador de cavidad creado sobre la base de una guía de ondas metalo-dieléctrica en forma de H en el caso de ondas pares del tipo magnético

Las relaciones (24.4)—(24.6) y (24.7)—(24.9) corresponden a la onda incidente que se propaga en la guía de ondas en dirección de los valores positivos del eje z. En el resonador, además de la onda incidente, existe una onda reflejada. Las componentes del campo de la onda reflejada pueden hallarse a partir de las relaciones mencionadas, sustituyendo los coeficientes de amplitud: A_2 por A_3 y B_1 por B_2. Además, hay que cambiar por el opuesto el signo delante de

la constante de propagacion h. Como resultado se obtienen las siguientes fórmulas para las componentes del campo de la onda inversa dentro y fuera de la placa:

a) para el campo en el seno de la placa

$$\dot{H}_{x0} = j \frac{h}{g} A_3 \cos(gx)\, e^{jhz}, \tag{24.10}$$

$$\dot{E}_{y0} = -j \frac{\omega\mu_a}{g} A_3 \cos(gx)\, e^{jhz}, \tag{24.11}$$

$$\dot{H}_{z0} = A_3 \operatorname{sen}(gx)\, e^{jhz}; \tag{24.12}$$

b) para el campo fuera de la placa

$$\dot{H}_{x\,aire\,0} = j \frac{h}{p} B_2 e^{-px} e^{jhz}, \tag{24.13}$$

$$\dot{E}_{y\,aire\,0} = j \frac{\omega\mu_0}{p} B_2 e^{-px} e^{jhz}, \tag{24.14}$$

$$\dot{H}_{z\,aire\,0} = B_2 e^{-px} e^{jhz}. \tag{24.15}$$

El campo en el resonador $\dot{\mathbf{E}}_r$ y $\dot{\mathbf{H}}_r$ es la superposición de los campos de las ondas directa e inversa:

$$\dot{H}_{xr} = \dot{H}_x + \dot{H}_{x0}, \quad \dot{E}_{yr} = \dot{E}_y + \dot{E}_{y0}, \quad \dot{H}_{zr} = \dot{H}_z + \dot{H}_{z0},$$

$$\dot{H}_{x\,aire\,r} = \dot{H}_{x\,aire} + \dot{H}_{x\,aire\,0}, \quad \dot{E}_{y\,aire\,r} = \dot{E}_{y\,aire} + \dot{E}_{y\,aire\,0},$$

$$\dot{H}_{z\,aire\,r} = \dot{H}_{z\,aire} + \dot{H}_{z\,aire\,0},$$

por eso se puede escribir

$$\dot{H}_{xr} = j \frac{h}{g} \cos(gx)\,(A_3 e^{jhz} - A_2 e^{-jhz}), \tag{24.16}$$

$$\dot{E}_{yr} = -j \frac{\omega\mu_a}{g} \cos(gx)\,(A_3 e^{jhz} + A_2 e^{-jhz}), \tag{24.17}$$

$$\dot{H}_{zr} = \operatorname{sen}(gx)\,(A_3 e^{jhz} + A_2 e^{-jhz}), \tag{24.18}$$

$$\dot{H}_{x\,aire\,r} = j \frac{h}{p} e^{-px}\,(B_2 e^{jhz} - B_1 e^{-jhz}), \tag{24.19}$$

$$\dot{E}_{y\,aire\,r} = -j \frac{\omega\mu_0}{p} e^{-px}\,(B_2 e^{jhz} + B_1 e^{-jhz}), \tag{24.20}$$

$$\dot{H}_{z\,aire\,r} = e^{-px}\,(B_2 e^{jhz} + B_1 e^{-jhz}). \tag{24.21}$$

Para determinar las correlaciones entre los coeficientes A_3, A_2 y B_2, B_1, así como entre la constante h y las componentes tangenciales del campo es conveniente aplicar las condiciones límites para $z = 0$ y $z = l$, donde, como se ilustra en la fig. 24.1, se ubican las placas metálicas ideales que acotan la guía de ondas.

Las condiciones límites se reducen a las relaciones:

$$\dot{E}_\tau = \dot{E}_{yr} = 0 \qquad (\text{para } z = 0,\ z = l), \tag{24.22}$$

$$\dot{H}_\tau = \dot{H}_{xr} = v_{el} \qquad (\text{para } z = 0,\ z = l), \tag{24.23}$$

$$\dot{E}_{\tau\,\text{aire}} = \dot{E}_{y\,\text{aire}\,r} = 0 \qquad (\text{para } z = 0,\ z = l), \tag{24.24}$$

$$\dot{H}_{\tau\,\text{aire}} = \dot{H}_{x\,\text{aire}\,r} = v_{el} \qquad (\text{para } z = 0,\ z = l). \tag{24.25}$$

Haciendo uso de las relaciones (24.17) y (24.20) para $z = 0$, obtenemos

$$A_3 + A_4 = 0, \quad B_3 + B_4 = 0,$$

de donde

$$A_3 = -A_4, \tag{24.26}$$

$$B_3 = -B_4. \tag{24.27}$$

Valiéndose de las expresiones (24.26), (24.27), así como de las (21.14) y (21.15), las fórmulas (24.16)—(24.21) pueden escribirse en la siguiente forma:

$$\dot{H}_{xr} = -2j\frac{h}{g} A_3 \cos(gx) \cos(hz), \tag{24.28}$$

$$\dot{E}_{yr} = 2\frac{\omega_r \mu_a}{g} A_3 \cos(gx) \operatorname{sen}(hz), \tag{24.29}$$

$$\dot{H}_{zr} = -2jA_3 \operatorname{sen}(gx) \operatorname{sen}(hz), \tag{24.30}$$

$$\dot{H}_{x\,\text{aire}\,r} = -2j\frac{h}{p} e^{-px} B_1 \cos(hz), \tag{24.31}$$

$$\dot{E}_{y\,\text{aire}\,r} = 2\frac{\omega_r \mu_0}{p} e^{-px} B_1 \operatorname{sen}(hz), \tag{24.32}$$

$$\dot{H}_{z\,\text{aire}\,r} = -2jB_1 e^{-px} \operatorname{sen}(hz). \tag{24.33}$$

El número de onda longitudinal h se halla mediante las condiciones límites para $z = l$:

$$\operatorname{sen}(hl) = 0, \quad hl = k\pi,$$

de donde

$$h = \frac{k\pi}{l} \quad (k = 1, 2, 3 \ldots). \tag{24.34}$$

La serie de números enteros k no puede comenzar por cero, puesto que cuando $k = 0$ todas las componentes del campo en el resonador desaparecen.

§ 24.4. Determinación de los números de onda transversales g, p y de la frecuencia de resonancia de un resonador metalo-dieléctrico en forma de H

Para determinar los números de onda transversales g y p, como asimismo la frecuencia de resonancia ω_r se puede recurrir a la metodología aplicada en la investigación de los procesos en la placa dieléctrica utilizada como guía de ondas rápidas (véanse los §§ 16.3 y 16.4). De acuerdo con esta metodología se hace uso de las condiciones límites:

$$\dot{E}_{yr} = \dot{E}_{y\,\text{aire}}, \quad \dot{H}_{zr} = \dot{H}_{z\,\text{aire}} \quad (\text{para } x = d) \tag{24.35}$$

($2d$ es el espesor de la placa en dirección del eje x).

Basándose en estas condiciones límites, obtenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{\mu_a}{g} A_g \cos(gd) = \frac{\mu_0}{p} e^{-pd} B_1, \tag{24.36}$$

$$A_g \operatorname{sen}(gd) = H_1 e^{-pd}. \tag{24.37}$$

La división de la expresión (24.37) por (24.36) proporciona la ecuación transcendente

$$\frac{g}{\mu_a} \operatorname{tg}(gd) = \frac{p}{\mu_0},$$

que puede escribirse en la forma

$$\frac{\mu_0}{\mu_a} gd \operatorname{tg}(gd) = pd. \tag{24.38}$$

Para determinar la segunda ecuación que relaciona los números de onda g y p se utilizan las fórmulas (12.26) y (16.28) para el número de onda longitudinal h. En el resonador de cavidad la frecuencia ω interviene como frecuencia de resonancia ω_r, y las fórmulas para h se escriben en la forma

$$h = \sqrt{\omega_r^2 \mu_a \varepsilon_a - g^2}, \tag{24.39}$$

$$h = \sqrt{\omega_r^2 \mu_0 \varepsilon_0 + p^2}. \tag{24.40}$$

Al sustituir en estas expresiones el valor de h a partir de (24.34) y elevar al cuadrado, obtenemos

$$\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 = \omega_r^2 \mu_a \varepsilon_a - g^2,$$

$$\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 = \omega_r^2 \mu_0 \varepsilon_0 + p^2,$$

de donde

$$\omega_r^2 = \frac{1}{\mu_a \varepsilon_a}\left\{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + g^2\right\}, \tag{24.41}$$

$$\omega_r^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\left\{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - p^2\right\}. \tag{24.42}$$

Igualemos los segundos miembros, realizando transformaciones simples:

$$\left(\frac{\pi k\pi}{l}\right)^2\left(\frac{\mu_a\varepsilon_a}{\mu_0\varepsilon_0}-1\right)=g^2+\frac{\mu_a\varepsilon_a}{\mu_0\varepsilon_0}p^2. \qquad (24.43)$$

Multiplicando todos los términos por d^2 y teniendo en cuenta las relaciones (1.20) y (1.81), la expresión (24.43) puede escribirse de nuevo en la forma

$$\left(\frac{dk\pi}{l}\right)^2(\mu_r\varepsilon_r-1)=(gd)^2+(\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\,pd)^2. \qquad (24.44)$$

Multipliquemos los dos miembros de la expresión (24.38) por $\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}}\,gd\,\mathrm{tg}\,(gd)=\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\,pd. \qquad (24.45)$$

Las ecuaciones (24.44) y (24.45) representan un sistema para determinar los números de onda transversales p y g. Estas ecuaciones pueden resolverse empleando ordenadores o gráficamente. Examinemos este último procedimiento. En el sistema de coordenadas rectangulares gd, $\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\,pd$ se construye el gráfico definido por la relación (24.45). La ecuación (24.44) es la ecuación de circunferencia en estas coordenadas. Si el número k está prefijado y los parámetros del sistema d, l, μ_r y ε_r se conocen, el radio de la circunferencia es:

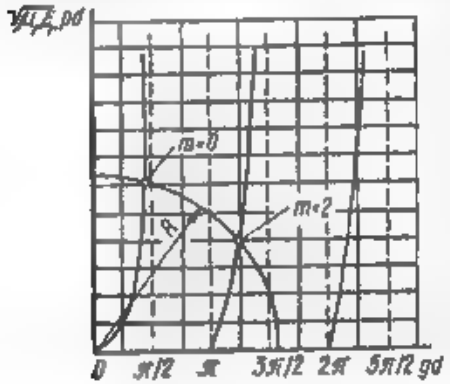

FIG. 24.2

$$R=\frac{dk\pi}{l}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r-1}. \qquad (24.46)$$

La construcción de esta circunferencia se representa en la fig. 24.2. Los puntos de intersección de los gráficos dan los valores de gd y de $\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\,pd$. Como quiera que el valor de $\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$ y el semiespesor de la placa d son valores conocidos, ello significa que los números de onda transversales g y p se han determinado y que, valiéndose de una de las relaciones (24.41) o (24.42), se puede hallar la frecuencia de resonancia ω_r. De este modo pueden encontrarse todos los parámetros del resonador de cavidad metalo-dieléctrico en forma de H.

El tipo de onda en el resonador de esta clase se designa por H_{mnk}. A la primera raíz de la onda par se le atribuye el índice $m=0$, y a la segunda, $m=2$. Puesto que el campo no varía a lo largo del eje y, el segundo índice es igual a cero y el tercero corresponde al número de la serie k en la expresión (24.34). Las ondas impares en semejantes resonadores se estudian de manera análoga.

CAPÍTULO 25

Factor de mérito de los resonadores de cavidad

§ 25.1. Planteamiento del problema

En los capítulos anteriores, al analizar los procesos que se desarrollan en los resonadores de cavidad, se ha hecho la suposición que el dieléctrico que llena el volumen del resonador es ideal y que el metal utilizado en el resonador posee una conductibilidad infinita. En los casos en que el resonador está lleno de aire la suposición acerca del carácter ideal del dieléctrico es próxima a la verdad. Cuando se crean resonadores de cavidad a base de guías de ondas dieléctricas de ondas lentas es indispensable tomar en consideración las pérdidas en los dieléctricos reales. Si en los resonadores no se usan materiales superconductores y la técnica criógena, es necesario tener en cuenta la conductibilidad finita de las paredes metálicas del resonador.

De este modo, en las condiciones reales el resonador de cavidad presenta pérdidas. En los sistemas oscilatorios las pérdidas se evalúan por medio del factor de mérito (llamado también factor de calidad). Este concepto puede también servir con éxito para apreciar las pérdidas en los resonadores de cavidad reales.

§ 25.2. Deducción de la expresión general para el factor de mérito de los resonadores de cavidad

De acuerdo con la definición se denomina factor de mérito Q la relación—multiplicada por 2π—de la energía W acumulada en el sistema oscilatorio a la energía $W_{pér}$ que se pierde en este sistema durante un período de oscilación:

$$Q = 2\pi \frac{W}{W_{pér}}. \tag{25.1}$$

La energía de las pérdidas puede expresarse como el producto de la potencia de las pérdidas $P_{p\Sigma}$ que se entiende como la potencia total de las pérdidas en el dieléctrico y el metal del resonador de cavidad por el tiempo, es decir, por el período de oscilación T_r correspondiente a la resonancia:

$$W_{pér} = P_{p\Sigma}\, T_r. \tag{25.2}$$

El período de oscilación T_r está ligado a la frecuencia de oscilación f_r por la relación conocida $T_r = 1/f_r$, en virtud de lo cual $W_{pér} = P_{p\Sigma}/f_r$. En este caso

$$Q = 2\pi f_r \frac{W}{P_{p\Sigma}}. \tag{25.3}$$

La expresión (25.3) es fundamental para evaluar el factor de mérito de cualquier sistema oscilatorio.

En el § 4.1 se ha deducido la siguiente relación para la energía total del campo electromagnético encerrado en el volumen V_1:

$$W = \int_{V_1} \left(\frac{\mu_a H^2}{2} + \frac{\varepsilon_a E^2}{2} \right) dV,$$

donde H y E son los valores instantáneos de los campos magnético y eléctrico en el volumen V_1.

De este modo, la energía total del campo representa la suma de los valores instantáneos de las energías de los campos magnético y eléctrico. En el sistema oscilatorio se opera una transformación ininterrumpida de la energía eléctrica en magnética, y viceversa. Al valor máximo del campo magnético le corresponde el valor cero del campo eléctrico, y viceversa. Por esta razón, en lugar de la suma de los valores instantáneos de las energías magnética y eléctrica en la última expresión puede tomarse el valor máximo ya sea de la energía magnética, o bien, de la eléctrica:

$$W = \int_{V_1} \frac{\mu_a H_m^2}{2} dV = \int_{V_1} \frac{\varepsilon_a E_m^2}{2} dV, \qquad (25.4)$$

donde H_m y E_m son los valores máximos de los campos magnético y eléctrico.

Los valores instantáneos de los campos magnético y eléctrico pueden presentarse en la forma

$$H = H_m \cos(\omega t + \varphi_H),$$

$$E = E_m \cos(\omega t + \varphi_E).$$

Aquí φ_H y φ_E son las iniciales de los campos magnético y eléctrico.

En el § 1.10 se ha introducido el concepto de amplitudes complejas de las funciones que forman parte de las ecuaciones de electrodinámica. De acuerdo con ello las amplitudes complejas de los campos $\dot{H}$ y $\dot{E}$ se escriben de la siguiente manera:

$$\dot{H} = H_m e^{j\varphi_H}, \quad \dot{E} = E_m e^{j\varphi_E}.$$

Como se infiere de estas expresiones, los módulos de las amplitudes complejas de los vectores del campo $|\dot{\mathbf{H}}| = \dot{H}_m$ y $|\dot{\mathbf{E}}| = E_m$ coinciden con los valores máximos de los campos H_m y E_m.

Expresemos la energía del campo en la fórmula (25.4) por medio de las amplitudes complejas $\dot{H}$ o $\dot{E}$:

$$W = \int_{V_1} \frac{\mu_a |\dot{\mathbf{H}}|^2}{2} dV = \int_{V_1} \frac{\varepsilon_a |\dot{\mathbf{E}}|^2}{2} dV. \qquad (25.5)$$

Si el volumen del resonador está lleno de un dieléctrico que, en el caso general, posee una conductibilidad eléctrica γ_{e1} y una permeancia γ_m, entonces, la potencia de las pérdidas, promediada por el período de oscilación que surge a costa de esta conductibilidad y permeancia, puede hallarse a partir del teorema de Poynting para las amplitudes complejas [véase la relación (4.25)].

Las integrales

$$\int\limits_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_{e1} |\dot{E}|^2 dV \quad \text{y} \quad \int\limits_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_m |\dot{H}|^2 dV$$

representan, respectivamente, las potencias de las pérdidas eléctricas y magnéticas promediadas por el período de oscilación. La expresión para la potencia de las pérdidas en un metal real fue hallada en el § 9.7:

$$P_{pér} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{a2}\omega}{2\gamma_{e1a}}} \int\limits_{S_1} |\dot{H}_\tau|^2 dS.$$

Para un resonador de cavidad en esta expresión la integral debe tomarse por el área de todas las superficies metálicas que acotan el campo en el resonador, poniendo como frecuencia la frecuencia de resonancia ω_r.

De este modo, la potencia total de las pérdidas se suma, en el caso general, de las pérdidas en las superficies metálicas del resonador, así como de las pérdidas eléctricas y magnéticas en el dieléctrico del resonador, es decir, se puede escribir

$$P_{pΣ} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{a2}\omega_r}{2\gamma_{e1a}}} \oint\limits_{S_1} |\dot{H}_\tau|^2 dS + \\ + \int\limits_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_{e1} |\dot{E}|^2 dV + \int\limits_{V_1} \frac{1}{2} \gamma_m |\dot{H}|^2 dV. \qquad (25.6)$$

Al sustituir las relaciones (25.5) y (25.6) en la fórmula (25.3), obtenemos la siguiente expresión para el factor de mérito del resonador de cavidad escrita en forma general:

$$Q = \frac{\omega_r \frac{1}{2} \int\limits_{V_1} \mu_a |\dot{H}|^2 dV}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{a2}\omega_r}{2\gamma_{e1a}}} \oint\limits_{S_1} |\dot{H}_\tau|^2 dS + \frac{1}{2} \int\limits_{V_1} \gamma_{e1} |\dot{E}|^2 dV + \frac{1}{2} \int\limits_{V_1} \gamma_m |\dot{H}|^2 dV},$$

o, definitivamente,

$$Q = \frac{\sqrt{\omega_r} \mu_a \int\limits_{V_1} |\dot{H}|^2 dV}{\sqrt{\frac{\mu_{a2}}{2\gamma_{e1a}}} \oint\limits_{S_1} |\dot{H}_\tau|^2 dS + \left(\gamma_{e1} \int\limits_{V_1} |\dot{E}|^2 dV + \gamma_m \int\limits_{V_1} |\dot{H}|^2 dV \right) \frac{1}{\sqrt{\omega_r}}}. \qquad (25.7)$$

En los casos en que es el aire el que sirve de dieléctrico que llena el volumen del resonador, las pérdidas en el aire pueden despreciarse, representando el factor de mérito en forma simplificada

$$Q = \frac{\sqrt{\omega_r \mu_a} \int_{V_i} |\dot{H}|^2 dV}{\sqrt{\frac{\mu_{as}}{2\gamma_{als}}} \oint_{S_i} |\dot{H}_\tau|^2 dS}. \qquad (25.8)$$

Los cálculos de los factores Q (factores de mérito) de los resonadores de cavidad están realizados en el Apéndice III. Cabe señalar que los factores de mérito de los resonadores de cavidad son esencialmente mayores que los correspondientes factores de los circuitos oscilatorios y si se emplean materiales superconductores y una técnica criógena pueden alcanzar valores del orden de centenares de miles.

CAPÍTULO 26

Parámetros equivalentes de los resonadores de cavidad

§ 26.1. Planteamiento del problema

Como se ha indicado reiteradas veces en los capítulos anteriores, los resonadores de cavidad son sistemas multiondulatorios. Si el tipo de onda está fijado, es decir, se han elegido índices determinados m, n, p o k, entonces, para las dimensiones y estructura dadas el resonador poseerá una frecuencia de resonancia y factor de calidad determinados. Semejante resonador puede representarse en forma de circuito oscilatorio paralelo con parámetros equivalentes L_{eq}, C_{eq} y r_{eq} (fig. 26.1). El presente capítulo está dedicado a la determinación de estos parámetros equivalentes.

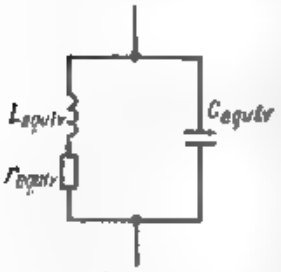

FIG. 26.1

§ 26.2. Determinación de los parámetros equivalentes de los resonadores de cavidad

Al determinar los parámetros equivalentes de los resonadores de cavidad se presupone que se ha llevado a cabo el cálculo electrodinámico del resonador y hallado el campo para el tipo concreto de

ondas en aquél, como asimismo se han determinado la frecuencia de resonancia y el factor de mérito del resonador. Sobre la base de estos datos se requiere establecer los parámetros del circuito oscilatorio equivalente. La frecuencia de resonancia del circuito oscilatorio se determina por la relación:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_{eq} C_{eq}}}. \tag{26.1}$$

Si se conoce el valor de ω_r es suficiente determinar ya sea L_{eq}, o bien C_{eq}, y entonces el parámetro restante se puede hallar a partir de la fórmula (26.1).

Expliquemos el método para determinar la capacidad C_{eq}. Para la energía del campo eléctrico W_{el} acumulada en el condensador existe la expresión conocida

$$W_{el} = \frac{C_{eq} |\dot{U}|^2}{2}, \tag{26.2}$$

donde $|\dot{U}|$ es el módulo de la amplitud compleja de la diferencia de potencial en las armaduras del condensador.

El módulo de la carga del condensador está ligado al módulo de la diferencia de potencial por medio de la relación

$$|\dot{Q}_{el}| = C_{eq} |\dot{U}|. \tag{26.3}$$

Al sustituir $|\dot{U}|$ de esta fórmula en la expresión (26.2) no es difícil hallar la capacidad C_{eq}:

$$C_{eq} = \frac{|\dot{Q}_{el}|^2}{2W_{el}}. \tag{26.4}$$

Después de realizar el cálculo electrodinámico del resonador, la energía del campo eléctrico acumulada en éste puede determinarse empleando la fórmula (25.5):

$$W_{el} = \int_{V_1} \frac{\varepsilon_a |\dot{E}|^2}{2} dV.$$

De este modo, la determinación de la capacidad C_{eq} se reduce a hallar la carga $\dot{Q}_{el}$. Para hacerlo más patente analicemos un ejemplo sencillo. Examinemos la onda del tipo H_{101} en un resonador rectangular a la cual corresponde el siguiente grupo de índices: m, n, p: $m = 1$, $n = 0$, $p = 1$.

Valiéndonos de las relaciones (21.29)—(21.34), hallemos las componentes del campo en el resonador:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{H}_{xr} &= j2\frac{\pi}{l g_{10}^2} C_2 \frac{\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{l}z\right),\\
\dot{H}_{zr} &= -j2C_2 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l}z\right),\\
\dot{E}_{yr} &= -2\frac{\omega_r\mu_a}{g_{10}^2} C_2 \frac{\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l}z\right),\\
\dot{H}_{yr} &= \dot{E}_{xr} = \dot{E}_{zr} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (26.5)$$

La única componente del campo eléctrico $\dot{E}_{yr}$ engendra cargas en las paredes inferior y superior del resonador. Estas cargas pueden determinarse empleando el teorema de Gauss que, en el caso considerado, se escribe de la siguiente manera:

$$\dot{Q}_{el} = \varepsilon_a \int_0^l \int_0^a \dot{E}_{yr}\, dx\, dz =$$

$$= -\varepsilon_a 2\frac{\omega\mu_a}{g_{10}^2} C_2 \frac{\pi}{a} \int_0^l \int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l}z\right) dx\, dz,$$

$$Q_{el} = -\varepsilon_a 8\frac{\omega_r\mu_a}{g_{10}^2} C_2 \frac{l}{\pi},$$

$$|\dot{Q}_{el}| = \varepsilon_a 8\frac{\omega_r\mu_a}{g_{10}^2} C_2 \frac{l}{\pi}. \qquad (26.6)$$

Al sustituir este valor de la carga $|\dot{Q}_{el}|$ y el valor de la energía W_{el} (25.5) en la fórmula (26.4), se puede hallar la capacidad equivalente C_{eq}.

Si se conocen ω_r y C_{eq}, a partir de la expresión (26.1) se obtiene la inductancia equivalente L_{eq}. El cálculo electrodinámico del resonador permite determinar su factor de mérito, o sea, el factor Q. En el circuito oscilatorio el factor Q se determina mediante la fórmula

$$Q = \frac{1}{\omega_r C_{eq} R_{eq}}, \qquad (26.7)$$

a partir de la cual se puede hallar la resistencia activa del circuito oscilatorio equivalente

$$R_{eq} = \frac{1}{\omega_r C_{eq} Q}. \qquad (26.8)$$

La resistencia de resonancia de tal circuito se halla por medio de la relación conocida

$$Z_r = \frac{Q}{\omega_r C_{eq}}. \qquad (26.9)$$

De este modo, todos los parámetros del circuito oscilatorio equivalente vienen determinados por medio de los parámetros del resonador de cavidad conocidos como resultado del cálculo electrodinámico.

Vale recordar otra vez que la sustitución del resonador de cavidad por un circuito oscilatorio equivalente es posible tan sólo para el tipo de ondas concreto en el resonador de cavidad y en la zona de frecuencias cercana a la frecuencia de resonancia.

CAPÍTULO 27

Potenciales del campo

§ 27.1. Planteamiento del problema

En los capítulos anteriores se ha investigado la propagación de ondas electromagnéticas en diferentes medios y sistemas de guiaondas. En esta investigación se ha hecho uso de las ecuaciones electrodinámicas en las cuales faltaban las corrientes extrínsecas, lo que acarrea la imposibilidad de determinar las constantes de amplitud de los campos como funciones de dichas corrientes. Sólo se podía juzgar sobre la variación relativa de la amplitud y de la fase del campo como resultado de su paso a través de tal o cual medio o sistema de guiaondas.

En una serie de casos prácticos es importante saber no sólo el carácter de la variación del campo sino también su valor absoluto como resultado de la excitación del medio o de los sistemas de guiaondas o de resonancia debido a la disposición y valores de las corrientes extrínsecas. En este caso es necesario tomar como base de la investigación las ecuaciones electrodinámicas en las cuales figuran las corrientes extrínsecas eléctricas o magnéticas prefijadas. Semejantes problemas son problemas de análisis del campo que se genera como resultado de acción del sistema dado de corrientes. Además de los problemas de análisis son posibles también problemas de síntesis, bastante complicados, cuando la estructura del campo resulta dada y es necesario determinar el sistema de las corrientes extrínsecas para el cual esta estructura del campo existirá. Los problemas de síntesis pertenecen a los problemas especiales de electrodinámica y en el curso general no se prevé su consideración.

En los problemas de análisis es natural tratar de lograr la máxima simplificación de las ecuaciones electrodinámicas de partida. En el § 6.3 se han determinado las siguientes ecuaciones generales de Helmholtz para los vectores del campo $\dot{\mathbf{H}}$ y $\dot{\mathbf{E}}$ en que entran las

corrientes excitadoras extrínsecas [véanse las ecuaciones (6.21) y (6.22)]:

$$\nabla^2\dot{\mathbf{H}} + \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{H}} = \frac{j}{\omega\mu_a}\,\text{grad div}\,\dot{\mathbf{J}}_m - \text{rot}\,\dot{\mathbf{J}}_{el} + j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{J}}_m,$$

$$\nabla^2\dot{\mathbf{E}} + \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}} = \frac{j}{\omega\varepsilon_a}\,\text{grad div}\,\dot{\mathbf{J}}_{el} + \text{rot}\,\dot{\mathbf{J}}_m + j\omega\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{J}}_{el}.$$

Se ha verificado la solución de estas ecuaciones para los casos en que las corrientes extrínsecas $\dot{\mathbf{J}}_{el}$ y $\dot{\mathbf{J}}_m$ faltaban en la zona dada del espacio. La solución de estas ecuaciones en la forma presentada es sumamente dificultosa debido a que las corrientes extrínsecas figuran en los segundos miembros bajo el signo de operadores diferenciales.

Sería racional introducir en la electrodinámica algunas nuevas funciones vectoriales ligadas por medio de relaciones simples con los vectores del campo $\dot{\mathbf{H}}$, $\dot{\mathbf{E}}$, para las cuales los primeros miembros de las ecuaciones electrodinámicas coincidirían con la bien estudiada ecuación de Helmholtz, mientras que los segundos miembros contendrían las corrientes extrínsecas de una manera directa, sin operadores diferenciales. La solución de las ecuaciones electrodinámicas para estas funciones se simplificaría esencialmente en virtud de la simplificación de los segundos miembros. La determinación de los vectores del campo $\dot{\mathbf{H}}$ y $\dot{\mathbf{E}}$ en el caso de una relación matemática simple con las funciones introducidas no representaría dificultades sustanciales.

La determinación de tales funciones denominadas *potenciales vectoriales* resulta posible, y el presente capítulo está dedicado precisamente, a este tema.

§ 27.2. Ecuaciones iniciales de la electrodinámica para los vectores del campo con la participación de corrientes extrínsecas. Potencial eléctrico vectorial

En el § 2.2 se han definido las siguientes ecuaciones electrodinámicas para los vectores del campo [véanse las ecuaciones (2.12)—(2.15)]:

$$\left.\begin{aligned} &\text{rot}\,\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}}_{el} + j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}},\\ &\text{rot}\,\dot{\mathbf{E}} = -\dot{\mathbf{J}}_m - j\omega\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{H}},\\ &\text{div}\,(\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}}) = \dot{\rho}_{el},\\ &\text{div}\,(\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{H}}) = \dot{\rho}_m. \end{aligned}\right\}$$

Si consideramos que los medios y sistemas, en los cuales los procesos se definen por dichas ecuaciones de partida, son lineales y, por consiguiente, satisfacen el principio de superposición, estas

ecuaciones pueden dividirse en dos grupos, en uno de los cuales actúan corrientes extrínsecas eléctricas, faltando las corrientes extrínsecas magnéticas, mientras que en el otro grupo actúan corrientes extrínsecas magnéticas en ausencia de corrientes extrínsecas eléctricas. El campo total que aparece bajo la acción de las corrientes extrínsecas eléctricas y magnéticas es, en este caso, la superposición de los campos hallados a resultas de la solución independiente de cada uno de los grupos de ecuaciones.

En el primer grupo de ecuaciones se han conservado solamente las corrientes y cargas extrínsecas eléctricas:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} - j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{J}}_{el}, \tag{27.1}$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} + j\omega\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{H}} = 0, \tag{27.2}$$

$$\operatorname{div} (\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}}) = \dot{\rho}_{el}, \tag{27.3}$$

$$\operatorname{div} (\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{H}}) = 0. \tag{27.4}$$

En el segundo grupo de ecuaciones se han conservado tan sólo las corrientes y cargas extrínsecas magnéticas:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} - j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}} = 0, \tag{27.5}$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} + j\omega\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{H}} = -\dot{\mathbf{J}}_m, \tag{27.6}$$

$$\operatorname{div} (\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}}) = 0, \tag{27.7}$$

$$\operatorname{div} (\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{H}}) = \dot{\rho}_m. \tag{27.8}$$

No es difícil advertir que el paso del primer grupo de ecuaciones al segundo, y viceversa, puede realizarse mediante las permutaciones del tipo:

$$\dot{\mathbf{H}} \rightleftarrows \dot{\mathbf{E}}, \quad \tilde{\varepsilon}_a \rightleftarrows -\tilde{\mu}_a, \quad \dot{\mathbf{J}}_{el} \rightleftarrows -\dot{\mathbf{J}}_m, \quad \dot{\rho}_{el} \rightleftarrows -\dot{\rho}_m. \tag{27.9}$$

Busquemos la solución del primer grupo de ecuaciones en la forma general, sin pasar a un problema electrodinámico concreto.

En el primer grupo la ecuación más simple es la (27.4). En virtud del carácter justo de la identidad vectorial (véase el Apéndice I) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv 0$, la solución de la ecuación (27.4) puede representarse en la forma

$$\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{H}} = \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_{el}, \tag{27.10}$$

de donde

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_{el}. \tag{27.11}$$

La función vectorial $\dot{\mathbf{A}}_{el}$ se llama *potencial eléctrico vectorial*.

La solución de una de las ecuaciones se ha obtenido. Es necesario determinar cuáles son las condiciones en que esta solución satisface

las demás ecuaciones. Al sustituir la solución (27.10) en la ecuación (27.2), hallamos

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} + j\omega \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_{e1} = 0,$$

o bien

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} + \operatorname{rot} (j\omega \dot{\mathbf{A}}_{e1}) = 0.$$

La suma de rotores de las funciones de la misma manera que la suma de derivadas es igual al rotor de la suma de las funciones:

$$\operatorname{rot} (\dot{\mathbf{E}} + j\omega \dot{\mathbf{A}}_{e1}) = 0. \tag{27.12}$$

En el Apéndice I se analiza la identidad vectorial rot grad $U = 0$, donde U es cualquier función escalar diferenciable. Supongamos que

$$\dot{\mathbf{E}} + j\omega \dot{\mathbf{A}}_{e1} = -\operatorname{grad} \dot{U}_{e1}, \tag{27.13}$$

de donde

$$\dot{\mathbf{E}} = -\operatorname{grad} \dot{U}_{e1} - j\omega \dot{\mathbf{A}}_{e1}. \tag{27.14}$$

La función escalar $\dot{U}_{e1}$ lleva el nombre de *potencial eléctrico escalar*.

Seguidamente, multipliquemos todos los términos de la ecuación (27.1) por $\tilde{\mu}_a$:

$$\tilde{\mu}_a \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} - j\omega \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}} = \mu_a \dot{\mathbf{J}}_{e1}.$$

Debido a que en este capítulo se examinan los procesos en los medios lineales homogéneos en que los parámetros $\tilde{\mu}_a$, $\tilde{\varepsilon}_a$ son magnitudes constantes independientes de las coordenadas, se puede poner $\tilde{\mu}_a$ bajo el signo del rotor, presentando la ecuación en la forma

$$\operatorname{rot} (\tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}) - j\omega \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}} = \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{J}}_{e1}. \tag{27.15}$$

Al sustituir en esta ecuación los valores de $\tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}}$ de la fórmula (27.10) y $\dot{\mathbf{E}}$ de la fórmula (27.14), obtenemos

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_{e1} + j\omega \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \operatorname{grad} \dot{U}_{e1} + j\omega \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a j\omega \dot{\mathbf{A}}_{e1} = \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{J}}_{e1}.$$

o bien

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_{e1} + j\omega \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \operatorname{grad} \dot{U}_{e1} - \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{A}}_{e1} = \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{J}}_{e1} \tag{27.16}$$

En el Apéndice I se representa la identidad vectorial rot rot $\mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a}$, donde ∇^2 es el operador de Laplace. Allí mismo se da la expresión para el operador de Laplace en el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales generalizado. Este operador ya se ha utilizado en la deducción de las ecuaciones de Helmholtz para los vectores del campo en el § 6.3 y en la investigación de las ondas planas en el capítulo 7.

Al aplicar la identidad vectorial señalada, la ecuación (27.16) puede escribirse en la forma

$$\text{grad div } \dot{\mathbf{A}}_{el} - \nabla^2 \dot{\mathbf{A}}_{el} + j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a \text{ grad } \dot{U}_{el} - \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{A}}_{el} = \tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{J}}_{el}.$$

El defecto de dicha ecuación consiste en que en ésta figuran dos funciones incógnitas: $\dot{\mathbf{A}}_{el}$ y $\dot{U}_{el}$. Para eliminar una de estas funciones efectuemos ciertas transformaciones. Debido a la homogeneidad del medio introduzcamos los términos $j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a$ bajo el signo del gradiente:

$$\text{grad div } \dot{\mathbf{A}}_{el} - \nabla^2 \dot{\mathbf{A}}_{el} + \text{grad } (j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{U}_{el}) - \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{A}}_{el} = \tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{J}}_{el}.$$

La suma de gradientes de las funciones es igual al gradiente de la suma de funciones. Por eso la ecuación puede escribirse en otra forma:

$$\text{grad } (\text{div } \dot{\mathbf{A}}_{el} + j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{U}_{el}) - \nabla^2\dot{\mathbf{A}}_{el} - \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{A}}_{el} = \tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{J}}_{el}. \quad (27.17)$$

Al introducir en la electrodinámica nuevas funciones es lógico elegirlas de tal manera que las ecuaciones que las contienen sean simples en máximo grado. Si en la ecuación (27.17) la divergencia del potencial eléctrico vectorial $\dot{\mathbf{A}}_{el}$ se elige de modo que se observe la igualdad

$$\text{div } \dot{\mathbf{A}}_{el} = -j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{U}_{el}, \quad (27.18)$$

entonces, de la ecuación desaparece la función $\dot{U}_{el}$, la ecuación se simplifica sustancialmente y toma la forma

$$-\nabla^2\dot{\mathbf{A}}_{el} - \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{A}}_{el} = \tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{J}}_{el},$$

o bien, después de cambiar los signos

$$\nabla^2\dot{\mathbf{A}}_{el} + \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{A}}_{el} = -\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{J}}_{el}. \quad (27.19)$$

La relación (27.18) da la posibilidad de expresar la función $\dot{U}_{el}$ por medio del potencial eléctrico vectorial:

$$\dot{U}_{el} = -\frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a}\text{div } \dot{\mathbf{A}}_{el}. \quad (27.20)$$

Al sustituir el valor de $\dot{U}_{el}$ a partir de la fórmula (27.20) en (27.14), obtenemos la relación que liga el vector del campo eléctrico $\dot{\mathbf{E}}$ con el potencial $\dot{\mathbf{A}}_{el}$:

$$\dot{\mathbf{E}} = \text{grad}\left(\frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a}\text{div } \dot{\mathbf{A}}_{el}\right) - j\omega\dot{\mathbf{A}}_{el} =$$

$$= \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a}\text{grad div } \dot{\mathbf{A}}_{el} - j\omega\dot{\mathbf{A}}_{el}. \quad (27.21)$$

La ligazón entre el vector del campo magnético $\dot{\mathbf{H}}$ y el potencial $\dot{\mathbf{A}}_{e1}$ se expresa mediante la relación (27.11).

De este modo, resultó posible expresar los vectores del campo por medio de una nueva función $\dot{\mathbf{A}}_{e1}$ para la cual se obtuvo la ecuación (27.19) El primer miembro de esta ecuación coincide por su forma matemática con los primeros miembros de las ecuaciones (6.21) y (6.22), es decir, representa la bien estudiada ecuación de Helmholtz. El segundo miembro de la ecuación (27.19) se diferencia ventajosamente de los segundos miembros de las ecuaciones (6.21) y (6.22) por el hecho de que la corriente eléctrica extrínseca J_{e1} entra en este miembro no bajo el signo de operaciones diferenciales, sino directamente. Después de resolver la ecuación (27.19) y buscar la función $\mathbf{A}_{e1}$, los vectores del campo $\dot{\mathbf{H}}$ y $\dot{\mathbf{E}}$ pueden hallarse mediante operaciones diferenciales realizables en principio que se determinan por las fórmulas (27.21) y (27.11). En esencia, la tarea planteada en el § 27.1 se ha cumplido: se han hallado la ecuación (27.19) para la función $\dot{\mathbf{A}}_{e1}$ que es más simple que las ecuaciones (6.21) y (6.22) y las fórmulas simples de paso desde esta función hacia los vectores del campo.

En el sistema de ecuaciones (27.1) — (27.4) no se ha utilizado la ecuación div $(\widetilde{\varepsilon_a}\dot{\mathbf{E}}) = \dot{\rho}_{e1}$. Sustituyamos en esta ecuación el valor de la función $\dot{\mathbf{E}}$ (27.14):

$$-\operatorname{div}(\widetilde{\varepsilon_a}\operatorname{grad}\dot{U}_{e1}) - \operatorname{div}(\widetilde{\varepsilon_a} j\omega\dot{\mathbf{A}}_{e1}) = \dot{\rho}_{e1}.$$

Saquemos $\widetilde{\varepsilon_a}$ fuera del signo de los operadores y dividamos por $\widetilde{\varepsilon_a}$ los dos miembros de esta correlación:

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad}\dot{U}_{e1} - j\omega\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}_{e1} = \dot{\rho}_{e1}/\widetilde{\varepsilon_a}.$$

Coloquemos en esta correlación el valor de div $\dot{\mathbf{A}}_{e1}$ de la (27.18)

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad}\dot{U}_{e1} - j\omega(-j\omega\widetilde{\mu_a}\widetilde{\varepsilon_a}\dot{U}_{e1}) = \dot{\rho}_{e1}/\widetilde{\varepsilon_a}.$$

En el Apéndice I se señala que div grad $\dot{U}_{e1} = \nabla^2\dot{U}_{e1}$. Entonces, la ecuación deducida puede representarse en la forma definitiva:

$$\nabla^2\dot{U}_{e1} + \omega^2\widetilde{\mu_a}\widetilde{\varepsilon_a}\dot{U}_{e1} = -\dot{\rho}_{e1}/\widetilde{\varepsilon_a}. \qquad (27.22)$$

Esta ecuación es la *ecuación escalar de Helmholtz* con el segundo miembro para el potencial eléctrico escalar U_{e1}. Sin embargo, en el caso considerado la función U_{e1} desempeña tan sólo un papel intermedio, episódico. Cuando la excitación del campo se realiza por un sistema de corrientes eléctricas extrínsecas es suficiente introducir

sólo un potencial eléctrico vectorial $\dot{\mathbf{A}}_{e1}$ después de cuya determinación los vectores del campo $\dot{\mathbf{H}}$ y $\dot{\mathbf{E}}$ pueden hallarse unívocamente empleando las fórmulas (27.11) y (27.21).

§ 27.3. Potencial magnético vectorial

La solución del segundo grupo de ecuaciones (27.5)—(27.8) que contiene corrientes magnéticas extrínsecas puede verificarse análogamente a la solución del primer grupo de ecuaciones (27.1)—(27.4) en las que entran corrientes eléctricas extrínsecas. El paso del primer grupo de ecuaciones al segundo puede efectuarse fácilmente empleando permutaciones del tipo (27.9), lo que se puede aprovechar para obtener la solución de las ecuaciones del segundo grupo. En las expresiones finales (27.19), (27.21), (27.11) y (27.22) basta tan sólo llevar a cabo las permutaciones (27.9) añadiéndoles las permutaciones del siguiente tipo:

$$\dot{\mathbf{A}}_{e1} \to \dot{\mathbf{A}}_m, \quad \dot{U}_{e1} \to \dot{U}_m. \tag{27.23}$$

Las funciones $\dot{\mathbf{A}}_m$ y $\dot{U}_m$ llevan, respectivamente, el nombre de *potencial magnético vectorial* y *potencial magnético escalar*. Como resultado de las permutaciones se obtienen las expresiones definitivas:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}}_m + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{A}}_m = -\tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{J}}_m, \tag{27.24}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{j\omega \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_m - j\omega \dot{\mathbf{A}}_m, \tag{27.25}$$

$$\dot{\mathbf{E}} = -\frac{1}{\tilde{\varepsilon}_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_m, \tag{27.26}$$

$$\nabla^2 \dot{U}_m + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{U}_m = -\dot{\rho}_m / \mu_a. \tag{27.27}$$

Si en el caso considerado actúa simultáneamente el sistema de corrientes eléctricas y magnéticas, los campos totales $\dot{\mathbf{H}}_\Sigma$ y $\dot{\mathbf{E}}_\Sigma$ se hallan sumando los campos definidos por medio de las expresiones (27.11), (27.25), así como (27.21) y (27.26). Como resultado, se obtienen las fórmulas:

$$\dot{\mathbf{H}}_\Sigma = \frac{1}{\tilde{\mu}_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_{e1} + \frac{1}{j\omega \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_m - j\omega \dot{\mathbf{A}}_m, \tag{27.28}$$

$$\dot{\mathbf{E}}_\Sigma = \frac{1}{j\omega \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a} \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_{e1} - j\omega \dot{\mathbf{A}}_{e1} - \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_m. \tag{27.29}$$

CAPITULO 28

Solución de las ecuaciones no homogéneas de Helmholtz

28.1. Planteamiento del problema

En el capítulo 27 se han obtenido las ecuaciones de Helmholtz no homogéneas de los tipos (27.19) y (27.24) para los potenciales eléctrico y magnético vectoriales. En el curso general de electrodinámica es imposible analizar la solución de estas ecuaciones en toda su plenitud, tal como se hace en los cursos de ecuaciones de física matemática. Esta es la razón de que la solución de estas ecuaciones se exponga en el volumen necesario sólo para entender el contenido de los capítulos subsiguientes.

§ 28.2. Descomposición de la ecuación vectorial de Helmholtz en ecuaciones escalares. Solución de la ecuación escalar homogénea de Helmholtz en el sistema de coordenadas esféricas

Son iniciales para el análisis las siguientes ecuaciones vectoriales no homogéneas de Helmholtz:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}}_{el} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{A}}_{el} = -\tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{j}}_{el}, \tag{27.19}$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}}_m + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{A}}_m = -\tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{j}}_m. \tag{27.24}$$

Estas ecuaciones son análogas por su forma matemática. Es suficiente estudiar la solución de cualquiera de éstas. La solución de la ecuación restante puede hallarse empleando las permutaciones expuestas anteriormente. Elijamos como objeto de investigación la ecuación (27.19).

Basándose en la identidad vectorial

$$\text{rot rot } \mathbf{a} \equiv \text{grad div } \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a}$$

se puede escribir

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}}_{el} \equiv \text{grad div } \dot{\mathbf{A}}_{el} - \text{rot rot } \dot{\mathbf{A}}_{el}. \tag{28.1}$$

Si esta operación se realiza en el sistema de coordenadas curvilíneas, ortogonales generalizado ξ, η, ζ, sustituyendo el resultado en la ecuación (27.19), se obtiene una ecuación vectorial compleja. Al dividir la ecuación vectorial por el sistema de ecuaciones escalares se puede advertir que el sistema de ecuaciones escalares obtenido reviste un carácter extraordinariamente complicado, lo que viene condicionado por el hecho de que la ecuación correspondiente al

versor 1_ξ contiene no sólo la componente $\dot{A}_{el\xi}$, sino también las componentes $\dot{A}_{el\eta}$ y $\dot{A}_{el\zeta}$. En la ecuación correspondiente al versor 1_η entra no sólo la componente $\dot{A}_{el\eta}$, sino también las componentes $\dot{A}_{el\xi}$ y $\dot{A}_{el\zeta}$. Análogamente, forma parte de la ecuación correspondiente al versor 1_ζ no sólo la componente $\dot{A}_{el\zeta}$, sino también las componentes $\dot{A}_{el\xi}$ y $\dot{A}_{el\eta}$. El sistema de ecuaciones que se forma con las llamadas funciones «no separadas» resulta ser inconmensurablemente más complicado en comparación con el sistema de ecuaciones en que las funciones vienen separadas (en este sistema en la ecuación correspondiente al versor 1_ξ entra una sola componente $\dot{A}_{el\xi}$; en la ecuación que corresponde al versor 1_η, tan sólo la componente $\dot{A}_{el\eta}$, y en la ecuación correspondiente al versor 1_ζ, nada más que la componente $\dot{A}_{el\zeta}$).

La aparición de ecuaciones con funciones «no separadas» está relacionada con el hecho de que los coeficientes de Lamé h_ξ, h_η y h_ζ en el sistema de coordenadas curvilíneas pueden ser funciones de las coordenadas y al cumplir las operaciones previstas por la expresión (28.1) es necesario hacer su diferenciación. Solamente en el sistema de coordenadas cartesianas los tres coeficientes de Lamé h_x, h_y y h_z son iguales a la unidad y sus derivadas respecto a las coordenadas x, y, z son iguales a cero. Tan sólo en el sistema de coordenadas cartesianas es posible la completa separación de funciones en las ecuaciones escalares correspondientes a la ecuación vectorial (27.19) lo que simplifica considerablemente la solución de esta ecuación.

Representemos la ecuación vectorial (27.19) en forma de un sistema de ecuaciones escalares en el sistema de coordenadas cartesianas. Con este objeto introduzcamos las siguientes expresiones:

$$\dot{A}_{el} = 1_x \dot{A}_{el\,x} + 1_y \dot{A}_{el\,y} + 1_z \dot{A}_{el\,z}, \tag{28.2}$$

$$\nabla^2 \dot{A}_{el} = 1_x \nabla^2 \dot{A}_{el\,x} + 1_y \nabla^2 \dot{A}_{el\,y} + 1_z \nabla^2 \dot{A}_{el\,z}, \tag{28.3}$$

$$\dot{J}_{el} = 1_x \dot{J}_{el\,x} + 1_y \dot{J}_{el\,y} + 1_z \dot{J}_{el\,z}, \tag{28.4}$$

en las cuales $\dot{A}_{elx}$, $\dot{A}_{ely}$, $\dot{A}_{elz}$, $\dot{J}_{elx}$, $\dot{J}_{ely}$, $\dot{J}_{elz}$ son las componentes del potencial eléctrico vectorial $\dot{A}_{el}$ y de la corriente eléctrica extrínseca $\dot{J}_{el}$ a lo largo de las direcciones de las coordenadas x, y, z.

Sustituyamos las expresiones obtenidas en la ecuación (27.19):

$$1_x \nabla^2 \dot{A}_{el\,x} + 1_y \nabla^2 \dot{A}_{el\,y} + 1_z \nabla^2 \dot{A}_{el\,z} + \\ + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a (1_x \dot{A}_{el\,x} + 1_y \dot{A}_{el\,y} + 1_z \dot{A}_{el\,z}) = \\ = -\tilde{\mu}_a (1_x \dot{J}_{el\,x} + 1_y \dot{J}_{el\,y} + 1_z \dot{J}_{el\,z}). \tag{28.5}$$

La ecuación vectorial (28.5) puede partirse en tres ecuaciones escalares igualando los factores de los versores idénticos:

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\dot{A}_{el\,x}+\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{A}_{el\,x}&=-\tilde{\mu}_a\dot{J}_{el\,x},\\ \nabla^2\dot{A}_{el\,y}+\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{A}_{el\,y}&=-\tilde{\mu}_a\dot{J}_{el\,y},\\ \nabla^2\dot{A}_{el\,z}+\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a\dot{A}_{el\,z}&=-\tilde{\mu}_a\dot{J}_{el\,z}.\end{aligned}\right\} \tag{28.6}$$

Para simplificar la notación introduzcamos la designación

$$\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a=\gamma^2. \tag{28.7}$$

Entonces, el sistema de ecuaciones (28.6) puede representarse en la forma

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\dot{A}_{el\,x}+\gamma^2\dot{A}_{el\,x}&=-\tilde{\mu}_a\dot{J}_{el\,x},\\ \nabla^2\dot{A}_{el\,y}+\gamma^2\dot{A}_{el\,y}&=-\tilde{\mu}_a\dot{J}_{el\,y},\\ \nabla^2\dot{A}_{el\,z}+\gamma^2\dot{A}_{el\,z}&=-\tilde{\mu}_a\dot{J}_{el\,z}.\end{aligned}\right\} \tag{28.8}$$

Aquí ∇^2 es el operador de Laplace en el sistema de coordenadas cartesianas.

Las ecuaciones escalares obtenidas son análogas por la forma matemática. Es suficiente examinar la solución de alguna de éstas. En primer lugar analicemos la solución de la ecuación escalar homogénea de Helmholtz semejante por su forma matemática a las ecuaciones escalares del sistema (28.6). Escribamos esta ecuación en la forma

$$\nabla^2\dot{\Psi}+\gamma^2\dot{\Psi}=0. \tag{28.9}$$

Cabe señalar que en las ecuaciones (28.8) el laplaciano $\nabla^2 A_{e\,lx,y,z}$ se toma en el sistema de coordenadas cartesianas (pues, de otra forma, las funciones no se separan), mientras que el laplaciano de la función escalar $\nabla^2\dot{\Psi}$ puede tomarse en cualquier sistema de coordenadas.

Estudiemos la solución de la ecuación (28.9) en el sistema de coordenadas esféricas, suponiendo que el problema es esféricamente simétrico y que las derivadas respecto a las coordenadas φ y θ no existen. Por medio de la expresión insertada en el Apéndice I se puede determinar el laplaciano en el sistema de coordenadas esféricas cuando el campo depende tan sólo de la coordenada r:

$$\nabla^2\dot{\Psi}=\frac{d^2\dot{\Psi}}{dr^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{d\dot{\Psi}}{dr}=\frac{1}{r}\cdot\frac{d^2(\dot{\Psi}r)}{dr^2}.$$

Al sustituir la expresión para el laplaciano en la ecuación (28.9) reducimos esta última a la forma

$$\frac{d^2(\dot{\Psi}r)}{dr^2}+\gamma^2(\dot{\Psi}r)=0. \tag{28.10}$$

La ecuación (28.10), respecto a la función $\dot{\Psi}_r$, interviene como ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes La solución de esta ecuación puede escribirse en la forma

$$\dot{\Psi}_r = C_1 e^{-j\gamma r} + C_2 e^{j\gamma r}, \tag{28.11}$$

de donde

$$\dot{\Psi} = C_1 \frac{e^{-j\gamma r}}{r} + C_2 \frac{e^{j\gamma r}}{r}. \tag{28.12}$$

La función $\dot{\Psi}$ representa dos ondas esféricas. la incidente, que se determina por el sumando $C_1 \frac{e^{-j\gamma r}}{r}$, y la reflejada, que se determina por el sumando $C_2 \frac{e^{j\gamma r}}{r}$.

Luego, se puede pasar a la búsqueda de la solución de las ecuaciones no homogéneas del sistema (28.6). Para este fin se utilizan los llamados teoremas de Green que dan la relación integral entre dos diferentes funciones escalares. En calidad de una de éstas se aprovechará la solución buscada de las ecuaciones (28.6), es decir, las funciones $\dot{A}_{e1x}$, $\dot{A}_{e1y}$ o $\dot{A}_{e1z}$, y como otra, la recién determinada función $\dot{\Psi}$. Los teoremas de Green permiten determinar las soluciones buscadas por medio de la función $\dot{\Psi}$.

§ 28.3. El primero y el segundo teorema de Green

Escribamos el teorema de Ostrogradski—Gauss (2.1):

$$\oint_{S_1} \mathbf{a}\, d\mathbf{S} = \int_{V_1} \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV.$$

Representemos el vector $\mathbf{a}$ en forma de la relación

$$\mathbf{a} = \Psi \operatorname{grad} U, \tag{28.13}$$

donde Ψ y U son funciones escalares diferenciadas respecto a las coordenadas.

Entonces

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{div} (\Psi \operatorname{grad} U). \tag{28.14}$$

Valiéndose de la identidad vectorial insertada en el Apéndice I, la expresión (28.14) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \Psi \operatorname{grad} U + \Psi \nabla^2 U. \tag{28.15}$$

La sustitución de la fórmula (28 15) en el teorema de Ostrogradski Gauss nos lleva a la expresión

$$\int_{V_1} (\operatorname{grad} \Psi \operatorname{grad} U + \Psi \nabla^2 U)\, dV = \oint_{S_1} \Psi \operatorname{grad} U\, d\mathbf{S}. \tag{28.16}$$

En esta expresión grad $U\,d\mathbf{S} = \text{grad}\ U\ \mathbf{1}_n\,dS$, donde $\mathbf{1}_n$ es la normal unitaria respecto al elemento de la superficie $d\mathbf{S}$.

El producto escalar grad $U\mathbf{1}_n$ es la proyección del gradiente U sobre la dirección de la normal unitaria, o sea, la componente normal grad U. Por consiguiente, es justa la igualdad

$$\text{grad}\ U\,d\mathbf{S} = \frac{\partial v}{\partial n}\,dS, \tag{28.17}$$

donde n es la normal y la derivada $\partial v/\partial n$ es la derivada de la función v respecto a la normal n a la superficie dS, o la componente normal del gradiente U.

Sustituyamos la expresión (28.17) en la fórmula (28.16):

$$\int\limits_{V_1} (\text{grad}\ \Psi\ \text{grad}\ U + \Psi\nabla^2 U)\,dV = \int\limits_{S_1} \Psi\,\frac{\partial v}{\partial n}\,dS. \tag{28.18}$$

La relación obtenida lleva el nombre del *primer teorema de Green*. Este teorema puede representarse en una forma algo distinta si, al elegir el vector a, cambiamos de lugar las funciones Ψ y U en la expresión (28.14), o sea, si escribimos el vector a en la forma

$$\mathbf{a} = U\ \text{grad}\ \Psi. \tag{28.19}$$

En este caso el primer teorema de Green adquiere la forma

$$\int\limits_{V_1} (\text{grad}\ U\ \text{grad}\ \Psi + U\nabla^2\Psi)\,dV = \oint\limits_{S_1} U\,\frac{\partial \Psi}{\partial n}\,dS. \tag{28.20}$$

Sustraigamos término a término la relación (28.18) de la expresión (28.20):

$$\int\limits_{V_1} (U\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2 U)\,dV = \oint\limits_{S_1} \left(U\,\frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi\,\frac{\partial U}{\partial n}\right) dS. \tag{28.21}$$

La relación obtenida se denomina *segundo teorema de Green*.

§ 28.4. Utilización del segundo teorema de Green con el fin de obtener la solución de la ecuación de Helmholtz para el potencial eléctrico vectorial. Condiciones de radiación

Elijamos como función Ψ en el segundo teorema de Green la función $\dot{\Psi}$ definida por la expresión (28.12), con la particularidad de que se hace uso tan sólo de aquella parte de esta expresión que corresponde a la onda esférica incidente. El coeficiente de amplitud C_1 lo igualamos a la unidad. En este caso podemos escribir

$$\Psi = \dot{\Psi} = \frac{e^{-jvr}}{r}. \tag{28.22}$$

Elijamos como función U una de las soluciones buscadas del sistema de ecuaciones (28.6): $\dot{A}_{el\,x}$, $\dot{A}_{el\,y}$ o $\dot{A}_{el\,z}$. Para mayor certidumbre pongamos que esta solución sea $\dot{A}_{el\,x}$.

Por r entendamos la distancia entre el punto en que se busca la solución $\dot{A}_{el\,x}$ (llamémoslo punto de observación) y los puntos en los que está situado el sistema dado de corrientes $\dot{J}_{el\,x}$ (denominémoslos puntos del manantial). Designemos las coordenadas del punto de observación con x, y, z, y las coordenadas de los puntos del manantial, con x', y', z'. Entonces, la distancia r puede determinarse a partir de la relación

$$r = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}. \qquad (28.23)$$

En el segundo teorema de Green la integral por el volumen V_1 se toma por todo el volumen que encierra en sí todos los puntos posibles de observación y los puntos del manantial. En el proceso de cálculo de esta integral se pasará inevitablemente el punto correspondiente a $r = 0$. En dicho punto la funció $\dot{\Psi}$ tiende al infinito, o, como se dice, tiene una singularidad.

En consecuencia, no es posible poner directamente esta función en la integral de volumen. Para evitar esta dificultad rodeemos el punto de observación con una pequeña esfera de radio r_0 cuyo volumen es igual a V_0. A continuación, en vez del volumen V_1 en el segundo teorema de Green tomemos el volumen $V_1 - V_0$. Dentro de los límites de este volumen el radio r no puede hacerse menor que el radio r_0, y la singularidad de la función $\dot{\Psi}$ se eliminará.

Como superficie S_1 se debe entender la superficie que acota el volumen V_1. El nuevo volumen $V_1 - V_0$ se abarca por la superficie $S_1 + S_0$, donde S_0 es la superficie que acota el volumen V_0. Cuando en la fórmula (28.21) se pone en lugar de la función U la función $\dot{A}_{el\,x}$, y en calidad de Ψ la función $\dot{\Psi}$, mientras que en lugar del volumen V_1 se utiliza el volumen $V_1 - V_0$ y en vez de la superficie S_1 la superficie $S_1 + S_0$, se obtiene una nueva expresión para el segundo teorema de Green:

$$\int\limits_{V_1-V_0} (\dot{A}_{el\,x}\nabla^2\dot{\Psi} - \dot{\Psi}\nabla^2\dot{A}_{el\,x})\,dV =$$

$$= \int\limits_{S_1+S_0} \left(\dot{A}_{el\,x}\frac{\partial\dot{\Psi}}{\partial n} - \dot{\Psi}\frac{\partial\dot{A}_{el\,x}}{\partial n}\right) dS. \qquad (28.24)$$

Expresemos las funciones $\nabla^2\dot{\Psi}$ y $\nabla^2\dot{A}_{el\,x}$ a partir de la ecuación (28.9) y la primera ecuación del sistema (28.8):

$$\nabla^2\dot{\Psi} = -\gamma^2\dot{\Psi}, \qquad (28.25)$$

$$\nabla^2\dot{A}_{el\,x} = -\gamma^2\dot{A}_{el\,x} - \tilde{\mu}_a\dot{J}_{el\,x}. \qquad (28.26)$$

Sustituyamos los valores de las funciones $\nabla^2\dot{\Psi}$ y $\nabla^2\dot{A}_{el\,x}$ de las fórmulas (28.25) y (28 26) en la integral de volumen del segundo teorema de Green:

$$\int\limits_{V_1-V_0}(\dot{A}_{el\,x}\nabla^2\dot{\Psi}-\dot{\Psi}\nabla^2\dot{A}_{el\,x})\,dV=$$

$$=\int\limits_{V_1-V_0}(-\dot{A}_{el\,x}\gamma^2\dot{\Psi}+\dot{\Psi}\gamma^2\dot{A}_{el\,x}+\dot{\Psi}\tilde{\mu}_a\dot{J}_{el\,x})\,dV=\int\limits_{V_1-V_0}\dot{\Psi}\tilde{\mu}_a\dot{J}_{el\,x}\,dV.$$

Al poner el valor de la función $\dot{\Psi}$ de la fórmula (28.22), obtenemos la siguiente expresión para la integral de volumen:

$$\int\limits_{V_1-V_0}(\dot{A}_{el\,x}\nabla^2\dot{\Psi}-\dot{\Psi}\nabla^2\dot{A}_{el\,x})\,dV=\int\limits_{V_1-V_0}\tilde{\mu}_a\dot{J}_{el\,x}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\,dV. \quad (28.27)$$

Si el volumen V_0 tiende a cero la integral tiende hacia la integral por todo el volumen V_1.

Pasemos al estudio de la integral de superficie en la fórmula (28 24) Representemos esta integral en forma de suma de dos integrales por las superficies cerradas S_1 y S_0:

$$\oint\limits_{S_1+S_0}\left(\dot{A}_{el\,x}\frac{\partial\dot{\Psi}}{\partial n}-\dot{\Psi}\frac{\partial\dot{A}_{el\,x}}{\partial n}\right)dS=\oint\limits_{S_1}\left(\dot{A}_{el\,x}\frac{\partial\dot{\Psi}}{\partial n}-\dot{\Psi}\frac{\partial\dot{A}_{el\,x}}{\partial n}\right)dS+$$

$$-\int\limits_{S_0}\left(\dot{A}_{el\,x}\frac{\partial\dot{\Psi}}{\partial n}-\dot{\Psi}\frac{\partial\dot{A}_{el\,x}}{\partial n}\right)dS. \quad (28.28)$$

La integral por la superficie S_1, cuando la superficie S_0 tiende a cero, sigue siendo finita Es necesario determinar el comportamiento de la integral por la superficie S_0 en el caso límite, cuando esta superficie tiende a cero.

La derivada normal $\partial/\partial n$ representa la derivada $\partial/\partial r$ tomada con el signo inverso:

$$\partial/\partial n=-\partial/\partial r.$$

Haciendo uso de la fórmula (28 22), se puede escribir

$$\frac{\partial\dot{\Psi}}{\partial n}=-\frac{\partial\dot{\Psi}}{\partial r}=j\gamma\frac{e^{-j\gamma r}}{r}+\frac{e^{-j\gamma r}}{r^2},$$

$$\frac{\partial\dot{A}_{e.\,x}}{\partial n}=-\frac{\partial\dot{A}_{el\,x}}{\partial r}.$$

Sustituyamos las expresiones obtenidas en la integral por la superficie S_0:

$$\oint\limits_{S_0}\left(\dot{A}_{el\,x}\frac{\partial\dot{\Psi}}{\partial n}-\dot{\Psi}\frac{\partial\dot{A}_{el\,x}}{\partial n}\right)dS=$$

$$-\oint\limits_{S_0}\left(\dot{A}_{el\,x}j\gamma\frac{e^{-j\gamma r}}{r}+\dot{A}_{el\,x}\frac{e^{-j\gamma r}}{r^2}+\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\cdot\frac{\partial\dot{A}_{el\,x}}{\partial r}\right)dS. \quad (28.29)$$

En el límite, para $r \to 0$ $dS \to 4\pi r_0^2$, $\dot{A}_{el\,x} \to \dot{A}_{el\,x}(x, y, z)$ o sea, $\dot{A}_{el\,x}$ tiende al valor de esta función en el punto de observación x, y, z. En correspondencia, las funciones

$$\frac{e^{-j\gamma r}}{r} \to \frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0}, \quad \frac{e^{-j\gamma r}}{r^2} \to \frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0^2}.$$

Por consiguiente, cuando $r_0 \to 0$

$$\oint_{S_0} \left(\dot{A}_{el\,x} \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial n} - \dot{\Psi} \frac{\partial \dot{A}_{el\,x}}{\partial n} \right) dS \to \oint_{S_0} \left\{ \dot{A}_{el\,x}(x, y, z)\, j\gamma \frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0} + \right.$$

$$\left. + \dot{A}_{el\,x}(x, y, z) \frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0^2} + \frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0} \cdot \frac{\partial \dot{A}_{el\,x}}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} \right\} 4\pi r_0^2.$$

En el límite, las integrales de superficie del primero y del último sumando se anulan:

$$\lim_{r_0 \to 0} \oint_{S_0} \left\{ \dot{A}_{el\,x}(x, y, z)\, j\gamma \frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0} + \frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0} \cdot \frac{\partial \dot{A}_{el\,x}}{\partial r}\bigg|_{r=0} \right\} 4\pi r_0^2 = 0. \tag{28.30}$$

El límite de la integral de superficie del segundo sumando se escribe en la forma

$$\lim_{r_0 \to 0} \oint_{S_0} \dot{A}_{el\,x}(x, y, z) \frac{e^{-j\gamma r_0}}{r_0^2} 4\pi r_0^2 = 4\pi \dot{A}_{el\,x}(x, y, z). \tag{28.31}$$

De este modo, en el límite, cuando la superficie S_0 tiende a cero, la integral de superficie en la fórmula (28.24) puede expresarse por la relación

$$\lim_{r_0 \to 0} \int_{S_1 + S_0} \left(\dot{A}_{el\,x} \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial n} - \dot{\Psi} \frac{\partial \dot{A}_{el\,x}}{\partial n} \right) dS =$$

$$= \oint_{S_1} \left(\dot{A}_{el\,x} \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial n} - \dot{\Psi} \frac{\partial \dot{A}_{el\,x}}{\partial n} \right) dS + 4\pi \dot{A}_{el\,x}(x, y, z). \tag{28.32}$$

Basándose en la relación (28.27), el límite de la integral de volumen en el segundo teorema de Green se escribe en la forma

$$\lim_{r_0 \to 0} \int_{V_1 - V_0} (\dot{A}_{el\,x} \nabla^2 \dot{\Psi} - \dot{\Psi} \nabla^2 \dot{A}_{el\,x})\, dV = \int_{V_1} \mu_a \dot{J}_{el\,x} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV. \tag{28.33}$$

Valiéndose de las fórmulas (28.32) y (28.33), el segundo teorema de Green se puede escribir de la siguiente manera:

$$\int_{V_1} \tilde{\mu}_a \dot{J}_{el\,x} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV = \oint_{S_1} \left(\dot{A}_{el\,x} \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial n} - \dot{\Psi} \frac{\partial \dot{A}_{el\,x}}{\partial n} \right) dS + 4\pi A_{el\,x}(x, y, z), \tag{28.34}$$

o bien, de otra forma

$$\dot{A}_{\mathrm{el}\,x}(x, y, z) = \frac{\bar{\mu}_a}{4\pi} \int\limits_{V_1} \dot{J}_{\mathrm{el}\,x} \frac{e^{-jvr}}{r}\, dV + \\ + \frac{1}{4\pi} \oint\limits_{S_1} \left\{ \frac{\partial \dot{A}_{\mathrm{el}\,x}}{\partial n} \cdot \frac{e^{-jvr}}{r} - \dot{A}_{\mathrm{el}\,x} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jvr}}{r} \right) \right\} dS. \quad (28.35)$$

Por consiguiente, se puede hallar la solución de la primera ecuación escalar no homogénea para la función $\dot{A}_{\mathrm{el}\,x}$ del sistema de ecuaciones (28 8), si se conocen los valores de la función $\dot{J}_{\mathrm{el}\,x}$ en los límites de todo el volumen V_1, así como los valores de la función $A_{\mathrm{el}\,x}$ y de su derivada normal en la superficie S_1 que acota el volumen V_1. Si los valores de la función $\dot{A}_{\mathrm{el}\,x}$ y de su derivada normal en la superficie S_1 se ignoran, entonces, para hallar la función $\dot{A}_{\mathrm{el}\,x}$ es necesario resolver la ecuación integral (28 35). Las dos ecuaciones restantes del sistema (28.8) se resuelven análogamente. Las soluciones pueden representarse en forma de las siguientes relaciones:

$$\dot{A}_{\mathrm{el}\,y}(x, y, z) = \frac{\bar{\mu}_a}{4\pi} \int\limits_{V_1} \dot{J}_{\mathrm{el}\,y} \frac{e^{-jvr}}{r}\, dV + \\ + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_1} \left\{ \frac{\partial \dot{A}_{\mathrm{el}\,y}}{\partial n} \cdot \frac{e^{-jvr}}{r} - \dot{A}_{\mathrm{el}\,y} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jvr}}{r} \right) \right\} dS, \quad (28.36)$$

$$\dot{A}_{\mathrm{el}\,z}(x, y, z) = \frac{\bar{\mu}_a}{4\pi} \int\limits_{V_1} \dot{J}_{\mathrm{el}\,z} \frac{e^{-jvr}}{r}\, dV + \\ + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_1} \left\{ \frac{\partial \dot{A}_{\mathrm{el}\,z}}{\partial n} \cdot \frac{e^{-jvr}}{r} - \dot{A}_{\mathrm{el}\,z} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jvr}}{r} \right) \right\} dS. \quad (28.37)$$

En el caso de un volumen ilimitado V_1 y una superficie infinitamente alejada S_1, así como también cuando los manantiales del campo están dispuestos a distancias finitas del punto de observación, las soluciones (28.35)—(28.37) se simplifican sustancialmente. En este caso son posibles dos cursos de razonamientos: 1) se parte de que la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas y el tiempo de observación del proceso son finitos. En el tiempo finito de observación del proceso las ondas electromagnéticas no pueden alcanzar la superficie infinitamente alejada S_1 y en el caso de un volumen ilimitado V_1 la integral de superficie en la expresión (28.35) es igual a cero; 2) se determinan las condiciones matemáticas para las cuales la integral de superficie tiende a cero al aumentar infinitamente el volumen V_1, es decir, se cumple la relación límite

$$\lim_{r \to \infty} \oint\limits_{S_1} \left\{ \frac{\partial \dot{A}_{\mathrm{el}\,x}}{\partial n} \cdot \frac{e^{-jvr}}{r} - \dot{A}_{\mathrm{el}\,x} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jvr}}{r} \right) \right\} dS = 0. \quad (28.38)$$

Hallemos las condiciones en que se cumple esta relación. Cuando $r \to \infty$ la normal $n \to r$. Por eso las derivadas respecto a n en la integral pueden sustituirse por las derivadas respecto a r. El elemento de superficie dS en el sistema de coordenadas esféricas se escribe como la fórmula (véase la fig. 29.4) $dS = 2\pi r^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta$. Teniendo en cuenta lo expuesto, la relación límite (28.38) se escribe en la forma

$$\lim_{r\to\infty} \oint_{\theta_1} \left\{ \frac{\partial \dot{A}_{el\,x}}{\partial r} \cdot \frac{e^{-j\gamma r}}{r} - \dot{A}_{el\,x} \left(-j\gamma \frac{e^{-j\gamma r}}{r} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{e^{-j\gamma r}}{r^2} \right) \right\} 2\pi r^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta = 0. \qquad (28.39)$$

Para que se cumpla esta igualdad es necesario que

$$\lim_{r\to\infty} \left(r \frac{\partial \dot{A}_{el\,x}}{\partial r} + j\gamma r \dot{A}_{el\,x} + \dot{A}_{el\,x} \right) = 0.$$

Es evidente que para lograr este objetivo es suficiente la condición

$$\lim_{r\to\infty} \left(r \frac{\partial \dot{A}_{el\,x}}{\partial r} + j\gamma r \dot{A}_{el\,x} \right) = 0. \qquad (28.40)$$

Expresiones análogas determinan las condiciones para las componentes del potencial vectorial $\dot{A}_{el\,y}$ y $\dot{A}_{el\,z}$:

$$\lim_{r\to\infty} \left(r \frac{\partial \dot{A}_{el\,y}}{\partial r} + j\gamma r \dot{A}_{el\,y} \right) = 0, \qquad (28.41)$$

$$\lim_{r\to\infty} \left(r \frac{\partial \dot{A}_{el\,z}}{\partial r} + j\gamma r \dot{A}_{el\,z} \right) = 0. \qquad (28.42)$$

Las condiciones (28.40)—(28.42) se denominan *condiciones de radiación*. Para cumplirlas es necesario que los potenciales vectoriales y sus derivadas decrezcan con la distancia más rápidamente que por la ley $1/r$.

Al cumplirse las condiciones de radiación en el caso de un volumen infinitamente grande V_1, las expresiones (28.35)—(28.37) se escriben en la forma siguiente:

$$\dot{A}_{el\,x}(x, y, z) = \frac{\widetilde{\mu}_a}{4\pi} \int_{V_1} \dot{J}_{el\,x} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV, \qquad (28.43)$$

$$\dot{A}_{el\,y}(x, y, z) = \frac{\widetilde{\mu}_a}{4\pi} \int_{V_1} \dot{J}_{el\,y} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV, \qquad (28.44)$$

$$\dot{A}_{el\,z}(x, y, z) = \frac{\widetilde{\mu}_a}{4\pi} \int_{V_1} \dot{J}_{el\,z} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV. \qquad (28.45)$$

Puesto que

$$\dot{\mathbf{A}}_{el} = \mathbf{1}_x \dot{A}_{el\,x} + \mathbf{1}_y \dot{A}_{el\,y} + \mathbf{1}_z \dot{A}_{el\,z},$$

$$\dot{\mathbf{J}}_{el} = \mathbf{1}_x \dot{J}_{el\,x} + \mathbf{1}_y \dot{J}_{el\,y} + \mathbf{1}_z \dot{J}_{el\,z},$$

resulta que al multiplicar las relaciones (28.43)—(28.45) por los versores correspondientes y sumar los resultados se obtiene la solución de la ecuación vectorial de Helmholtz (27.19) con el segundo miembro:

$$\dot{\mathbf{A}}_{el} = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{el} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV. \tag{28.46}$$

La función $\frac{e^{-j\gamma r}}{4\pi r} = G(r)$ se llama *función de Green en el sistema de coordenadas esféricas*. En distintos sistemas de coordenadas, las funciones de Green pueden determinarse resolviendo la ecuación (28.9) para la función Ψ en el sistema de coordenadas correspondiente, con la subsiguiente aplicación del segundo teorema de Green.

La función de Green multiplicada por $\dot{\mu}_a$ corresponde al potencial vectorial de la densidad unitaria de la corriente existente en un volumen infinitamente pequeño dV. Si los dispositivos radiantes representan superficies metálicas de conductibilidad ideal por las cuales circulan corrientes extrínsecas superficiales de densidad $\dot{\mathbf{v}}_{el}$, la integral de volumen en la expresión (28.46) debe sustituirse por la integral de superficie de la forma

$$\dot{\mathbf{A}}_{el} = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_{S_1} \dot{\mathbf{v}}_{el} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dS. \tag{28.47}$$

Sustituciones análogas deben hacerse en las expresiones (28.35)—(28.37).

§ 28.5. Solución de la ecuación de Hemlholtz para el potencial magnético vectorial

Como quiera que la ecuación para el potencial magnético vectorial no se diferencia por su forma matemática de la ecuación para el potencial eléctrico vectorial, la solución para la función $\dot{\mathbf{A}}_m$ es análoga a la descrita en el § 28.4. Puesto que el paso desde la ecuación (27.19) a la (27.24) se realiza por medio de permutaciones cuya forma es

$$\dot{\mathbf{A}}_{el} \to \dot{\mathbf{A}}_m, \quad \tilde{\mu}_a \to -\tilde{\varepsilon}_a, \quad \dot{\mathbf{J}}_{el} \to -\dot{\mathbf{J}}_m,$$

la expresión para la función $\dot{\mathbf{A}}_m$ puede obtenerse directamente de la expresión (28.46) empleando las permutaciones indicadas. Como resultado, podemos escribir la fórmula

$$\dot{\mathbf{A}}_m = \frac{\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi} \int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV, \tag{28.48}$$

válida para un volumen ilimitado. En el caso de un volumen limitado, después de efectuar las permutaciones en las fórmulas (28.35)—(28.37), se obtienen las siguientes relaciones para las componentes del potencial magnético vectorial:

$$\dot{A}_{mx}(x, y, z) = \frac{\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi} \int_{V_1} \dot{J}_{mx} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1} \left\{ \frac{\partial \dot{A}_{mx}}{\partial n} \cdot \frac{e^{-j\gamma r}}{r} - \dot{A}_{mx} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) \right\} dS, \quad (28.49)$$

$$\dot{A}_{my}(x, y, z) = \frac{\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi} \int_{V_1} \dot{J}_{my} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1} \left\{ \frac{\partial \dot{A}_{my}}{\partial n} \cdot \frac{e^{-j\gamma r}}{r} - \dot{A}_{my} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) \right\} dS, \quad (28.50)$$

$$\dot{A}_{mz}(x, y, z) = \frac{\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi} \int_{V_1} \dot{J}_{mz} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dV +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1} \left\{ \frac{\partial \dot{A}_{mz}}{\partial n} \cdot \frac{e^{-j\gamma r}}{r} - \dot{A}_{mz} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right) \right\} dS. \quad (28.51)$$

Si los dispositivos radiantes representan superficies metálicas de conductibilidad ideal por las cuales fluyen corrientes extrínsecas superficiales de densidad $\dot{v}_m$, las integrales de volumen en las expresiones (28.48) — (28.51) deben sustituirse por las integrales de superficie de la forma

$$\dot{A}_m = \frac{\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi} \int_{S_1} \dot{v}_m \frac{e^{-j\gamma r}}{r} dS. \quad (28.52)$$

CAPÍTULO 29

Vibrador eléctrico elemental

§ 29.1. Planteamiento del problema

En el capítulo anterior se han hallado las soluciones generales de las ecuaciones de Helmholtz cuyos segundos miembros son expresión de los potenciales vectoriales eléctrico y magnético. Valiéndose de estas soluciones, en el presente capítulo se determinará el campo de un radiador elemental del tipo eléctrico, o sea, de un vibrador (u

oscilador) eléctrico elemental. A pesar de cierta idealización, el análisis de este radiador elemental permite comprender los procesos fundamentales que se operan en los dispositivos de antena reales y permite orientar el curso general de su cálculo.

Demos el nombre de vibrador eléctrico elemental a un segmento rectilíneo de cable por el cual fluye la corriente eléctrica cuya amplitud compleja de densidad es igual a $\dot{J}_{e1}$. La longitud del cable l se toma mucho menor que la longitud de la onda de oscilación en el cable. Supongamos que la amplitud compleja de la densidad de la corriente $\dot{J}_{e1}$ se mantiene constante en toda la longitud del cable l. Luego, supongamos que el campo se determina en el punto de observación, tan alejado del radiador que la distancia r entre cualquier punto a lo largo del vibrador y el punto de observación puede considerarse la misma. En la fig. 29.1 se muestra un dispositivo prácticamente análogo al vibrador eléctrico elemental. Este consta de dos cables cortos en cuyos extremos están dispuestas esferas metálicas que representan capacidades concentradas. La corriente extrínseca de densidad $\dot{J}_{e1}$ que fluye por los cables se convierte en corriente de desplazamiento conectada a través de las capacidades distribuidas C que existen entre los cables del vibrador. La gran capacidad concentrada entre las esferas metálicas supera considerablemente las capacidades distribuidas. En virtud de ello casi la totalidad de la corriente de desplazamiento fluye a través de una capacidad concentrada. Debido a que la longitud de los cables es pequeña en comparación con la longitud de onda de oscilación suministrada, el cambio de la densidad de la corriente extrínseca $\dot{J}_{e1}$ que surge a consecuencia de la derivación de la corriente mediante las capacidades distribuidas es insignificante y puede despreciarse. Como resultado, en el análisis matemático de este sistema es permisible considerar con alto grado de exactitud que la densidad de la corriente $\dot{J}_{e1}$ y su fase son constantes a lo largo del vibrador. Un dispositivo semejante fue utilizado por Hertz en sus experimentos y recibió el nombre de *vibrador eléctrico elemental* o *dipolo de Hertz*.

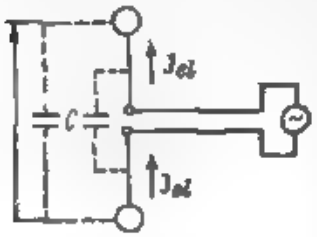

FIG. 29.1

§ 29.2. Determinación del potencial eléctrico vectorial en el campo del vibrador eléctrico elemental

Tomemos como base del análisis la solución general de la ecuación vectorial de Helmholtz en el sistema de coordenadas esféricas, anotada en forma de la expresión (28.46).

Orientemos el vibrador a lo largo del eje polar en el sistema de coordenadas esféricas, tal como se muestra en la fig. 29.2. Al elegir las coordenadas en la secuencia r, φ, θ, el origen del ángulo φ hay que tomarlo desde la coordenada y (véase el Apéndice I). El campo se determina en el punto de observación a. La densidad de la corriente $\dot{\mathbf{J}}_{el}$ existe sólo en los límites del cable del vibrador. Por consiguiente, la integral por el volumen ilimitado V_1 se diferenciará de cero únicamente dentro de los límites del volumen del cable. El elemento del volumen dV puede representarse en forma de producto escalar del área de la sección transversal del cable S por el elemento de la longitud del conductor $d\mathbf{l}$:

$$dV = \mathbf{S}\, d\mathbf{l}. \qquad (29.1)$$

Entonces, la integración por el volumen se sustituye por la integración respecto a la longitud del vibrador $\mathbf{l}$, y la expresión (28.46) se escribe en la forma

$$\dot{\mathbf{A}}_{el} = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_{\mathbf{l}} \dot{\mathbf{J}}_{el} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \mathbf{S}\, d\mathbf{l}. \qquad (29.2)$$

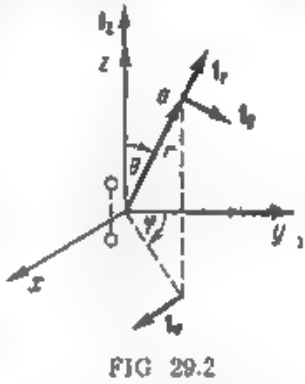

FIG. 29.2

Debido a las restricciones indicadas en el § 29.1 la distancia r y la densidad de la corriente $\dot{J}_{el}$ son invariables, al igual que el área de la sección transversal S. Por consiguiente, estas magnitudes y $e^{-j\gamma r}$ en el proceso de integración se pueden sacar fuera del signo de la integral:

$$\dot{\mathbf{A}}_{el} = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} (\dot{\mathbf{J}}_{el}\mathbf{S}) \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \int_{\mathbf{l}} d\mathbf{l} = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} (\dot{\mathbf{J}}_{el}\mathbf{S}) \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \mathbf{l}. \qquad (29.3)$$

Los vectores $\dot{\mathbf{J}}_{el}$ y S coinciden por su dirección. Su producto escalar es igual a la corriente $\dot{I}_{el}$ en el vibrador.

$$\dot{\mathbf{J}}_{el}\mathbf{S} = \dot{I}_{el} \qquad (29.4)$$

y, por consiguiente,

$$\dot{\mathbf{A}}_{el} = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \dot{I}_{el} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \mathbf{l}.$$

De acuerdo con la fig. 29.2 se puede escribir

$$\mathbf{l} = l\mathbf{i}_z \qquad (29.5)$$

y la expresión para el potencial eléctrico vectorial toma la forma definitiva

$$\dot{\mathbf{A}}_{el} = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \dot{I}_{el} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} l\mathbf{i}_z. \qquad (29.6)$$

§ 29.3. Determinación de las componentes del campo del vibrador eléctrico elemental

Para determinar las componentes del campo pueden utilizarse las relaciones (27.11) y (27.21). Si, empleando alguna de estas relaciones, se ha determinado el vector $\dot{\mathbf{H}}$ o $\dot{\mathbf{E}}$, entonces, para hallar el otro vector también se puede utilizar las ecuaciones de Maxwell definidas para la zona del espacio en que se encuentra el punto de observación a donde no hay corrientes extrínsecas. A partir de estas ecuaciones se pueden deducir las relaciones siguientes:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}, \tag{29.7}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = -\frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}. \tag{29.8}$$

Hallemos el vector de intensidad del campo magnético valiéndonos de las expresiones (27.11) y (29.6):

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\tilde{\mu}_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_{el} = \frac{1}{\tilde{\mu}_a} \operatorname{rot} \left(\frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \dot{I}_{el} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} l \mathbf{1}_z \right) = \frac{\dot{I}_{el} l}{4\pi} \operatorname{rot} \left(\frac{e^{-j\gamma r}}{r} \mathbf{1}_z \right). \tag{29.9}$$

En esta expresión el rotor debe calcularse en el sistema de coordenadas esféricas, operación que es bastante laboriosa. El procedimiento se puede simplificar, recurriendo a los siguientes razonamientos. Introduzcamos las designaciones

$$\frac{e^{-j\gamma r}}{r} = \Psi, \quad \mathbf{1}_z = \mathbf{a}, \tag{29.10}$$

donde Ψ es una función escalar, y examinemos la expresión rot $(\Psi \mathbf{a})$.

En el Apéndice I se inserta la identidad rot $(\Psi \mathbf{a}) =$ [grad $\Psi \mathbf{a}$) + + Ψ rot $\mathbf{a}$. Haciendo uso de la fórmula citada en el Apéndice se puede determinar el gradiente de la función escalar en el sistema de coordenadas esféricas:

$$\operatorname{grad} \Psi = \mathbf{1}_r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \mathbf{1}_\varphi \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \mathbf{1}_\theta \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}.$$

Teniendo en cuenta la designación (29.10), obtenemos

$$\operatorname{grad} \Psi = -\mathbf{1}_r \frac{1}{r^2} (1 + j\gamma r) e^{-j\gamma r}. \tag{29.11}$$

Entonces

$$\operatorname{rot} (\Psi \mathbf{a}) = \left[-\mathbf{1}_r \frac{1}{r^2} (1 + j\gamma r) e^{-j\gamma r} \mathbf{1}_z \right] + \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \operatorname{rot} \mathbf{1}_r.$$

El versor $\mathbf{1}_z$ no se somete a diferenciación, es decir,

$$\operatorname{rot} \mathbf{1}_z = 0$$

y

$$\operatorname{rot}(\Psi \mathbf{a}) = [-\mathbf{1}_r, \mathbf{1}_z]\frac{1}{r^2}(1+j\gamma r)\,e^{-j\gamma r}.$$

Como se infiere de la fig. 29.2, el producto vectorial

$$[-\mathbf{1}_r, \mathbf{1}_z] = -\mathbf{1}_\varphi \operatorname{sen}\theta.$$

En consecuencia,

$$\operatorname{rot}\Psi(\mathbf{a}) = -\mathbf{1}_\varphi \frac{1}{r^2}(1+j\gamma r)\,e^{-j\gamma r}\operatorname{sen}\theta.$$

Al sustituir esta expresión en la fórmula (29.9), obtenemos la expresión definitiva para el vector de intensidad del campo magnético:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_\varphi = -\mathbf{1}_\varphi \frac{\dot{I}_{el} e^{-j\gamma r} l \operatorname{sen}\theta}{4\pi r^2}(1+j\gamma r). \qquad (29.12)$$

De este modo, el vibrador eléctrico elemental crea una componente del campo magnético orientada a lo largo de la coordenada φ en el sistema de coordenadas esféricas. Para determinar el vector $\dot{\mathbf{E}}$ puede utilizarse ya sea la expresión (27.21), o bien, la fórmula (29.7). En el primer caso se requiere determinar el operador doble, bastante complejo, grad div $\dot{\mathbf{A}}_{el}$ en el sistema de coordenadas esféricas, mientras que en el segundo caso es suficiente hallar rot $\dot{\mathbf{H}}$, lo que es algo más sencillo. Esta es la razón de que preferimos la segunda vía.

En el Apéndice I se da la siguiente expresión para el rotor en el sistema de coordenadas esféricas:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{1}_r \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}(a_\theta r) - \frac{\partial}{\partial\theta}(a_\varphi r\operatorname{sen}\theta)\right\} +$$

$$+\mathbf{1}_\varphi \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(a_r) - \frac{\partial}{\partial r}(a_\theta r)\right\} + \mathbf{1}_\theta \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(a_\varphi r\operatorname{sen}\theta) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(a_r)\right\}.$$

El papel del vector a lo desempeña $\dot{\mathbf{H}}_\varphi$:

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_\varphi = -\mathbf{1}_r \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{-\frac{\dot{I}_{el}e^{-j\gamma r}l\operatorname{sen}\theta}{4\pi r^2}(1+j\gamma r)\,r\operatorname{sen}\theta\right\} +$$

$$+\mathbf{1}_\theta \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left\{-\frac{\dot{I}_{el}e^{-j\gamma r}l\operatorname{sen}\theta}{4\pi r^2}(1+j\gamma r)\,r\operatorname{sen}\theta\right\} =$$

$$= \mathbf{1}_r \frac{\dot{I}_{el}e^{-j\gamma r}l\cos\theta}{2\pi r^3}(1+j\gamma r) + \mathbf{1}_\theta \frac{\dot{I}_{el}e^{-j\gamma r}l\operatorname{sen}\theta}{4\pi r^3}(1+j\gamma r-\gamma^2 r^2). \qquad (29.13)$$

Al sustituir la expresión (23.13) en la fórmula (29.7), hallamos el vector de intensidad del campo eléctrico:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{1}_r \frac{\dot{I}_{el}e^{-j\gamma r}l\cos\theta}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a 2\pi r^3}(1+j\gamma r) + \mathbf{1}_\theta \frac{\dot{I}_{el}e^{-j\gamma r}l\operatorname{sen}\theta}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a 4\pi r^3}(1+j\gamma r-\gamma^2 r^2). \qquad (29.14)$$

Por consiguiente, el campo eléctrico del vibrador posee dos componentes: una, orientada a lo largo de la coordenada r, y la otra,

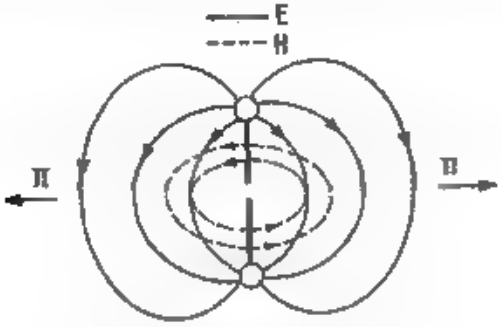

FIG. 29.3

orientada por la coordenada θ. El cuadro del campo electromagnético total cerca del vibrador se ilustra en la fig. 29.3.

§ 29.4. Zonas cercana, intermedia y lejana del campo del vibrador eléctrico elemental

Anotemos las expresiones obtenidas para las componentes del campo del vibrador:

$$\dot{H}_\varphi = -\frac{\dot{I}_{e0}\, e^{-j\gamma r} l \operatorname{sen}\theta}{4\pi r^2}(1+j\gamma r), \tag{29.15}$$

$$\dot{E}_r = \frac{\dot{I}_{e0}\, e^{-j\gamma r} l \cos\theta}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a 2\pi r^3}(1+j\gamma r), \tag{29.16}$$

$$\dot{E}_\theta = \frac{\dot{I}_{e0}\, e^{-j\gamma r} l \operatorname{sen}\theta}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a 4\pi r^3}(1+j\gamma r-\gamma^2 r^2). \tag{29.17}$$

Aquí

$$\gamma^2 = \omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a.$$

Si el medio está exento de pérdidas

$$\begin{gathered}\tilde{\mu}_a \to \mu_a,\ \tilde{\varepsilon}_a \to \varepsilon_a,\\ \gamma \to \beta = \omega\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}.\end{gathered} \tag{29.18}$$

Puesto que la velocidad de la luz c en el medio con los parámetros μ_a, ε_a se determina por la expresión $c = 1/\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}$, la fórmula para β puede escribirse de nuevo, en otra forma:

$$\beta = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{29.19}$$

donde λ es la longitud de onda de oscilación en el medio con los parámetros μ_a, ε_a:

$$\lambda = c/f. \tag{29.20}$$

De las expresiones para las componentes del campo del vibrador se infiere que siempre puede determinarse una distancia r para la cual sea justa la desigualdad

$$\gamma r \ll 1. \tag{29.21}$$

Para un medio sin pérdidas esta desigualdad se escribe en la forma

$$\beta r = \frac{2\pi}{\lambda} r \ll 1, \text{ o bien } r \ll \frac{\lambda}{2\pi}. \tag{29.22}$$

En este caso las expresiones para las componentes del campo se simplifican:

$$\dot{H}_\varphi = -\frac{\dot{I}_{el} e^{-j\gamma r} l \operatorname{sen}\theta}{4\pi r^2}, \tag{29.23}$$

$$\dot{E}_r = \frac{\dot{I}_{el} e^{-j\gamma r} l \cos\theta}{j\omega\varepsilon_a 2\pi r^3}, \tag{29.24}$$

$$\dot{E}_\theta = \frac{\dot{I}_{el} e^{-j\gamma r} l \operatorname{sen}\theta}{j\omega\varepsilon_a 4\pi r^3}. \tag{29.25}$$

La zona de las distancias r dentro de cuyos límites es válida la desigualdad (29.22) se llama *zona cercana del campo*. En esta zona el campo varía rapidamente en razón inversa al segundo y tercer grado de la distancia.

En la zona intermedia del campo en la cual se observa la igualdad aproximada

$$\gamma r \approx 1, \text{ o bien } r \approx \frac{\lambda}{2\pi}, \tag{29.26}$$

no se da la posibilidad de llevar a cabo cualesquiera simplificaciones en las fórmulas (29.15)—(29.17).

En el caso de grandes distancias r para las cuales son válidas las desigualdades

$$\gamma^2 r^2 \gg \gamma r \gg 1, \text{ o bien } r \gg \frac{\lambda}{2\pi}, \tag{29.27}$$

las fórmulas para calcular las componentes del campo toman la forma

$$\dot{H}_\varphi = -j\frac{\dot{I}_{el} e^{-j\gamma r} l \operatorname{sen}\theta\gamma}{4\pi r}, \tag{29.28}$$

$$\dot{E}_r = \frac{\dot{I}_{el} e^{-j\gamma r} l \cos\theta\gamma}{\omega\varepsilon_a 2\pi r^2}, \tag{29.29}$$

$$\dot{E}_\theta = j\frac{\dot{I}_{el} e^{-j\gamma r} l \operatorname{sen}\theta\gamma^2}{\omega\varepsilon_a 4\pi r}. \tag{29.30}$$

Como se deduce de estas relaciones, la componente del campo $\dot{E}_r$ decrece con el aumento de la distancia r con mucha mayor rapidez

que las componentes $\dot{H}_\varphi$, $\dot{E}_\theta$, de modo que dicha componente se puede despreciar.

De tal manera, en la zona de distancias para la cual es justa la desigualdad (29.27), que se denomina *zona lejana del campo*, existen prácticamente dos componentes del campo $\dot{H}_\varphi$ y $\dot{E}_\theta$. Estas componentes decrecen proporcionalmente al primer grado de la distancia, asegurando la posibilidad de radiocomunicación a grandes distancias. El campo con las componentes $\dot{H}_\varphi$ y $\dot{E}_\theta$ en la zona lejana se denomina de otra forma *campo de radiación*.

§ 29.5. Potencia irradiada por el vibrador eléctrico elemental al espacio circundante. Resistencia de radiación

En las zonas cercana e intermedia del campo es necesario tener en cuenta tres componentes del campo: $\dot{H}_\varphi$, $\dot{E}_r$ y $\dot{E}_\theta$. Estas componentes crean dos vectores de Poynting cuyos valores reales, de acuerdo con la expresión (4.29), pueden representarse en la forma

$$\dot{\Pi}_{\mathrm{Re}\,\theta} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,[\dot{E}_r \dot{H}_\varphi^*], \tag{29.31}$$

$$\dot{\Pi}_{\mathrm{Re}\,r} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,[\dot{E}_\theta \dot{H}_\varphi^*]. \tag{29.32}$$

Para mayor claridad supongamos que en el medio no hay pérdidas y que $\tilde{\varepsilon}_a \to \varepsilon_a$, $\tilde{\mu}_a \to \mu_a$, $\gamma \to \beta$.

Haciendo uso de la fórmula (29.15) hallemos el valor conjugado de la componente del campo magnético $\dot{H}_\varphi^*$.

$$\dot{H}_\varphi^* = -\frac{\dot{I}_{e1}^* e^{j\beta r} l \operatorname{sen}\theta}{4\pi r^2}(1 - j\beta r). \tag{29.33}$$

Seguidamente, sustituyamos en la expresión (29.31) los valores $\dot{E}_r$ y $\dot{H}_\varphi$ a partir de las fórmulas (29.16) y (29.33):

$$\dot{\Pi}_{\mathrm{Re}\,\theta} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[1_r \frac{\dot{I}_{e1} e^{-j\beta r} l \cos\theta}{j\omega\varepsilon_a 2\pi r^3}(1 + j\beta r)(-1_\varphi) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\dot{I}_{e1}^* e^{j\beta r} l \operatorname{sen}\theta}{4\pi r^2}(1 - j\beta r)\right] =$$

$$= -1_\theta \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{|\dot{I}_{e1}|^2 l^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{j\omega\varepsilon_a 8\pi^2 r^5}(1 + \beta^2 r^2)\right\} = 0. \tag{29.34}$$

La presencia en el denominador de j significa que la parte real de la expresión entre corchetes es igual a cero:

$$\dot{\Pi}_{\mathrm{Re}\,\theta} = 0. \tag{29.35}$$

De este modo, el valor real de la componente meridional del vector de Poynting es igual a cero. Físicamente, este hecho significa

que en la dirección meridional no tiene lugar la irradiación de energía. Tan sólo existe la oscilación de esta energía alrededor del vibrador. En la zona lejana la potencia reactiva definida por la parte imaginaria del vector de Poynting, orientado a lo largo de la coordenada θ, decrece proporcionalmente al cubo de distancia, es decir, con suma rapidez, y no puede aprovecharse para la radiocomunicación a grandes distancias.

Al sustituir en la expresión (29.32) los valores de $\dot{E}_\varphi$, $\dot{H}_\varphi^*$ de las fórmulas (29.17) y (29.33) y considerando que $\gamma \to \beta$, hallamos

$$\dot{\Pi}_{\mathrm{Re}\, r} = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left[1_\theta \frac{\dot{I}_{el} e^{-j\beta r} l \operatorname{sen} \theta}{j\omega\varepsilon_a 4\pi r^3} (1 + j\beta r - \beta^2 r^2) \times \right.$$

$$\left. \times (-1_\varphi) \frac{\dot{I}_{el}^* e^{j\beta r} l \operatorname{sen} \theta}{4\pi r^3} (1 - j\beta r) \right] =$$

$$= 1_r \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left\{ \frac{|\dot{I}_{el}|^2 l^2 (\operatorname{sen} \theta)^2}{j\omega\varepsilon_a 16\pi^2 r^5} (1 + \beta^2 r^2 - \beta^2 r^2 + j\beta^3 r^3) \right\},$$

o bien, definitivamente,

$$\dot{\Pi}_{\mathrm{Re}\, r} = 1_r \frac{|\dot{I}_{el}|^2 l^2 \operatorname{sen}^2 \theta \beta^3}{\omega\varepsilon_a 32\pi^2 r^2}. \qquad (29.36)$$

De este modo, existe la parte real del vector de Poynting, orientado a lo largo de la coordenada r, que decrece proporcionalmente al cuadrado de distancia y asegura la posibilidad de radiocomunicación a grandes distancias.

Empleando la expresión (29.36) se puede determinar la potencia P_{rad} irradiada por el vibrador eléctrico elemental al espacio circundante. Esta potencia representa la integral del vector de Poynting $\Pi_{\mathrm{Re}\, r}$ por la superficie de una esfera en cuyo centro está situado el vibrador:

$$P_{rad} = \oint_{S_1} \dot{\Pi}_{\mathrm{Re}\, r}\, dS \qquad (29.37)$$

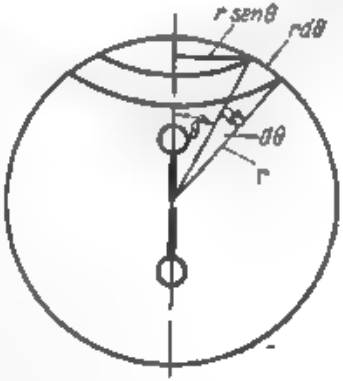

FIG. 29.4

De conformidad con la fig. 29.4, el elemento de la superficie en el sistema de coordenadas esféricas se escribe en la forma

$$dS = 1_r 2\pi r^2 \operatorname{sen} \theta\, d\theta. \qquad (29.38)$$

Al sustituir en la fórmula (29.37) las expresiones (29.36) y (29.38), obtenemos la relación para la potencia irradiada:

$$P_{rad} = \int_0^\pi \frac{|\dot{I}_{el}|^2 l^2 \operatorname{sen}^2 \theta \beta^3}{\omega\varepsilon_a 32\pi^2 r^2} 2\pi r^2 \operatorname{sen} \theta\, d\theta =$$

$$= \frac{|\dot{I}_{el}|^2 l^2 \beta^3}{16\pi\omega\varepsilon_a} \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \theta\, d\theta = \frac{|\dot{I}_{el}|^2 l^2 \beta^3}{16\pi\omega\varepsilon_a} \cdot \frac{4}{3}.$$

o bien, definitivamente,

$$P_{rad} = \frac{|\dot{I}_{el}|^2 l^2 \beta^3}{12\pi\omega\varepsilon_a}. \qquad (29.39)$$

Como toda potencia activa la potencia de radiación puede representarse en la forma

$$P_{rad} = \frac{|\dot{I}_{el}|^2 R_{rad}}{2}. \qquad (29.40)$$

Demos a la resistencia R_{rad} el nombre de resistencia de radiación. Al igualar las expresiones (29.39) y (29.40), obtenemos las siguientes relaciones

$$\frac{|\dot{I}_{el}|^2 R_{rad}}{2} = \frac{|\dot{I}_{el}|^2 l^2 \beta^3}{12\pi\omega\varepsilon_a}, \qquad R_{rad} = \frac{l^2\beta^3}{6\pi\omega\varepsilon_a}.$$

Valiéndose de las expresiones (29.18) y (29.19), la resistencia de radiación puede representarse en la forma

$$R_{rad} = \frac{l^2\omega\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}4\pi^2}{6\pi\omega\varepsilon_a\lambda^2} = \frac{l^2 2\pi}{3\lambda^2}\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}},$$

o bien

$$R_{rad} = \frac{l^2 2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \qquad (29.41)$$

Si el medio representa el vacío, entonces

$$\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \to \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\Omega \quad \text{y} \quad R_{rad} = 789{,}59\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \qquad (29.42)$$

Al calcular la resistencia de radiación no se debe olvidar que todas las conclusiones sacadas para el vibrador eléctrico elemental son válidas si $l \ll \lambda$.

§ 29.6. Diagrama direccional del campo de radiación de un vibrador eléctrico elemental en la zona lejana

Se llama diagrama direccional el gráfico de dependencia de las componentes del campo de la antena respecto a las coordenadas angulares. En el sistema de coordenadas esféricas existen dos coordenadas angulares: φ y θ. En la zona lejana existen, de hecho, dos componentes del campo $\dot{H}_\varphi$ y $\dot{E}_\theta$ definidas por las expresiones (29.28) y (29.30). Las dos componentes no dependen de la coordenada φ, y se puede representar el diagrama de radiación en el plano perpendicular al eje polar en forma de circunferencia cuyo radio, a determinada escala, es el módulo $|\dot{H}_\varphi|$ o $|\dot{E}_\theta|$, calculado para valores fijados del radiovector r y del ángulo θ. Semejante diagrama se muestra en la fig. 29.5.

En el plano meridional $\dot{H}_\varphi$ y $\dot{E}_\theta$ son proporcionales a sen θ. Designemos con $|\dot{H}_\varphi|_m$ y $|\dot{E}_\theta|_m$ los valores máximos del módulo de las componentes del campo correspondientes a $\theta = 90°$

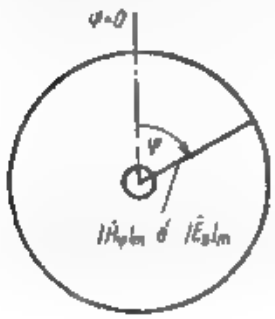

FIG. 29.5

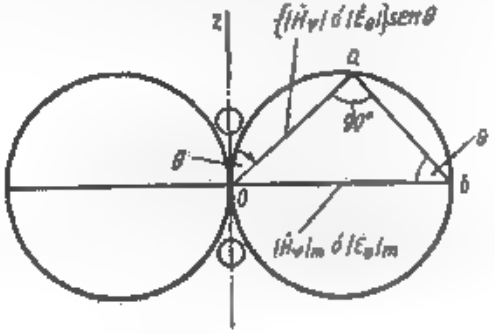

FIG. 29.6

Entonces, la variación del módulo de las componentes del campo en función de la coordenada θ puede expresarse por las fórmulas:

$$|\dot{H}_\varphi| = |\dot{H}_\varphi|_m \operatorname{sen}\theta, \tag{29.43}$$

$$|\dot{E}_\theta| = |\dot{E}_\theta|_m \operatorname{sen}\theta. \tag{29.44}$$

Construyamos dos circunferencias cuyos diámetros, a escala, correspondan a $|\dot{H}_\varphi|_m$ o a $|\dot{E}_\theta|_m$, tal como se indica en la fig. 29.6.

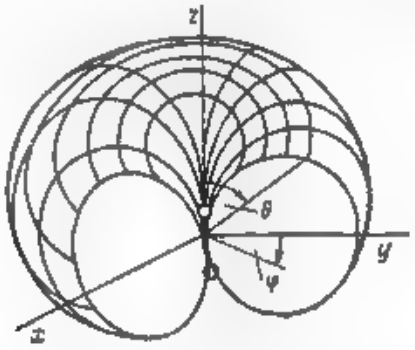

FIG. 29.7

La cuerda *oa* viene caracterizada por la relación (29.43) o la (29.44) y presenta, a escala, el cuadro de variación de los módulos $|\dot{H}_\varphi|$ y $|\dot{E}_\theta|$ en función del ángulo θ. De este modo, el vibrador elemental engendra el máximo de radiación en el plano ecuatorial correspondiente a $\theta = 90°$ y no irradia en dirección del eje polar *z*. En el espacio, el diagrama direccional representa un toroide ilustrado en la fig. 29.7.

CAPÍTULO 30

Vibrador magnético elemental

§ 30.1. Planteamiento del problema

El vibrador magnético elemental se diferencia del vibrador eléctrico elemental únicamente por el hecho de que en los cables con esferas en los extremos (véase la fig. 29.1) en vez de la densidad de la corriente eléctrica extrínseca $\dot{J}_{el}$ existe la densidad de la corriente magnética extrínseca $\dot{J}_m$.

El campo creado por el vibrador magnético se determina de la misma manera que en el caso del vibrador eléctrico. Conviene tomar por base la solución de la ecuación de Helmholtz para el potencial magnético vectorial representada en forma de la expresión (28.48). Una vez determinado el potencial magnético vectorial $\dot{A}_m$, se puede hallar, empleando la fórmula (27.26), el campo $\dot{E}$ y, seguidamente, buscar el vector de intensidad del campo magnético $\dot{H}$ valiéndose de la fórmula (27.25) o de la segunda ecuación de Maxwell presentada en la forma (29.8).

Como se ha señalado en el cap. 27, el paso desde las componentes del campo, que surgen al actuar la corriente eléctrica extrínseca y que se determinan por medio del potencial eléctrico vectorial, hacia las componentes del campo, que se crean por acción de la corriente magnética extrínseca y que se determinan mediante el potencial magnético vectorial, puede realizarse aplicando el principio de dualidad de permutación. En consecuencia, no hay necesidad de una deducción pormenorizada del campo del vibrador magnético elemental. Se ofrece la posibilidad de hallar inmediatamente, basándose en las expresiones definitivas para las componentes del campo del vibrador eléctrico y recurriendo a permutaciones indispensables, las expresiones definitivas para las componentes del campo del vibrador magnético. Precisamente esta vía para resolver el problema se ha elegido en el presente capítulo.

§ 30.2. Determinación de las componentes del campo del vibrador magnético elemental

Como base del análisis tomemos las expresiones definitivas para las componentes del campo del vibrador eléctrico elemental (29.15)—(29.17). Conforme al principio de dualidad de permutación efectuemos en estas expresiones las siguientes conversiones:

$$\dot{H} \rightleftarrows \dot{E}, \quad \tilde{\varepsilon}_a \rightleftarrows -\tilde{\mu}_a, \quad \dot{J}_{el} \rightarrow -\dot{J}_m. \tag{30.1}$$

En virtud del carácter justo de la relación (29.4)

$$\dot{J}_{e1}S = \dot{J}_{e1}$$

y de la relación análoga al actuar una corriente magnética extrínseca

$$\dot{J}_m S = \dot{I}_m \tag{30.2}$$

las permutaciones (30.1) pueden representarse en la forma

$$\dot{H} \rightleftarrows \dot{E}, \quad \bar{e}_a \rightleftarrows -\bar{\mu}_a, \quad \dot{J}_{e1} \rightleftarrows -\dot{I}_m. \tag{30.3}$$

Al llevar a cabo estas permutaciones en las relaciones (29.15)—(29.17), obtenemos las expresiones definitivas para las componentes del campo del vibrador magnético elemental:

$$\dot{E}_\varphi = \frac{\dot{I}_m e^{-j\gamma r} l \operatorname{sen}\theta}{4\pi r^2}(1 + j\gamma r), \tag{30.4}$$

$$\dot{H}_r = \frac{\dot{I}_m e^{-j\gamma r} l \cos\theta}{j\omega\mu_a 2\pi r^3}(1 + j\gamma r), \tag{30.5}$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{\dot{I}_m e^{-j\gamma r} l \operatorname{sen}\theta}{j\omega\mu_a 4\pi r^3}(1 + j\gamma r - \gamma^2 r^2). \tag{30.6}$$

En la zona lejana quedan prácticamente las componentes del campo:

$$\dot{E}_\varphi = j\frac{\dot{I}_m e^{-j\gamma r} l \operatorname{sen}\theta\gamma}{4\pi r}, \tag{30.7}$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{\dot{I}_m e^{-j\gamma r} l \operatorname{sen}\theta\gamma^2}{j\omega\mu_a 4\pi r}, \tag{30.8}$$

que son, precisamente, el campo de radiación del vibrador magnético.

§ 30.3. Analogía física del vibrador magnético elemental Oscilador elemental de ranura

La corriente magnética extrínseca se ha introducido en la ecuación de Maxwell de una manera formal, por analogía con la corriente eléctrica extrínseca. Hasta el momento no se ha determinado su analogía física. Por esta razón sigue sin aclarar a qué sistema físico real corresponde el campo caracterizado por las expresiones (30.4)—(30.6).

Con el fin de esclarecer esta cuestión analicemos detalladamente el sentido físico de las permutaciones del tipo (30.3), así como las condiciones límites del problema electrodinámico correspondiente a la definición del campo del vibrador eléctrico elemental. Para mayor claridad supongamos que el vibrador eléctrico elemental es una placa delgada cuyo ancho es d y la longitud l, confeccionada de un metal ideal con conductibilidad infinitamente grande. Supongamos que a

lo largo de esta placa, por ambos lados, fluye la corriente eléctrica extrínseca cuya densidad superficial es constante por la longitud de la placa e igual a $\dot{v}_{el}$. Despreciemos aquella parte de la corriente superficial que circula a lo largo de los bordes finos de la placa. Semejante sistema se representa en la fig. 30.1.

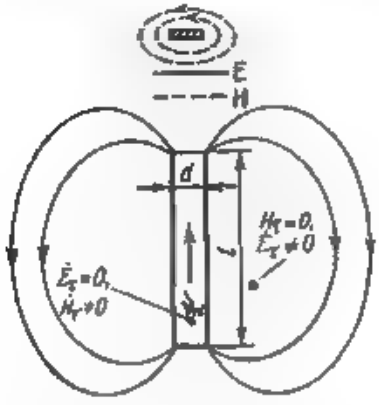

FIG 30.1

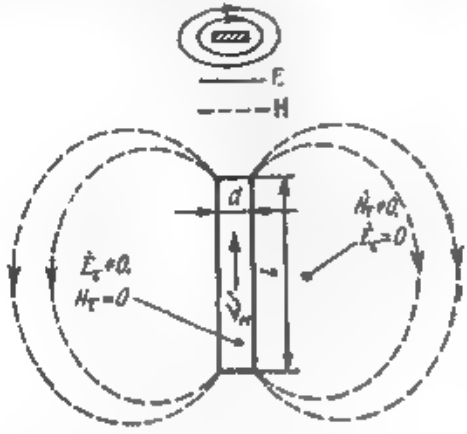

FIG. 30.2

La corriente eléctrica que fluye por los dos lados de la placa y engendra un campo electromagnético se define por la relación

$$\dot{I}_{el} = 2d\dot{v}_{el}. \tag{30.9}$$

Al sustituir este valor de la corriente $\dot{I}_{el}$ en las expresiones (29.15)—(29.17), se puede determinar las componentes del campo:

$$\dot{H}_\varphi = -\frac{2d\dot{v}_{el}e^{-j\gamma r}l\operatorname{sen}\theta}{4\pi r^2}(1+j\gamma r), \tag{30.10}$$

$$\dot{E}_r = \frac{2d\dot{v}_{el}e^{-j\gamma r}l\cos\theta}{j\omega\varepsilon_a 2\pi r^3}(1+j\gamma r), \tag{30.11}$$

$$\dot{E}_\theta = \frac{2d\dot{v}_{el}e^{-j\gamma r}\times l\operatorname{sen}\theta}{j\omega\varepsilon_a 4\pi r^3}(1+j\gamma r-\gamma^2 r^2). \tag{30.12}$$

Examinemos qué condiciones límites corresponden a este problema. Dentro de los límites de la placa fabricada de un metal ideal son justas las condiciones $\dot{H}_\tau = \dot{v}_{el}$, $\dot{E}_\tau = 0$. Fuera de los límites de la placa, en el plano de la fig. 30.1 existe el campo E tangencial a este plano. El campo H llega al plano de la figura normalmente, y fuera de los límites de la placa $\dot{H}_\tau = 0$.

Supongamos que por la placa no fluye la corriente eléctrica extrínseca de densidad superficial $\dot{v}_{el}$, sino la corriente magnética extrín-

seca de densidad superficial $\dot{v}_m$ (fig. 30.2). El campo creado por tal corriente puede obtenerse si en las expresiones (30.10)—(30.12) se efectúan permutaciones del tipo

$$\dot{H} \rightleftarrows \dot{E}, \quad \dot{e}_a \to -\mu_a, \quad \dot{v}_{el} \to -\dot{v}_m.$$

Como resultado aparecen las relaciones

$$\dot{E}_\varphi = \frac{2d\dot{v}_m e^{-j\gamma r} l \operatorname{sen}\theta}{4\pi r^2}(1 + j\gamma r), \tag{30.13}$$

$$\dot{H}_r = \frac{2d\dot{v}_m e^{-j\gamma r} l \cos\theta}{j\omega\mu_a 2\pi r^3}(1 + j\gamma r), \tag{30.14}$$

$$\dot{H}_\theta = \frac{2d\dot{v}_m e^{-j\gamma r} l \operatorname{sen}\theta}{j\omega\mu_a 4\pi r^3}(1 + j\gamma r - \gamma^2 r^2). \tag{30.15}$$

El campo correspondiente a las expresiones expuestas se muestra en la fig. 30.2. A este caso corresponden las siguientes condiciones límites: dentro de los límites de la placa $\dot{E}_\tau \neq 0$, $\dot{H}_\tau = 0$, fuera de los límites de la placa, en el plano de la figura, $\dot{H}_\tau \neq 0$, $\dot{E}_\tau = 0$.

De acuerdo con las condiciones límites junto a la superficie del metal ideal (8.18) $\dot{E}_{1\tau} = -\dot{v}_m$ las expresiones (30.13)—(30.15) se escriben en otra forma:

$$\dot{E}_\varphi = -\frac{2d\dot{E}_{1\tau} e^{-j\gamma r} l \operatorname{sen}\theta}{4\pi r^2}(1 + j\gamma r), \tag{30.16}$$

$$\dot{H}_r = -\frac{2d\dot{E}_{1\tau} e^{-j\gamma r} l \cos\theta}{j\omega\mu_a 2\pi r^3}(1 + j\gamma r), \tag{30.17}$$

$$\dot{H}_\theta = -\frac{2d\dot{E}_{1\tau} e^{-j\gamma r} l \operatorname{sen}\theta}{j\omega\mu_a 4\pi r^3}(1 + j\gamma r - \gamma^2 r^2). \tag{30.18}$$

Como se ha señalado en el § 8.3, $\dot{E}_{1\tau}$ y $\dot{v}_m$ están vinculados por la regla del tornillo levógiro, en otras palabras, si la amplitud compleja de densidad de la corriente magnética superficial $\dot{v}_m$ está orientada a lo largo de la placa, la componente $\dot{E}_{1\tau}$ lo está a lo ancho de la placa.

Seguidamente tratemos de hallar el sistema físico correspondiente a las condiciones límites representadas en la fig. 30.2.

Fuera de los límites de la placa, en el plano de la figura, $\dot{E}_\tau = 0$ y $\dot{H}_\tau \neq 0$. Semejantes condiciones son válidas junto a la superficie del metal ideal. Si fuera de los límites de la placa, en el plano de la figura, colocamos una lámina de metal ideal, estas condiciones límites se cumplirán. Dentro de los límites de la placa son justas las

condiciones $\dot{E}_\tau \neq 0$, $\dot{H}_\tau = 0$. Estas condiciones se cumplirán si en la lámina de metal ideal se practica un orificio (una ranura) que por

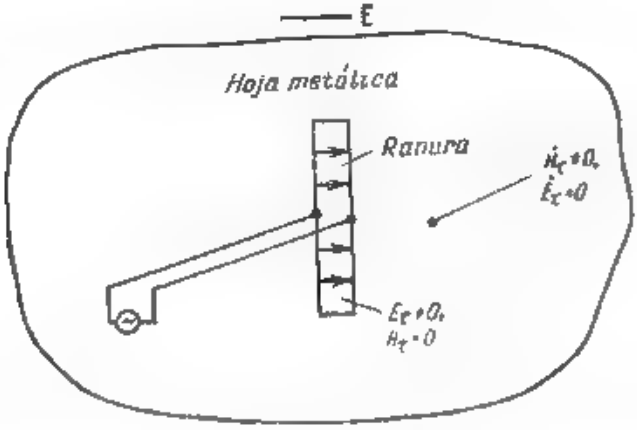

FIG. 30.3

su forma coincida con la de la placa y a los bordes del orificio se suministra una corriente procedente de un generador (fig. 30.3).

En este caso el producto

$$\dot{E}_{1\tau} d = \dot{U}_{\text{ran}}, \tag{30.19}$$

donde $\dot{U}_{\text{ran}}$ es la diferencia de potencial entre los bordes de la ranura creada por el generador.

Respectivamente, las expresiones (30.16)—(30.18) adquirirán la forma definitiva

$$\dot{E}_\tau = -\frac{2\dot{U}_{\text{ran}} a e^{-j\gamma r}}{4\pi r^2 l \operatorname{sen}\theta}(1 + j\gamma r), \tag{30.20}$$

$$\dot{H}_r = -\frac{2\dot{U}_{\text{ran}} e^{-j\gamma r}}{j\omega\mu_a 2\pi r^3 l \cos\theta}(1 + j\gamma r), \tag{30.21}$$

$$\dot{H}_\theta = -\frac{2\dot{U}_{\text{ran}} e^{-j\gamma r}}{j\omega\mu_a 4\pi r^3 l \operatorname{sen}\theta}(1 + j\gamma r - \gamma^2 r^2). \tag{30.22}$$

Al hacer la comparación de estas expresiones y de las fórmulas (30.4)—(30.6), se puede escribir la relación

$$\dot{I}_m = -2\dot{U}_{\text{ran}}. \tag{30.23}$$

De este modo, como analogía física de la corriente magnética en el caso del llamado oscilador de ranura interviene la doble diferencia de potencial entre los bordes de la ranura. Según evidencian numerosas investigaciones, el concepto de corriente magnética resulta cómodo al analizar antenas de tipo ranurado representadas en la fig. 30.3 y antenas del tipo de cuadro.

§ 30.4. Potencia irradiada por el vibrador magnético elemental al espacio circundante. Resistencia de radiación. Diagrama direccional

La determinación de la potencia de radiación del vibrador magnético se realiza del mismo modo que en el § 29.5. Es fácil demostrar, al igual que en el caso del vibrador eléctrico, que el vector de Poynting construido a base de las componentes del campo $\dot{E}_\varphi$, $\dot{H}_r$ y orientado por la coordenada θ no posee la parte real.

La parte real del vector de Poynting construido a base de las componentes del campo $\dot{E}_\varphi$, $\dot{H}_\theta$ y orientado a lo largo de la coordenada r se determina de la manera siguiente (medio sin pérdidas, $\gamma \to \beta$):

$$\dot{\Pi}_{\mathrm{Re}\,r} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,[\dot{E}_\varphi \dot{H}_\theta^*] = 1_r\,\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{-\frac{2\dot{U}_{\mathrm{ran}}e^{-j\beta r}l\,\mathrm{sen}\,\theta}{4\pi r^2}(1+j\beta r)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{2\dot{U}^*_{\mathrm{ran}}e^{j\beta r}l\,\mathrm{sen}\,\theta}{j\omega\mu_a 4\pi r^2}(1-j\beta r-\beta^2 r^2)\right\} = 1_r\,\frac{|\dot{U}_{\mathrm{ran}}|^2 l^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\beta^2}{8\pi^2\omega\mu_a r^2} \quad (30.24)$$

La potencia de radiación se halla por medio de la expresión (29.37). Como resultado de la integración, análoga a la realizada en el § 29.5, se obtiene

$$P_{\mathrm{rad}} = \frac{|\dot{U}_{\mathrm{ran}}|^2 l^2\beta^2}{8\pi^2\omega\mu_a}2\pi\,\frac{4}{3} = \frac{|\dot{U}_{\mathrm{ran}}|^2 l^2\beta^2}{3\pi\omega\mu_a}. \quad (30.25)$$

La potencia de radiación, al igual que toda potencia activa, puede representarse en la forma

$$P_{\mathrm{rad}} = \frac{|\dot{U}_{\mathrm{ran}}|^2}{2R_{\mathrm{rad}}}. \quad (30.26)$$

Al igualar las expresiones (30.25) y (30.26), obtenemos

$$\frac{|\dot{U}_{\mathrm{ran}}|^2 l^2\beta^2}{3\pi\omega\mu_a} = \frac{|\dot{U}_{\mathrm{ran}}|^2}{2R_{\mathrm{rad}}},$$

de donde

$$R_{\mathrm{rad}} = \frac{3\pi\omega\mu_a}{2l^2\beta^2}.$$

Haciendo uso de las expresiones (29.18) y (29.19), se puede determinar la resistencia de radiación

$$R_{\mathrm{rad}} = \frac{3\pi\omega\mu_a\lambda^2}{2l^2\omega\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\,4\pi^2} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\cdot\frac{3}{8\pi}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2. \quad (30.27)$$

Si el medio representa un vacío, entonces resulta

$$\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \to \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\Omega \quad \text{y} \quad R_{\mathrm{rad}} = 45\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2. \quad (30.28)$$

Al comparar las fórmulas (30.20)—(30.22) para las componentes del campo del vibrador magnético con las fórmulas (29.15)—(29.17)

para las componentes del campo del vibrador eléctrico se puede advertir una dependencia análoga de las componentes del campo respecto a las coordenadas angulares. En virtud de esta circunstancia los diagramas direccionales en el plano perpendicular al eje polar y el plano meridional serán análogas a los diagramas representados en las figs. 29.5 y 29.6.

CAPÍTULO 31

Lema de Lorentz

§ 31.1. Planteamiento del problema

El lema de Lorentz se aplica frecuentemente en la electrodinámica para resolver problemas acerca de la excitación de los campos por sistemas prefijados de corrientes eléctricas o magnéticas. Valiéndose de este lema se establece la relación matemática entre el primer grupo de corrientes eléctricas y magnéticas extrínsecas y el campo que éstas crean, por una parte, y el segundo grupo de corrientes eléctricas y magnéticas extrínsecas y el campo que dichas corrientes engendran, por otra. Sobre la base del lema de Lorentz puede realizarse el análisis de diferentes procesos electrodinámicos; precisamente este lema se utilizará en la exposición que sigue.

§ 31.2. Deducción del lema de Lorentz para los volúmenes limitado e ilimitado

Supongamos que existe el primer grupo de corrientes extrínsecas $\dot{\mathbf{J}}_{e1}$ y $\dot{\mathbf{J}}_{m1}$ que crea los campos $\dot{\mathbf{H}}_1$ y $\dot{\mathbf{E}}_1$. Escribamos las ecuaciones de Maxwell correspondientes a este caso:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_1 = j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}}_1 + \dot{\mathbf{J}}_{e1}, \tag{31.1}$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_1 = -j\omega\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{H}}_1 - \dot{\mathbf{J}}_{m1}. \tag{31.2}$$

Supongamos también que existe el segundo grupo de corrientes extrínsecas $\dot{\mathbf{J}}_{e2}$ y $\dot{\mathbf{J}}_{m2}$ que engendra los campos $\dot{\mathbf{H}}_2$ y $\dot{\mathbf{E}}_2$. Las ecuaciones de Maxwell que corresponden al caso en cuestión se ecriben en la forma

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_2 = j\omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}}_2 + \dot{\mathbf{J}}_{e2}, \tag{31.3}$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_2 = -j\omega\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{J}}_{m2}. \tag{31.4}$$

Multipliquemos escalarmente la ecuación (31.1) por $\dot{E}_2$ y la ecuación (31.4) por $\dot{H}_1$. Sustrayendo del segundo producto el primero obtenemos:

$$\dot{H}_1 \operatorname{rot} \dot{E}_2 - \dot{E}_2 \operatorname{rot} \dot{H}_1 = -j\omega\tilde{\mu}_a \dot{H}_2 \dot{H}_1 - \dot{J}_{m2}\dot{H}_1 - \\ - j\omega\tilde{\varepsilon}_a \dot{E}_1 \dot{E}_2 - \dot{J}_{e11}\dot{E}_2. \qquad (31.5)$$

Seguidamente, multipliquemos de modo escalar la ecuación (31.2) por $\dot{H}_2$, la ecuación (31.3) por $\dot{E}_1$ y sustraigamos el segundo producto del primero:

$$\dot{H}_2 \operatorname{rot} \dot{E}_1 - \dot{E}_1 \operatorname{rot} \dot{H}_2 = -j\omega\tilde{\mu}_a \dot{H}_1 \dot{H}_2 - \dot{J}_{m1}\dot{H}_2 - \\ - j\omega\tilde{\varepsilon}_a \dot{E}_2 \dot{E}_1 - \dot{J}_{e12}\dot{E}_1. \qquad (31.6)$$

Utilizando la identidad vectorial insertada en el Apéndice I, obtenemos

$$\dot{H}_1 \operatorname{rot} \dot{E}_2 - \dot{E}_2 \operatorname{rot} \dot{H}_1 = \operatorname{div} [\dot{E}_2 \dot{H}_1],$$

$$\dot{H}_2 \operatorname{rot} \dot{E}_1 - \dot{E}_1 \operatorname{rot} \dot{H}_2 = \operatorname{div} [\dot{E}_1 \dot{H}_2].$$

Empleando estas expresiones, las relaciones (31.5) y (31.6) pueden representarse en la forma

$$\operatorname{div} [\dot{E}_2 \dot{H}_1] = -j\omega\tilde{\mu}_a \dot{H}_2 \dot{H}_1 - \dot{J}_{m2}\dot{H}_1 - j\omega\tilde{\varepsilon}_a \dot{E}_1 \dot{E}_2 - \dot{J}_{e11}\dot{E}_2, \qquad (31.7)$$

$$\operatorname{div} [\dot{E}_1 \dot{H}_2] = -j\omega\tilde{\mu}_a \dot{H}_1 \dot{H}_2 - \dot{J}_{m1}\dot{H}_2 - j\omega\tilde{\varepsilon}_a \dot{E}_2 \dot{E}_1 - \dot{J}_{e12}\dot{E}_1. \qquad (31.8)$$

Sustraigamos de la expresión (31.7) la expresión (31.8):

$$\operatorname{div} [\dot{E}_2 \dot{H}_1] - \operatorname{div} [\dot{E}_1 \dot{H}_2] = -\dot{J}_{m2}\dot{H}_1 - \dot{J}_{e11}\dot{E}_2 + \dot{J}_{m1}\dot{H}_2 + \dot{J}_{e12}\dot{E}_1. \qquad (31.9)$$

La relación obtenida lleva el nombre de *lema de Lorentz en forma diferencial*. Integremos esta relación respecto al volumen V_1 que incluye todas las corrientes extrínsecas:

$$\int_{V_1} (\operatorname{div} [\dot{E}_2 \dot{H}_1] - \operatorname{div} [\dot{E}_1 \dot{H}_2])\, dV = \\ = \int_{V_1} (\dot{J}_{m1}\dot{H}_2 - \dot{J}_{m2}\dot{H}_1 + \dot{J}_{e12}\dot{E}_1 - \dot{J}_{e11}\dot{E}_2)\, dV. \qquad (31.10)$$

Aplicando el teorema de Ostrogradski—Gauss se puede escribir

$$\int_{V_1} (\operatorname{div} [\dot{E}_2 \dot{H}_1] - \operatorname{div} [\dot{E}_1 \dot{H}_2])\, dV = \oint_{S_1} ([\dot{E}_2 \dot{H}_1] - [\dot{E}_1 \dot{H}_2])\, dS,$$

donde S_1 es la superficie cerrada que acota el volumen V_1.

Entonces, la relación (31.10) puede representarse de otra forma:

$$\oint_{S_1} \{[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]\}\, d\mathbf{S} = \int_{V_1} (\dot{\mathbf{J}}_{m1}\dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{J}}_{m2}\dot{\mathbf{H}}_1 + \dot{\mathbf{J}}_{e12}\dot{\mathbf{E}}_1 - \dot{\mathbf{J}}_{e11}\dot{\mathbf{E}}_2)\, dV. \tag{31.11}$$

La relación obtenida se denomina *lema de Lorentz en forma integral para el volumen limitado* V_1.

Si el volumen se ensancha infinitamente, la integral de la izquierda se anula. Para semejante conclusión pueden servir de fundamento dos consideraciones:

1) con un ensanchamiento ilimitado del volumen V_1 la superficie S_1 que lo acota se encuentra infinitamente alejada de los manantiales del campo. En virtud de que la velocidad de propagación es finita, el campo no puede llegar hasta la superficie S_1 en un tiempo finito de observación y, por consiguiente, los campos $\dot{\mathbf{E}}$ y $\dot{\mathbf{H}}$, en la superficie limitadora, son iguales a cero;

2) como se ha establecido al analizar los campos en la zona lejana, los campos $\dot{\mathbf{E}}$ y $\dot{\mathbf{H}}$ decrecen proporcionalmente al primer grado de la distancia, con la particularidad de que no se toma en consideración la disminución complementaria de la amplitud del campo a costa de las pérdidas en el medio, que siempre existen, incluso en el espacio cósmico. Debido a esta circunstancia, la expresión subintegral $\{[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]$ decrece, de hecho, con mayor rapidez que según la ley del segundo grado de la distancia. La superficie esférica incrementa proporcionalmente al segundo grado de la distancia. Como resultado

$$\lim_{r\to\infty} \oint_{S_1} \{[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]\}\, d\mathbf{S} = 0.$$

De este modo, el lema de Lorentz para un volumen infinitamente grande (ilimitado) debe escribirse de la siguiente forma:

$$\int_{V_1} (\dot{\mathbf{J}}_{m1}\dot{\mathbf{H}}_2 - \dot{\mathbf{J}}_{m2}\dot{\mathbf{H}}_1 + \dot{\mathbf{J}}_{e12}\dot{\mathbf{E}}_1 - \dot{\mathbf{J}}_{e11}\dot{\mathbf{E}}_2)\, dV = 0. \tag{31.12}$$

§ 31.3. Teorema de reciprocidad para los vibradores elementales como ejemplo de aplicación del lema de Lorentz

Supongamos que en el espacio hay dos vibradores eléctricos elementales. Admitamos que en el primer vibrador de longitud l_1 fluye la corriente eléctrica extrínseca de densidad $\dot{\mathbf{J}}_{e11}$, mientras que en el segundo vibrador, cuya longitud es l_2, circula la corriente eléctrica extrínseca de densidad $\dot{\mathbf{J}}_{e12}$.

Supongamos que $\dot{\mathbf{E}}_{12}$ es aquel campo eléctrico que el primer vibrador crea en el lugar de disposición del segundo vibrador, y $\dot{\mathbf{E}}_{21}$, el campo eléctrico que el segundo vibrador engendra en el lugar de disposición del primer vibrador. Entonces, el lema de Lorentz para un volumen ilimitado, en correspondencia con la fórmula (31.12), se escribirá en la forma

$$\int_{V_1} (\dot{\mathbf{J}}_{e12}\dot{\mathbf{E}}_1 - \dot{\mathbf{J}}_{e11}\dot{\mathbf{E}}_2)\, dV = 0, \text{ o bien}$$

$$\int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{e12}\dot{\mathbf{E}}_1\, dV = \int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{e11}\dot{\mathbf{E}}_2\, dV.$$

Cada una de las integrales se diferenciará de cero tan sólo en aquella parte del volumen V_1 en la que existen las densidades de las corrientes $\dot{\mathbf{J}}_{e12}$ y $\dot{\mathbf{J}}_{e11}$, es decir, dentro de los límites de los volúmenes V_{v1} y V_{v2} ocupados por el primer y el segundo vibrador. Entonces, para el lema de Lorentz será justa la igualdad

$$\int_{V_{v2}} \dot{\mathbf{J}}_{e12}\dot{\mathbf{E}}_1\, dV = \int_{V_{v1}} \dot{\mathbf{J}}_{e11}\dot{\mathbf{E}}_2\, dV.$$

Debido a que los vibradores son pequeños se puede considerar que en el proceso de integración respecto a sus volúmenes los campos $\dot{\mathbf{E}}_1$ y $\dot{\mathbf{E}}_2$ cambiarán de forma insignificante, de modo que es posible tomarlos por constantes e iguales, respectivamente, a

$$\dot{\mathbf{E}}_1 = \dot{\mathbf{E}}_{12}, \quad \dot{\mathbf{E}}_2 = \dot{\mathbf{E}}_{21},$$

donde $\dot{\mathbf{E}}_{12}$ es la intensidad del campo creada por el primer vibrador en el lugar de disposición del segundo vibrador, y $\dot{\mathbf{E}}_{21}$, la intensidad del campo creada por el segundo vibrador en el lugar donde se ubica el primero.

En este caso el lema de Lorentz adquiere la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{E}}_{12} \int_{V_{v2}} \dot{\mathbf{J}}_{e12}\, dV = \dot{\mathbf{E}}_{21} \int_{V_{v1}} \dot{\mathbf{J}}_{e11}\, dV.$$

Al representar los elementos de volumen dV en las integrales de izquierda y derecha, respectivamente, en la forma

$$dV = S_2\, dl,$$
$$dV = S_1\, dl,$$

donde S_1 y S_2 son las áreas de la sección transversal de los cables del primero y del segundo vibrador, obtenemos

$$\dot{\mathbf{E}}_{12} \int_{l_2} \dot{\mathbf{J}}_{e12} S_2\, dl = \dot{\mathbf{E}}_{21} \int_{l_1} \dot{\mathbf{J}}_{e11} S_1\, dl.$$

Seguidamente, se puede escribir que

$$\dot{J}_{e12}S_2 = \dot{I}_{e12}, \quad \dot{J}_{e11}S_1 = \dot{I}_{e11},$$

donde $\dot{I}_{e12}$ e $\dot{I}_{e11}$ son las corrientes eléctricas en el segundo y en el primer vibrador.

Como quiera que en los vibradores elementales las corrientes $\dot{I}_{e12}$ e $\dot{I}_{e11}$ se suponen invariables a lo largo de los vibradores, el lema de Lorentz se escribe en la forma

$$\dot{E}_{12}\dot{I}_{e12}\int_{l_2} dl = \dot{E}_{21}\dot{I}_{e11}\int_{l_1} dl,$$

o bien

$$\dot{E}_{12}\dot{I}_{e12}l_2 = \dot{E}_{21}\dot{I}_{e11}l_1. \tag{31.13}$$

Esta relación lleva el nombre de *teorema de reciprocidad para vibradores eléctricos elementales*. El teorema permite hallar cualesquiera de las seis magnitudes que lo integran, si se conocen las cinco restantes.

Una relación análoga (el teorema de reciprocidad) se obtiene para los vibradores magnéticos elementales:

$$\dot{H}_{12}\dot{I}_{m2}l_2 = \dot{H}_{21}\dot{I}_{m1}l_1. \tag{31.14}$$

El teorema de reciprocidad puede hallarse para vibradores eléctricos y magnéticos elementales. En este caso el lema de Lorentz se escribe en la forma

$$\int_{V_1} (\dot{J}_{m1}\dot{H}_2 + \dot{J}_{e12}\dot{E}_1)\, dV = 0.$$

El posterior tratamiento matemático análogo de esta expresión nos conduce al teorema buscado:

$$\dot{H}_{21}\dot{I}_{m1}l_1 = -\dot{E}_{12}\dot{I}_{e12}l_2. \tag{31.15}$$

CAPITULO 32

Excitación del campo electromagnético en las guías de ondas

§ 32.1. Planteamiento del problema

Son posibles diferentes métodos de excitación del campo del tipo prefijado en las guías de ondas. En el presente capítulo se van a exponer esquemáticamente algunos de estos métodos y se van a de-

terminar, empleando el lema de Lorentz, las expresiones generales que permiten calcular la amplitud del campo en la guía de ondas como resultado de la acción del sistema prefijado de corrientes extrínsecas.

§ 32.2. Principios generales de la excitación en las guías de ondas de un campo del tipo prefijado

Los campos en las guías de ondas pueden excitarse empleando dispositivos de antenas o dispositivos excitadores de los siguientes tipos:

a) de varilla;
b) de cuadro o en bucle;
c) ranurado.

Los principios generales de ubicación de los dispositivos excitadores consisten en lo siguiente:

1) al excitar el campo por medio de un dispositivo del tipo de varilla, la varilla (o las varillas) debe situarse en el lugar en que la

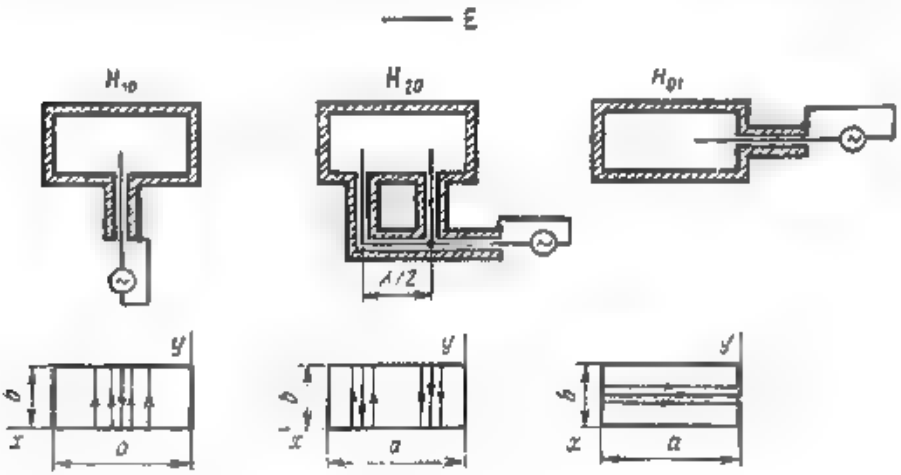

FIG. 32.1

intensidad del campo eléctrico en la guía de ondas es máxima. El eje de la varilla debe coincidir con el campo $\dot{E}$;

2) al excitar el campo mediante un dispositivo del tipo de cuadro o en bucle, el mismo debe disponerse en el lugar donde la intensidad del campo magnético en la guía de ondas es máxima. El plano del bucle debe ser perpendicular al campo $\dot{H}$;

3) al excitar el campo, empleando una antena del tipo ranurado, la ranura debe orientarse de modo que cruce las líneas de corriente en las paredes de la guía de ondas.

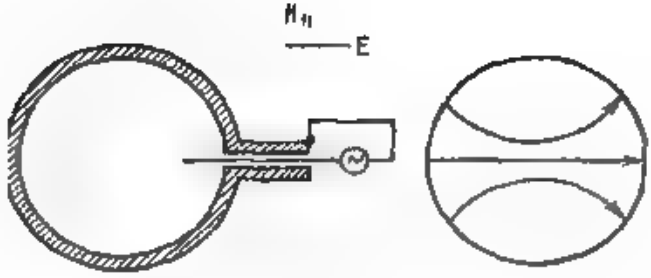

FIG. 32.2

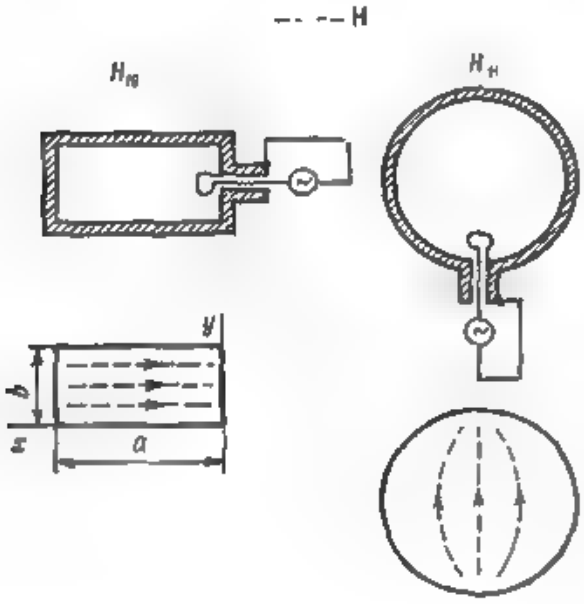

FIG. 32.3

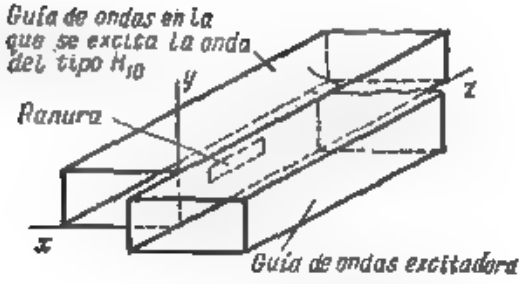

FIG. 32.4

En la fig. 32.1 se representan esquemáticamente los métodos para excitar campos de diferentes tipos en una guía de ondas rectangular, empleando antenas de varilla.

En la fig. 32.2 se expone el ejemplo de cómo una antena de varilla excita la onda del tipo H_{11} en una guía de ondas circular, mientras que la fig. 32.3 ilustra la excitación de la onda del tipo H_{10} en una guía de ondas rectangular y de la onda del tipo H_{11} en una guía de ondas circular utilizando para ello antenas en bucle o de cuadro.

En la fig. 32.4 se muestra esquemáticamente la excitación de la onda del tipo H_{10} en una guía de ondas rectangular con ayuda de una ranura y de una segunda guía de ondas en que esta onda se propaga.

§ 32.3. Condiciones de ortogonalidad de las ondas en las guías de ondas

En el caso de ausencia de las corrientes extrínsecas $\dot{J}_{el}$ y $\dot{J}_m$, el lema de Lorentz para un volumen limitado, de acuerdo con la fórmula (31.11), tendrá la forma

$$\oint_{S_1} \{[\dot{E}_2\dot{H}_1] - [\dot{E}_1\dot{H}_2]\}\, dS = 0. \qquad (32.1)$$

Examinemos una guía de ondas metálica cuyo volumen está acotado por planos imaginarios trazados en las secciones z_a y z_b, tal como se muestra en la fig. 32.5.

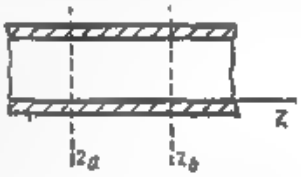

FIG. 32.5

En la expresión (32.1) elijamos como campo $\dot{E}_1$, $\dot{H}_1$ la onda de un tipo arbitrario, y como campo $\dot{E}_2$, $\dot{H}_2$, la onda de otro tipo cualquiera. Escribamos el lema de Lorentz para la superficie cerrada S_1 que consta de dos secciones transversales de la guía de ondas en los puntos z_a, z_b, designando su área por S_a, S_b, respectivamente, y de la superficie lateral de la guía de ondas encerrada entre estas secciones. Si consideramos que las paredes metálicas de la guía de ondas son ideales y empleamos las condiciones límites junto a la superficie del metal ideal, podemos decir que junto a las paredes de la guía de ondas los campos $\dot{H}_1$ y $\dot{H}_2$ están orientados tangencialmente y los campos $\dot{E}_1$, $\dot{E}_2$, normalmente respecto a las paredes. Entonces, los productos vectoriales $[\dot{E}_2\dot{H}_1]$, $[\dot{E}_1\dot{H}_2]$ se orientarán tangencialmente respecto a las paredes de la guía de ondas y el producto escalar de estos vectores por el elemento de superficie dS en el lema de Lorentz será igual a cero, puesto que la orientación del elemento de superficie respecto a las paredes es normal. En este caso, la integral por la

superficie cerrada S_1 en el lema de Lorentz (32.1) se reducirá a las integrales por las áreas de las secciones transversales S_a y S_b:

$$\oint_{S_1} \{[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]\}\, d\mathbf{S} =$$

$$= \int_{S_a} \{[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]\}\, dS_a + \int_{S_b} \{[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]\}\, d\mathbf{S}_b =$$

$$= \int_{S_a} \{[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]\}\, (-1_z)\, dS +$$

$$+ \int_{S_b} \{[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]\}\, 1_z\, dS = 0,$$

de donde

$$\int_{S_a} \{[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]\}\, d\mathbf{S} = \int_{S_b} \{[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]\, d\mathbf{S}. \qquad (32.2)$$

La expresión obtenida permite sacar la conclusión de que las integrales que forman parte de ésta son independientes respecto a la coordenada z debido a que el valor de estas integrales es invariable en las diferentes secciones de la guía de ondas.

Supongamos que la onda $\dot{\mathbf{E}}_2$, $\dot{\mathbf{H}}_2$ se propaga en el sentido positivo del eje z y la onda $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_1$ en su sentido negativo. En este caso la velocidad de fase de la onda $\dot{\mathbf{E}}_2$, $\dot{\mathbf{H}}_2$ será positiva, mientras que la de la onda $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_1$ será negativa. En estas circunstancias resultan justas las expresiones:

$$\dot{\mathbf{E}}_2 = \dot{\mathbf{E}}_{20}\, e^{-jh_2 z},$$
$$\dot{\mathbf{H}}_2 = \dot{\mathbf{H}}_{20}\, e^{-jh_2 z}, \qquad (32.3)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_1 = \dot{\mathbf{E}}_{10}\, e^{jh_1 z},$$
$$\dot{\mathbf{H}}_1 = \dot{\mathbf{H}}_{10}\, e^{jh_1 z}, \qquad (32.4)$$

Al sustituir estas expresiones en las integrales de la relación (32.2) y eliminar los índices a y b de las áreas S, obtenemos

$$\int_S \{[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{E}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]\}\, d\mathbf{S} =$$

$$= \int_S \{[\dot{\mathbf{E}}_{20}\dot{\mathbf{H}}_{10}] - [\dot{\mathbf{E}}_{10}\dot{\mathbf{H}}_{20}]\}\, d\mathbf{S}\, e^{-j(h_2 - h_1)z}. \qquad (32.5)$$

Como se ha señalado, la integral de este tipo no depende de la coordenada z, hecho que se cumple al observarse las condiciones.

$$\int_S \{[\dot{E}_{20}\dot{H}_{10}] - [\dot{E}_{10}\dot{H}_{20}]\}\, dS = 0, \tag{32.6}$$

o bien

$$h_2 - h_1 = 0, \quad h_2 = h_1. \tag{32.7}$$

Cuando

$$h_2 \neq h_1 \tag{32.8}$$

debe cumplirse la igualdad (32.6) la cual, por ser justa la expresión (32.5) conduce a la fórmula

$$\int_S \{[\dot{E}_2\dot{H}_1] - [\dot{E}_1\dot{H}_2]\}\, dS = 0. \tag{32.9}$$

Ahora, examinemos el caso en que los campos $\dot{\mathbf{E}}_2$, $\dot{\mathbf{H}}_2$ y $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_1$ se propagan en una dirección, por ejemplo, en la dirección positiva del eje z. Entonces, son válidas las expresiones (32.3) y las relaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_1 &= \dot{\mathbf{E}}_{10}\, e^{-jh_1 z}, \\ \dot{\mathbf{H}}_1 &= \dot{\mathbf{H}}_{10}\, e^{-jh_1 z}, \end{aligned} \tag{32.10}$$

Al sustituir estas expresiones en las integrales (32.2) y eliminar los índices a y b de las áreas S, obtenemos

$$\int_S \{[\dot{E}_2\dot{H}_1] - [\dot{E}_1\dot{H}_2]\}\, dS =$$

$$= \int_S \{[\dot{E}_{20}\dot{H}_{10}] - [\dot{E}_{10}\dot{H}_{20}]\}\, dS\, e^{-j(h_2+h_1)z}. \tag{32.11}$$

La independencia de esta integral respecto a la coordenada z se cumple tan sólo al observarse la igualdad (32.6) que conduce a la fórmula (32.9)

De este modo, si las ondas en la guía se propagan en diferentes sentidos y los números de onda longitudinales de estas ondas no son iguales entre sí, o bien, si las ondas se propagan en un sentido, independientemente de la correlación de los números de onda, entonces se observa la fórmula (32.9).

Una integral del tipo $\int_S \{[\dot{E}_2\dot{H}_1] - [\dot{E}_1\dot{H}_2]\}\, dS$ puede ser diferente de cero sólo cuando son iguales entre sí los números de onda longitudinales de dos ondas y cuando éstas se propaguen en distintas direcciones. Estas condiciones se denominan *condiciones de ortogonalidad de las ondas en las guías de ondas.*

§ 32.4. Determinación de los coeficientes de amplitud del campo excitado en las guías de ondas por un sistema dado de corrientes extrínsecas

Las condiciones de ortogonalidad del campo y el lema de Lorentz pueden aprovecharse al determinar la amplitud del campo excitado en las guías de ondas por un sistema dado de corrientes extrínsecas.

Supongamos que existe un sistema de corrientes extrínsecas en el volumen V_1 que se encuentra entre las superficies S_a y S_b dispuestas en las secciones $z = z_a$, $z = z_b$, como se muestra en la fig. 32.6.

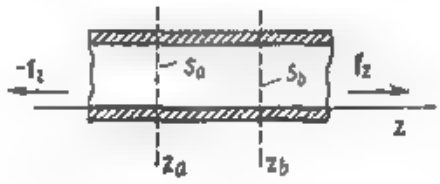

FIG. 32.6

Para resolver el problema hay que hacer uso del lema de Lorentz (31.11). Supongamos que para simplificar la excitación del campo se realiza por el sistema de corrientes extrínsecas $\dot{\mathbf{J}}_{e12}$, mientras que las demás corrientes son iguales a cero:

$$\dot{\mathbf{J}}_{m1} = \dot{\mathbf{J}}_{m2} = \dot{\mathbf{J}}_{e11} = 0. \tag{32.12}$$

En estas condiciones el lema de Lorentz se escribirá en la forma

$$\oint_{S_1} \{[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]\}\, d\mathbf{S} = \int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{e12}\dot{\mathbf{E}}_1\, dV. \tag{32.13}$$

Los vectores $\dot{\mathbf{E}}_2$ y $\dot{\mathbf{E}}_1$ deben acercarse en dirección normal a las paredes de las guías de ondas confeccionadas de un metal ideal. En virtud de ello, los productos vectoriales $[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1]$ y $[\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]$ serán orientados tangencialmente a las paredes de la guía de ondas. Los productos escalares de estos vectores por el elemento del área $d\mathbf{S}$ de las paredes de la guía de ondas en la integral de superficie de la expresión (32.13) será iguales a cero, y esta integral debe tomarse tan sólo respecto a las áreas de las secciones transversales S_a y S_b. En este caso el lema de Lorentz (32.13) toma la forma

$$\int_{S_a} \{[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]\}\,(-1_z)\, dS + \int_{S_b} \{[\dot{\mathbf{E}}_2\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_2]\}\,1_z\, dS = \int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{e12}\dot{\mathbf{E}}_1\, dV. \tag{32.14}$$

El campo $\dot{\mathbf{E}}_2$, $\dot{\mathbf{H}}_2$, excitado por las corrientes extrínsecas, cuyas densidades son iguales a $\mathbf{J}_{e12}$, puede representar, en el caso general, la superposición de ondas de diferentes tipos.

Como se sabe un tipo concreto de onda se designa por $\mathbf{E}_{mn}$ o $\mathbf{H}_{mn}$. Para simplificar la anotación vamos a designar el vector total del campo eléctrico o magnético de una onda de tipo concreto con el mismo índice k. Entonces, para la región de la guía de ondas correspondiente a los valores de $z \geqslant z_b$, el campo que se propaga en dirección de los valores positivos del eje z puede representarse en la forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_k \dot{\mathbf{E}}_k, \\ \dot{\mathbf{H}}_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_k \dot{\mathbf{H}}_k. \end{aligned} \tag{32.15}$$

Aquí $\dot{A}_k$ son los coeficientes de amplitud de la onda de un tipo determinado con el índice k.

Para la zona de la guía de ondas correspondiente a los valores de $z \leqslant z_a$, el campo que se propaga en la dirección de los valores negativos del eje z se expresa de forma análoga:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k} \dot{\mathbf{E}}_{-k}, \\ \dot{\mathbf{H}}_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k} \dot{\mathbf{H}}_{-k}, \end{aligned} \tag{32.16}$$

donde $\dot{A}_{-k}$ son los coeficientes de amplitud de la onda de un tipo concreto.

La presencia de dos campos que se propagan en diferentes direcciones se debe a que los dispositivos radiadores, en los cuales actúan las corrientes extrínsecas con densidades iguales a $\dot{\mathbf{J}}_{e12}$, están dispuestos en la región limitada por las secciones z_a y z_b, creando ondas electromagnéticas que se propagan a partir de esta región en ambas direcciones.

Entendemos como campo $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_1$ en la expresión (32.14) la onda del tipo concreto $\dot{\mathbf{E}}_{mn}$ o $\dot{\mathbf{H}}_{mn}$ cuyo coeficiente de amplitud es necesario determinar. Este campo, en las ulteriores operaciones con el lema de Lorentz, se considera auxiliar. Se supone que el campo auxiliar se crea por un sistema propio de corrientes extrínsecas que se encuentra fuera de los límites de la zona considerada de la guía de ondas y no tiene relación con las densidades de las corrientes $\mathbf{J}_{e12}$.

Si el sistema de corrientes auxiliares está situado en la parte de la guía de ondas para la cual es justa la desigualdad $z < z_a$, entonces, la onda electromagnética engendrada por estas corrientes, se propagará, dentro de la zona que nos interesa de la guía de ondas,

en dirección de los valores positivos del eje z. Anotaremos este campo como $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$. Si el sistema de corrientes auxiliares está situado en la parte de la guía de ondas para la cual tiene lugar la desigualdad $z > z_b$, la onda electromagnética creada por estas corrientes se propagará, en la zona que nos interesa de la guía de ondas, en el sentido de los valores negativos del eje z. En este caso, el campo auxiliar se escribirá en la forma $\dot{\mathbf{E}}_{-1}, \dot{\mathbf{H}}_{-1}$.

Examinemos el primer caso, cuando el campo auxiliar se propaga en dirección de los valores positivos del eje z y se anota como $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_1$. Sustituyamos en el lema de Lorentz (32.14) las expresiones (32.15) y (32.16), así como el campo auxiliar $\dot{\mathbf{E}}_2$, $\dot{\mathbf{H}}_2$:

$$\int_{S_a} \left\{ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k} \dot{\mathbf{E}}_{-k} \dot{\mathbf{H}}_1 \right] - \left[\dot{\mathbf{E}}_1 \sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k} \dot{\mathbf{H}}_{-k} \right] \right\} (-1_z)\, dS + \\ + \int_{S_b} \left\{ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_k \dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{H}}_1 \right] - \left[\dot{\mathbf{E}}_1 \sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_k \dot{\mathbf{H}}_k \right] \right\} 1_z\, dS = \int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{e12} \dot{\mathbf{E}}_1\, dV. \quad (32.17)$$

Basándose en las condiciones de ortogonalidad de las ondas en las guías de ondas (véase el § 32.3), la integral del tipo $\int_S \{[\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2]\}\, dS$ es diferente de cero sólo en el caso en que los campos $\mathbf{E}_2\mathbf{H}_2$ y $\mathbf{E}_1\mathbf{H}_1$ se propagan en direcciones distintas y los números de onda longitudinales de estos campos son iguales entre sí.

En la expresión (32.17) las ondas $\dot{\mathbf{E}}_{-k}\dot{\mathbf{H}}_{-k}$ y $\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_1$ se propagan en diferentes direcciones. Por consiguiente, la integral

$$\int_{S_a} \left\{ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k} \dot{\mathbf{E}}_{-k} \dot{\mathbf{H}}_1 \right] - \left[\dot{\mathbf{E}}_1 \sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k} \dot{\mathbf{H}}_{-k} \right] \right\} (-1_z)\, dS \neq 0$$

en el caso de que el número de onda longitudinal de la onda $\dot{\mathbf{E}}_{-k}\dot{\mathbf{H}}_{-k}$ es igual al número de onda longitudinal de la onda $\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_1$. En otras palabras, la integral no es igual a cero cuando el tipo de la onda $\dot{\mathbf{E}}_{-k}$, $\dot{\mathbf{H}}_{-k}$ es análogo al tipo de la onda $\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_1$ ($k = 1$), con la única diferencia que estas ondas se propagan en distintas direcciones. En este caso, en las series $\sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k}\dot{\mathbf{E}}_{-k}$ y $\sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k}\dot{\mathbf{H}}_{-k}$ se conservan sólo los términos $\dot{A}_{-1}\dot{\mathbf{E}}_{-1}$ y $\dot{A}_{-1}\dot{\mathbf{H}}_{-1}$. La segunda integral por la superficie S_b en la expresión (32.17) es igual a cero, en virtud de la condición de ortogonalidad de las ondas, puesto que las ondas $\dot{\mathbf{E}}_k$, $\dot{\mathbf{H}}_k$ y $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_1$ se propagan en el mismo sentido. Teniendo en cuenta lo expuesto,

la expresión (32.17) puede escribirse en la forma

$$\int_{S_a} \{[\dot{A}_{-1}\dot{\mathbf{E}}_{-1}\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{A}_{-1}\dot{\mathbf{H}}_{-1}]\}(-1_z)\,dS = \int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{e12}\dot{\mathbf{E}}_1\,dV,$$

o bien

$$\dot{A}_{-1}\int_{S_a} \{[\dot{\mathbf{E}}_{-1}\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_{-1}]\}1_z\,dS = -\int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{e12}\dot{\mathbf{E}}_1\,dV. \quad (32.18)$$

Esta expresión permite hallar el coeficiente de amplitud $\dot{A}_{-1}$ de la onda del tipo dado que se propaga en dirección de los valores negativos del eje z:

$$\dot{A}_{-1} = -\frac{\int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{e12}\dot{\mathbf{E}}_1\,dV}{\int_{S_a} [(\dot{\mathbf{E}}_{-1}\dot{\mathbf{H}}_1] - [\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_{-1}])1_z\,dS}. \quad (32.19)$$

Seguidamente, analicemos el segundo caso en que el campo auxiliar se propaga en la dirección de los valores negativos de z, anotándose en forma de $\dot{\mathbf{E}}_{-1}$, $\dot{\mathbf{H}}_{-1}$. Sustituyamos en el lema de Lorentz (32.14) las expresiones (32.15) y (32.16) como el campo $\dot{\mathbf{E}}_2$, $\dot{\mathbf{H}}_2$ y el campo auxiliar como el campo $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_1$:

$$\int_{S_a} \left\{\left[\sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k}\dot{\mathbf{E}}_{-k}\dot{\mathbf{H}}_{-1}\right] - \left[\dot{\mathbf{E}}_{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k}\dot{\mathbf{H}}_{-k}\right]\right\}(-1_z)\,dS +$$

$$+\int_{S_b} \left\{\left[\sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_k\dot{\mathbf{E}}_k\dot{\mathbf{H}}_{-1}\right] - \left[\dot{\mathbf{E}}_{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_k\dot{\mathbf{H}}_k\right]\right\}1_z\,dS =$$

$$= \int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{e12}\dot{\mathbf{E}}_1\,dV. \quad (32.20)$$

Basándose en las condiciones de ortogonalidad de las ondas en las guías de ondas, se tiene:

$$\int_{S_a} \left\{\left[\sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k}\dot{\mathbf{E}}_{-k}\dot{\mathbf{H}}_{-1}\right] - \left[\dot{\mathbf{E}}_{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_{-k}\dot{\mathbf{H}}_{-k}\right]\right\}(-1_z)\,dS = 0.$$

Por medio de razonamientos análogos a los expuestos anteriormente, la expresión (32.20) puede representarse en la forma

$$\dot{A}_1\int_{S_b} \{[\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{H}}_{-1}] - [\dot{\mathbf{E}}_{-1}\dot{\mathbf{H}}_1]\}1_z\,dS = \int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{e12}\dot{\mathbf{E}}_{-1}\,dV.$$

Esta fórmula permite determinar el coeficiente de amplitud $\dot{A}_1$ de la onda del tipo buscado que se propaga en la dirección de los

valores positivos del eje z:

$$\dot{A}_1 = \frac{\int\limits_V \dot{J}_{el2}\dot{E}_{-1}\,dV}{\oint\limits_{S_0} \{[\dot{E}_1\dot{H}_{-1}] - [\dot{E}_{-1}\dot{H}_1]\}\,t_z\,dS}. \tag{32.21}$$

Cuando se trata de ondas del tipo magnético el curso de los razonamientos es análogo. En este caso, en el lema de Lorentz (31.11) se supone

$$\dot{J}_{m1} = \dot{J}_{el1} = \dot{J}_{el2} = 0, \tag{32.22}$$

y éste toma la forma

$$\oint\limits_{S_1} \{[\dot{E}_2\dot{H}_1] - [\dot{E}_1\dot{H}_2]\}\,dS = -\int\limits_{V_1} \dot{J}_{m2}\dot{H}_1\,dV. \tag{32.23}$$

Al designar por $\dot{B}_{-1}$ el coeficiente de amplitud del campo buscado que se propaga en dirección de los valores negativos del eje z, y por $\dot{B}_1$ el coeficiente de amplitud del campo buscado que se propaga en dirección de los valores positivos del eje z, obtenemos las siguientes expresiones para estos coeficientes:

$$\dot{B}_{-1} = \frac{\int\limits_{V_1} \dot{J}_{m1}\dot{H}_1\,dV}{\oint\limits_{S_0} \{[\dot{E}_{-1}\dot{H}_1] - [\dot{E}_1\dot{H}_{-1}]\}\,t_z\,dS}, \tag{32.24}$$

$$\dot{B}_1 = -\frac{\int\limits_{V_1} \dot{J}_{m1}\dot{H}_{-1}\,dV}{\oint\limits_{S_0} \{[\dot{E}_1\dot{H}_{-1}] - [\dot{E}_{-1}\dot{H}_1]\}\,t_z\,dS}. \tag{32.25}$$

En el Apéndice IV se inserta un ejemplo de cálculo del coeficiente de amplitud de la onda del tipo H_{10} en una guía de ondas rectangular.

CAPITULO 33

Excitación del campo electromagnético en resonadores de cavidad

§ 33.1. Planteamiento del problema

La creación de ondas del tipo prefijado en los resonadores de cavidad, igual que la excitación del campo del tipo dado en las guías de ondas, puede realizarse por los distintos procedimientos descritos en el § 32.2.

Si el campo se excita mediante un dispositivo del tipo de varilla (sonda), ésta debe disponerse en el lugar de mayor magnitud del campo eléctrico de la onda del tipo dado en el resonador y orientarse paralelamente a las líneas de fuerza eléctricas.

Cuando el campo se excita empleando un dispositivo del tipo de bucle, este último debe situarse en el lugar de la mayor magnitud del campo magnético de la onda del tipo dado en el resonador y orientarse de tal modo que el plano del bucle sea atravesado por las líneas de fuerza magnéticas.

En el caso de que para la excitación se utiliza una ranura, dicha ranura debe cortar las líneas de corriente creadas en las paredes del resonador por la onda del tipo prefijado.

En el presente capítulo se examinarán los problemas concernientes a la excitación del campo electromagnético en los resonadores de cavidad por el sistema dado de corrientes extrínsecas y se determinarán las expresiones generales para los coeficientes de amplitud de una onda del tipo prefijado.

§ 33.2. Condiciones de ortogonalidad de las ondas en los resonadores de cavidad

Supongamos que en el resonador de cavidad, privado de pérdidas, existen oscilaciones propias de los tipos k y q.

Entenderemos por k y q conjuntos determinados de índices m, n, p que caracterizan el campo en el resonador. Entonces, para cada una de las oscilaciones serán justas las siguientes ecuaciones de Maxwell, escritas sin tener en cuenta las corrientes extrínsecas:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_k = j\omega_k \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_k, \tag{33.1}$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_k = -j\omega_k \mu_a \dot{\mathbf{H}}_k, \tag{33.2}$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_q = j\omega_q \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_q, \tag{33.3}$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_q = -j\omega_q \mu_a \dot{\mathbf{H}}_q. \tag{33.4}$$

Escribamos las ecuaciones (33.3) y (33.4) para los valores conjugados de los vectores $\dot{\mathbf{E}}_q^*$ y $\dot{\mathbf{H}}_q^*$:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_q^* = -j\omega_q \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_q^*, \tag{33.5}$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_q^* = j\omega_q \mu_a \dot{\mathbf{H}}_q^*. \tag{33.6}$$

Multipliquemos escalarmente la ecuación (33.6) por $\dot{\mathbf{H}}_k$ y la ecuación (33.1) por $\dot{\mathbf{E}}_q^*$, sustrayendo después término a término del primer producto el segundo:

$$\dot{\mathbf{H}}_k \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_q^* - \dot{\mathbf{E}}_q^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_k = j\omega_q \mu_a \dot{\mathbf{H}}_q^* \dot{\mathbf{H}}_k - j\omega_k \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{E}}_q^*. \tag{33.7}$$

Multipliquemos escalarmente la ecuación (33.2) por $\dot{\mathbf{H}}_q^*$ y la ecuación (33.3) por $\dot{\mathbf{E}}_k$, sustrayendo después término a término el segundo producto del primero:

$$\dot{\mathbf{H}}_q^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_k - \dot{\mathbf{E}}_k \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_q^* = -j\omega_k \mu_a \dot{\mathbf{H}}_k \dot{\mathbf{H}}_q^* + j\omega_q \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{E}}_k. \tag{33.8}$$

Luego, hagamos uso de la identidad vectorial $\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b} = \operatorname{div} [\mathbf{ab}]$. Como resultado, las relaciones (33.7) y (33.8) se escribirán en la forma

$$\operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{H}}_k] = j\omega_q \mu_a \dot{\mathbf{H}}_q^* \dot{\mathbf{H}}_k - j\omega_k \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{E}}_q^*, \tag{33.9}$$

$$\operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{H}}_q^*] = -j\omega_k \mu_a \dot{\mathbf{H}}_k \dot{\mathbf{H}}_q^* + j\omega_q \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{E}}_k. \tag{33.10}$$

Integremos las expresiones (33.9) y (33.10) respecto al volumen V_1 y utilicemos el teorema de Ostrogradski—Gauss (2.1):

$$\oint_{S_1} [\dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{H}}_k] \, dS = j\omega_q \mu_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_q^* \dot{\mathbf{H}}_k \, dV - j\omega_k \varepsilon_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{E}}_q^* \, dV, \tag{33.11}$$

$$\oint_{S_1} [\dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{H}}_q^*] \, dS = -j\omega_k \mu_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_k \dot{\mathbf{H}}_q^* \, dV + j\omega_q \varepsilon_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{E}}_k \, dV. \tag{33.12}$$

En el caso de un metal ideal, los campos $\dot{\mathbf{E}}_q^*$ y $\dot{\mathbf{E}}_k$ se acercan normalmente a las paredes del resonador y los vectores que surgen como resultado de los productos vectoriales $[\dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{H}}_k]$, $[\dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{H}}_q^*]$ estarán orientados tangencialmente hacia las mismas paredes. Entonces, los productos escalares de estos vectores por el elemento del área dS orientado esto último normalmente a las paredes del resonador serán iguales a cero. También serán iguales a cero las integrales de superficie en las expresiones (33.11), (33.12). En este caso aparecen las relaciones:

$$\omega_q \mu_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_q^* \dot{\mathbf{H}}_k \, dV = \omega_k \varepsilon_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{E}}_q^* \, dV, \tag{33.13}$$

$$\omega_k \mu_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_k \dot{\mathbf{H}}_q^* \, dV = \omega_q \varepsilon_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{E}}_k \, dV. \tag{33.14}$$

Multipliquemos la expresión (33.13) por ω_k y la expresión (33.14) por ω_q, sustrayendo luego el segundo producto del primero:

$$(\omega_k^2 - \omega_q^2)\,\varepsilon_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{E}}_q^*\, dV = 0. \tag{33.15}$$

Multipliquemos ahora la expresión (33.13) por ω_q y la expresión (33.14) por ω_k, sustrayendo después el segundo producto del primero:

$$(\omega_q^2 - \omega_k^2)\,\mu_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_k \dot{\mathbf{H}}_q^*\, dV = 0. \tag{33.16}$$

A partir de las relaciones (33.15) y (33.16) se infiere: para $\omega_q \neq \omega_k$, $q \neq k$

$$\int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{E}}_q^*\, dV = \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_k \dot{\mathbf{H}}_q^*\, dV = 0, \tag{33.17}$$

para $\omega_q = \omega_k$, $q = k$

$$\int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_k \dot{\mathbf{E}}_q^*\, dV \neq 0, \quad \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_k \dot{\mathbf{H}}_q^*\, dV \neq 0. \tag{33.18}$$

Basándose en las relaciones (33.13) y (33.14) se puede hacer la conclusión que cuando $q = k$

$$\mu_a \int_{V_1} |\, \dot{\mathbf{H}}_q \,|^2\, dV = \varepsilon_a \int_{V_1} |\, \dot{\mathbf{E}}_q \,|^2\, dV. \tag{33.19}$$

Las fórmulas (33.17) y (33.18) llevan el nombre de *condiciones de ortogonalidad de las ondas en los resonadores de cavidad.*

§ 33.3. Determinación de los coeficientes de amplitud del campo excitado en los resonadores de cavidad por un sistema dado de corrientes extrínsecas

Supongamos que la excitación del campo en el resonador de cavidad se lleva a cabo mediante un sistema dado de corrientes eléctricas extrínsecas de densidad $\dot{\mathbf{J}}_{e1}$. En este caso el campo excitado $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{H}}$ se somete a las siguientes ecuaciones de Maxwell:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon_a \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}_{e1}, \tag{33.20}$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}}. \tag{33.21}$$

En ausencia de la corriente extrínseca, hubieran servido de solución de las ecuaciones homogéneas de Maxwell las oscilaciones propias cuyo número de tipos, como se ha establecido en el capítulo 21, es infinitamente grande. En el caso general los campos $\dot{\mathbf{E}}$ y $\dot{\mathbf{H}}$ hubieran representado la superposición de un número infinito

de ondas de diferentes tipos:

$$\dot{\mathbf{E}} = \sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_k \dot{\mathbf{E}}_k, \tag{33.22}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \sum_{k=0}^{\infty} \dot{A}_k \dot{\mathbf{H}}_k. \tag{33.23}$$

La introducción del dispositivo excitador con la densidad de la corriente $\dot{\mathbf{J}}_{e1}$ origina cierta distorsión del cuadro del campo en el resonador en comparación con las oscilaciones propias, distorsión que es más notoria en la proximidad inmediata del dispositivo excitador. No obstante, debido a que el factor de mérito de los resonadores es alto, el cuadro de los campos eléctrico y magnético, que surgen a resultas de la acción de la corriente extrínseca, se distingue poco del aspecto de las oscilaciones propias. La finalidad del estudio que se lleva a cabo es hallar los coeficientes de amplitud de las ondas del tipo prefijado.

Designemos con la letra q el índice correspondiente a la onda buscada. Supongamos con cierta aproximación que esta onda será próxima a una de las oscilaciones propias de las series (32.22), (32.23). Los campos $\dot{\mathbf{E}}_q$, $\dot{\mathbf{H}}_q$, como oscilaciones propias de resonancia, deben satisfacer las ecuaciones homogéneas de Maxwell:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_q = j\omega_r \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_q, \tag{33.24}$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_q = -j\omega_r \mu_a \dot{\mathbf{H}}_q, \tag{33.25}$$

donde ω_r es la frecuencia de resonancia.

A continuación, realicemos unas operaciones matemáticas semejantes a aquellas que se han efectuado en el párrafo anterior (§ 33.2). Escribamos las ecuaciones (33.24) y (33.25) para los valores conjugados de los vectores $\dot{\mathbf{E}}_q^*$ y $\dot{\mathbf{H}}_q^*$:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_q^* = -j\omega_r \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_q^*, \tag{33.26}$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_q^* = j\omega_r \mu_a \dot{\mathbf{H}}_q^*. \tag{33.27}$$

Multipliquemos escalarmente la ecuación (33.27) por $\dot{\mathbf{H}}$ y la ecuación (33.26) por $\dot{\mathbf{E}}_q^*$, sustrayendo después término a término, el segundo producto del primero:

$$\dot{\mathbf{H}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_q^* - \dot{\mathbf{E}}_q^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega_r \mu_a \dot{\mathbf{H}}_q^* \dot{\mathbf{H}} - j\omega \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}_q^* - \dot{\mathbf{J}}_{e1} \dot{\mathbf{E}}_q^*. \tag{33.28}$$

Luego, multipliquemos escalarmente la ecuación (33.21) por $\dot{\mathbf{H}}_q^*$ y la ecuación (33.26) por $\dot{\mathbf{E}}$, sustrayendo después el segundo producto del primero:

$$\dot{\mathbf{H}}_q^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_q^* = -j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}_q^* + j\omega_r \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{E}}. \tag{33.29}$$

De acuerdo con las identidades vectoriales se pueden escribir las relaciones

$$\dot{\mathbf{H}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_q^* - \dot{\mathbf{E}}_q^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{H}}], \tag{33.30}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_q^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_q^* = \operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}_q^*]. \tag{33.31}$$

Haciendo uso de estas identidades se pueden escribir las ecuaciones (33.28) y (33.29) en la forma

$$\operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{H}}] = j\omega_r \mu_a \dot{\mathbf{H}}_q^* \dot{\mathbf{H}} - j\omega \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}_q^* - \dot{\mathbf{J}}_{e1} \dot{\mathbf{E}}_q^*,$$

$$\operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}_q^*] = -j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}_q^* + j\omega_r \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{E}}.$$

Integremos las ecuaciones obtenidas respecto al volumen V_1 y apliquemos el teorema de Ostrogradski—Gauss, en virtud del cual

$$\int_{V_1} \operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{H}}] \, dV = \oint_{S_1} [\dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{H}}] \, d\mathbf{S},$$

$$\int_{V_1} \operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}_q^*] \, dV = \oint_{S_1} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}_q^*] \, d\mathbf{S},$$

$$\oint_{S_1} [\dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{H}}] \, d\mathbf{S} = j\omega_r \mu_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_q^* \dot{\mathbf{H}} \, dV - j\omega \varepsilon_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}_q^* \, dV - \int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{e1} \dot{\mathbf{E}}_q^* \, dV, \tag{33.32}$$

$$\oint_{S_1} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}_q^*] \, d\mathbf{S} = -j\omega \mu_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}_q^* \, dV + j\omega_r \varepsilon_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{E}} \, dV. \tag{33.33}$$

De conformidad con las condiciones límites junto a la superficie del metal ideal, los campos $\dot{\mathbf{E}}$ y $\dot{\mathbf{E}}_q^*$ se acercan normalmente a las paredes del resonador. En este caso, los productos vectoriales $[\dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{H}}]$ y $[\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}_q^*]$ estarán orientados tangencialmente respecto a las paredes del resonador. Los productos escalares de estos vectores por el elemento del área $d\mathbf{S}$, orientado este último normalmente a las paredes del resonador, son iguales a cero y las expresiones (33.32) y (33.33) se escriben en la forma

$$j\omega_r \mu_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_q^* \dot{\mathbf{H}} \, dV - j\omega \varepsilon_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}_q^* \, dV - \int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{e1} \dot{\mathbf{E}}_q^* \, dV = 0, \tag{33.34}$$

$$-j\omega \mu_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}_q^* \, dV + j\omega_r \varepsilon_a \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{E}} \, dV = 0. \tag{33.35}$$

Como se ha señalado, los campos $\dot{\mathbf{E}}$ y $\dot{\mathbf{H}}$, con cierta aproximación, pueden considerarse como oscilaciones propias del resonador. En este caso, por su estructura general dichos campos son próximos a las series (33.22) y (33.23). A las oscilaciones propias se les puede

aplicar las condiciones de ortogonalidad (33.17) y (33.18), a raíz de las cuales las integrales $\int\limits_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_q^* \dot{\mathbf{H}}\, dV$, $\int\limits_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{E}} dV$ son diferentes de cero tan sólo en el caso de que el índice q sea igual al índice k en las series (33.22) y (33.23). En estas circunstancias, las expresiones (33.34) y (33.35) toman la siguiente forma:

$$j\omega_r \mu_a \dot{A}_q \int\limits_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_q^* \dot{\mathbf{H}}_q\, dV - j\omega \varepsilon_a \dot{A}_q \int\limits_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_q \dot{\mathbf{E}}_q^*\, dV - \int\limits_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{e1} \dot{\mathbf{E}}_q^*\, dV = 0,$$

$$- j\omega \mu_a \dot{A}_q \int\limits_{V_1} \dot{\mathbf{H}}_q \dot{\mathbf{H}}_q^*\, dV + j\omega_r \varepsilon_a \dot{A}_q \int\limits_{V_1} \dot{\mathbf{E}}_q^* \dot{\mathbf{E}}_q\, dV = 0,$$

o bien

$$j\omega_r \mu_a \dot{A}_q \int\limits_{V_1} |\dot{\mathbf{H}}_q|^2\, dV - j\omega \varepsilon_a \dot{A}_q \int\limits_{V_1} |\dot{\mathbf{E}}_q|^2\, dV = \int\limits_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{e1} \dot{\mathbf{E}}_q^*\, dV, \qquad (33.36)$$

$$- j\omega \mu_a \dot{A}_q \int\limits_{V_1} |\dot{\mathbf{H}}_q|^2\, dV + j\omega_r \varepsilon_a \dot{A}_q \int\limits_{V_1} |\dot{\mathbf{E}}_q|^2\, dV. \qquad (33.37)$$

Multipliquemos la expresión (33.36) por ω y la expresión (33.37) por ω_r, sumando después término a término el primer producto al segundo:

$$j(\omega_r^2 - \omega^2) \varepsilon_a \dot{A}_q \int\limits_{V_1} |\dot{\mathbf{E}}_q|^2\, dV = \omega \int\limits_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{e1} \dot{\mathbf{E}}_q^*\, dV,$$

de donde

$$\dot{A}_q = \frac{\omega \int\limits_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{e1} \dot{\mathbf{E}}_q^*\, dV}{j(\omega_r^2 - \omega^2) \varepsilon_a \int\limits_{V_1} |\dot{\mathbf{E}}_q|^2\, dV}. \qquad (33.38)$$

Cuando el valor de la frecuencia ω de las oscilaciones de la corriente extrínseca de densidad $\dot{\mathbf{J}}_{e1}$ tiende hacia el valor de la frecuencia de resonancia ω_r de las oscilaciones propias del resonador, el coeficiente de amplitud $\dot{A}_q$, como se infiere de la expresión (33.38), tiende al infinito, lo cual es equivalente a los procesos en un circuito oscilatorio ideal. Para determinar la amplitud de las oscilaciones en el resonador real es conveniente partir de los siguientes razonamientos.

Como ya se ha señalado en el capítulo 26, para un tipo prefijado de ondas, el resonador de cavidad puede sustituirse por un circuito oscilatorio equivalente que posee unos parámetros determinados L_{e1}, C_{e1}, r_{e1} y un factor de mérito Q. En semejante circuito oscilatorio equivalente las oscilaciones se amortiguan conforme a la ley $e^{-\alpha_{e1} t}$, donde el coeficiente de amortiguación equivalente α_{e1}

se determina por medio de una de las siguientes fórmulas:

$$\alpha_{el} = \frac{r_{el}}{2L_{el}} = \frac{\omega_r r_{el}}{2\omega_r L_{el}} = \frac{\omega_r}{2Q}. \qquad (33.39)$$

Las oscilaciones de este circuito pueden escribirse como relaciones

$$u(t) = U_0 e^{-\alpha_{el} t} \cos(\omega_r t + \varphi) = \mathrm{Re}\{U_0 e^{-\alpha_{el} t} \times e^{j(\omega_r t + \varphi)}\},$$

o bien

$$u(t) = \mathrm{Re}\{\dot{U}_0 e^{j(\omega_r + j\alpha_{el})t}\}, \qquad (33.40)$$

donde $\dot{U}_0 = U_0 e^{j\varphi}$.

Con esta forma de anotación la expresión

$$\omega_r + j\alpha_{el} = \omega_r + j\frac{\omega_r}{2Q} \qquad (33.41)$$

puede considerarse como la frecuencia compleja de las oscilaciones propias en el resonador que se generan cuando hay pérdidas. Si en vez del cuadrado de la frecuencia ω_r^2 ponemos en el denominador de la expresión (33.38) el cuadrado de la frecuencia compleja de las oscilaciones propias $(\omega_r + j\alpha_{el})^2$, se puede considerar la influencia de las pérdidas sobre los procesos que se desarrollan en el resonador de cavidad:

$$(\omega_r + j\alpha_{el})^2 = \left(\omega_r + j\frac{\omega_r}{2Q}\right)^2 = \omega_r^2 + j\frac{\omega_r^2}{Q} - \frac{\omega_r^2}{4Q^2}.$$

Los resonadores de cavidad tienen un alto factor de mérito, por esta razón

$$\omega_r^2/4Q^2 \ll \omega_r^2/Q$$

y

$$(\omega_r + j\alpha_{el})^2 \approx \omega_r^2 + j\frac{\omega_r^2}{Q}. \qquad (33.42)$$

Al colocar esta expresión en lugar de ω_r^2 en el denominador de la fórmula (33.38), obtenemos la relación para el coeficiente de amplitud $\dot{A}_{qr}$ del campo en un resonador de cavidad real:

$$\dot{A}_{qr} = \frac{\omega \int\limits_{V_1} \dot{J}_{el} \dot{E}_q^* \, dV}{j\left(\omega_r^2 + j\frac{\omega_r^2}{Q} - \omega^2\right) \varepsilon_a \int\limits_{V_1} |\dot{E}_q|^2 \, dV}. \qquad (33.43)$$

Para la resonancia $\omega = \omega_r$ y

$$\dot{A}_{qr\,r} = -\frac{Q \int\limits_{V_1} \dot{J}_{el} \dot{E}_q^* \, dV}{\omega_r \varepsilon_a \int\limits_{V_1} |\dot{E}_q|^2 \, dV}. \qquad (33.44)$$

Cuando el resonador es excitado por un sistema dado de corrientes magnéticas extrínsecas de densidad $\dot{\mathbf{J}}_m$, las expresiones para los coeficientes de amplitud pueden obtenerse fácilmente aprovechando el principio de dualidad de permutación. Con este fin, en la expresión (33.44) deben realizarse unas permutaciones ordinarias:

$$\dot{\mathbf{H}} \rightleftarrows \dot{\mathbf{E}}, \quad \varepsilon_a \rightleftarrows -\mu_a, \quad \dot{\mathbf{J}}_{e1} \to -\dot{\mathbf{J}}_m.$$

Como resultado, tiene lugar la siguiente fórmula para el coeficiente de amplitud durante la resonancia:

$$\dot{A}_{qres} = -\frac{Q \int\limits_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_m \dot{\mathbf{H}}_q^* \, dV}{\omega_r \mu_a \int\limits_{V_1} |\dot{\mathbf{H}}_q|^2 \, dV}. \tag{33.45}$$

En el Apéndice IV se da un ejemplo de cálculo del coeficiente de amplitud de la onda del tipo H_{101} en un resonador rectangular.

CAPITULO 34

Propagación de ondas electromagnéticas en medios anisótropos

§ 34.1. Planteamiento del problema

En los medios anisótropos, como se ha señalado en los § 1.3 y 1.5, entre los vectores $\dot{\mathbf{D}}$ y $\dot{\mathbf{E}}$ o $\dot{\mathbf{B}}$ y $\dot{\mathbf{H}}$ se establecen relaciones más complicadas, según en qué parámetro del medio (ε_a o μ_a) se manifiesta la anisotropía. En el caso de anisotropía el carácter tensorial de ε_a o μ_a conduce a la aparición de nuevos procesos físicos en el medio cuyo estudio matemático se complica sustancialmente debido a la complicación del sistema inicial de ecuaciones electrodinámicas. El análisis de los problemas electrodinámicos con la permitividad (constante dieléctrica) tensorial no se diferencia del análisis de los fenómenos con la permeabilidad magnética tensorial del medio. El plasma y las ferritas que se encuentran en el campo magnético representan medios anisótropos. En el plasma la permitividad es el tensor, mientras que en las ferritas es la permeabilidad magnética la que revisto carácter tensorial.

En el presente capítulo se examinarán algunas cuestiones fundamentales de propagación de ondas electromagnéticas en un medio anisótropo homogéneo ferrítico. El método de análisis es válido al sustituir el medio ferrítico por el plasma magnetizado

§ 34.2. Tipos de tensores de la permitividad y la permeabilidad magnética del plasma y de la ferrita magnetizados

El plasma que representa un gas en el cual cierta parte de los átomos o de las moléculas está ionizada, posee unos parámetros, dependientes del grado de ionización, de la frecuencia de las ondas electromagnéticas que en aquél se propagan y del campo magnético permanente que sobre él influye. En ausencia del campo magnético el plasma es isótropo. Si sobre el plasma influye un campo magnético permanente, su permitividad pasa a ser tensor. En dependencia del carácter de ionización y de la potencia de las ondas electromagnéticas, el plasma debe considerarse como un medio homogéneo o no homogéneo, lineal o no lineal. Sin profundizar en la esencia de los procesos físicos que se operan en el plasma [6], [7], se puede decir que en el plasma imantado a lo largo del eje z su permitividad absoluta ε_a puede representarse en forma de tensor:

$$(\varepsilon_a) = \begin{pmatrix} \varepsilon_a & -ja & 0 \\ ja & \varepsilon_a & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{a33} \end{pmatrix}. \tag{34.1}$$

Las componentes del tensor dependen de la concentración de los electrones en el plasma, de la frecuencia de impactos de los electrones con los iones y moléculas, de la magnitud del campo magnético permanente y de la frecuencia de las ondas electromagnéticas que se propagan en el plasma. Al comparar el tensor (ε_a) con el tensor de la permitividad de forma general (1.25), se puede sacar la conclusión sobre la simplicidad relativa del tensor (34.1). Correspondiendo con la expresión general (1.23), el enlace entre las componentes de la amplitud compleja del vector de desplazamiento eléctrico $\dot{\mathbf{D}}$ y las componentes de la amplitud compleja del vector de intensidad del campo eléctrico $\dot{\mathbf{E}}$ en el sistema de coordenadas cartesianas, cuando se trata del tensor (34.1), se expresa por medio de las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{aligned} \dot{D}_x &= \varepsilon_a \dot{E}_x - ja\dot{E}_y, \\ \dot{D}_y &= ja\dot{E}_x + \varepsilon_a \dot{E}_y, \\ \dot{D}_z &= \varepsilon_{a33}\dot{E}_z. \end{aligned}\right\} \tag{34.2}$$

Es necesario tener en cuenta esta relación al presentar en forma escalar la primera ecuación de Maxwell. Cuando no hay pérdidas ni corrientes extrínsecas, siendo ordinaria (escalar) la expresión de la permitividad, la primera ecuación de Maxwell se escribe en la forma

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}. \tag{34.3}$$

Si $\varepsilon_a = (\varepsilon_a)$ es un tensor, entonces, la expresión de esta ecuación será como sigue:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega (\varepsilon_a) \dot{\mathbf{E}}. \tag{34.4}$$

Puesto que la permeabilidad magnética del plasma al actuar un campo magnético permanente sigue siendo una magnitud escalar igual a μ_a, la segunda ecuación de Maxwell se escribe en la forma habitual:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}}. \tag{34.5}$$

La anotación de estas ecuaciones en la forma

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega \dot{\mathbf{D}}, \tag{34.6}$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{B}} \tag{34.7}$$

sigue siendo válida independientemente de si son escalares o tensoriales las magnitudes ε_a y μ_a. Al escribir el rotor en el sistema de coordenadas cartesianas, la ecuación (34.6) puede presentarse como el sistema de ecuaciones escalares:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} &= j\omega \dot{D}_x, \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} &= j\omega \dot{D}_y, \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= j\omega \dot{D}_z. \end{aligned}\right\} \tag{34.8}$$

Al sustituir las expresiones para $\dot{D}_x$, $\dot{D}_y$ y $\dot{D}_z$ a partir de las fórmulas (34.2), el sistema se escribirá de la siguiente manera:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} &= j\omega\varepsilon_a \dot{E}_x + \omega a \dot{E}_y, \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} &= -\omega a \dot{E}_x + j\omega\varepsilon_a \dot{E}_y, \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= j\omega\varepsilon_{a33} \dot{E}_z \end{aligned}\right\} \tag{34.9}$$

Si no existe anisotropía, entonces $a = 0$, $\varepsilon_{a33} = \varepsilon_a$ y el sistema de ecuaciones (34.9) se simplifica sustancialmente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} &= j\omega\varepsilon_a \dot{E}_x, \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} &= j\omega\varepsilon_a \dot{E}_y, \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= j\omega\varepsilon_a \dot{E}_z, \end{aligned}\right\} \tag{34.10}$$

La comparación de los sistemas de ecuaciones (34.9) y (34.10) permite hacer la conclusión de que la base del análisis de los fenómenos en un medio anisótropo la forman ecuaciones más complejas que en el caso del medio isótropo.

Las ferritas son sustancias que poseen propiedades magnéticas de los materiales ferromagnéticos y propiedades eléctricas de los dieléctricos. El valor de la permeabilidad magnética relativa de las ferritas puede alcanzar miles de unidades, y el de la permitividad relativa, decenas. Puesto que su permitividad y su permeabilidad magnética específicas son relativamente pequeñas, la atenuación de las ondas electromagnéticas en las ferritas no es grande, y al estudiar los procesos fundamentales que se desarrollan en las ferritas, en una serie de casos se pueden despreciar las conductibilidades eléctrica y magnética.

Se distinguen ferritas ordinarias en las cuales falta el campo magnético interno y monocristales de ferritas (hexaferritas), poseedores de un considerable campo magnético propio. La permeabilidad magnética de las ferritas ordinarias que no se encuentran en el campo magnético exterior es una magnitud escalar. Cuando actúa un campo magnético externo, la permeabilidad magnética pasa a ser tensor.

La permeabilidad magnética de los monocristales es una magnitud tensorial. Al actuar sobre el medio ferrítico, un campo magnético externo orientado a lo largo del eje z, el tensor de la permeabilidad magnética de la ferrita se parece por su forma al tensor de la permitividad del plasma:

$$(\mu_a) = \begin{pmatrix} \mu_a & -jb & 0 \\ jb & \mu_a & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{a33} \end{pmatrix}. \qquad (34.11)$$

La permitividad de las ferritas es una magnitud escalar. Por esto, la primera ecuación de Maxwell debe escribirse en la forma (34.3) y la segunda ecuación de Maxwell en la forma (34.7). La ligazón entre los vectores $\dot{\mathbf{B}}$ y $\dot{\mathbf{H}}$ se determina por la relación

$$\dot{\mathbf{B}} = (\mu_a)\,\dot{\mathbf{H}}, \qquad (34.12)$$

o bien, en forma desarrollada, teniendo en cuenta el tensor (34.11):

$$\left.\begin{aligned} \dot{B}_x &= \mu_a \dot{H}_x - jb\dot{H}_y, \\ \dot{B}_y &= jb\dot{H}_x + \mu_a \dot{H}_y, \\ \dot{B}_z &= \mu_{a33}\dot{H}_z. \end{aligned}\right\} \qquad (34.13)$$

Respectivamente, la segunda ecuación de Maxwell (34.7) puede representarse por medio de un sistema de ecuaciones escalares:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -j\omega\mu_a \dot{H}_x - \omega b \dot{H}_y, \\
&\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = \omega b \dot{H}_x - j\omega\mu_a \dot{H}_y, \\
&\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -j\omega\mu_{a33} \dot{H}_z.
\end{aligned}\right\} \qquad (34.14)$$

Cuando desaparece el campo de magnetización suplementaria la ferrita ordinaria se convierte en material isótropo. En este caso $b = 0$, $\mu_{a33} = \mu_a$, y las ecuaciones (34.14) se transforman en un sistema ordinario de ecuaciones escalares de Maxwell:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -j\omega\mu_a \dot{H}_x, \\
&\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -j\omega\mu_a \dot{H}_y, \\
&\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -j\omega\mu_a \dot{H}_z.
\end{aligned}\right\} \qquad (34.15)$$

§ 34.3. Propagación longitudinal de ondas planas en un medio ferrítico magnetizado. Efecto de Faraday

Supongamos un medio ferrítico homogéneo, sin pérdidas, imantado por un campo magnético permanente orientado a lo largo del eje z. En este caso el tensor de la permeabilidad magnética del medio se define por la expresión (34.11). Las ecuaciones (34.10) y (34.14) proporcionan un sistema de ecuaciones escalares correspondientes a la primera y segunda ecuaciones de Maxwell para el caso dado.

Examinemos la propagación en el medio citado de una onda plana cuyo vector de Poynting está orientado a lo largo del eje z. En este caso son justas las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{E}_x,\ \dot{E}_y,\ \dot{H}_x,\ \dot{H}_y \neq 0, \\
&\dot{E}_z = \dot{H}_z = 0, \\
&\partial/\partial z \neq 0,\ \partial/\partial x = \partial/\partial y \to 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (34.16)$$

Haciendo uso de estas expresiones en las ecuaciones (34.10) y (34.14) se obtiene un sistema de ecuaciones que definen el proceso

analizado:

$$\left.\begin{aligned} -d\dot{H}_y/dz &= j\omega\varepsilon_a\dot{E}_x, \\ d\dot{H}_x/dz &= j\omega\varepsilon_a\dot{E}_y, \\ d\dot{E}_y/dz &= j\omega\mu_a\dot{H}_x + \omega b\dot{H}_y, \\ d\dot{E}_x/dz &= \omega b\dot{H}_x - j\omega\mu_a\dot{H}_y. \end{aligned}\right\} \qquad (34.17)$$

Escribamos las soluciones del sistema (34.17) en forma de ondas incidentes:

$$\left.\begin{aligned} \dot{H}_x &= \dot{H}_{x0}e^{-j\beta_f z}, \\ \dot{H}_y &= \dot{H}_{y0}e^{-j\beta_f z}, \\ \dot{E}_x &= \dot{E}_{x0}e^{-j\beta_f z}, \\ \dot{E}_z &= \dot{E}_{x0}e^{-j\beta_f z}, \end{aligned}\right\} \qquad (34.18)$$

donde β_f es la constante de fase de la onda plana en la ferrita.

Al sustituir las soluciones (34.18) en el sistema de ecuaciones (34.17), obtenemos las relaciones

$$\beta_f\dot{H}_{y0} = \omega\varepsilon_a\dot{E}_{x0}, \qquad (34.19)$$

$$\beta_f\dot{H}_{x0} = -\omega\varepsilon_a\dot{E}_{y0}, \qquad (34.20)$$

$$-\beta_f\dot{E}_{y0} = \omega\,(\mu_a\dot{H}_{x0} - jb\dot{H}_{y0}), \qquad (34.21)$$

$$\beta_f\dot{E}_{x0} = \omega\,(jb\dot{H}_{x0} + \mu_a\dot{H}_{y0}). \qquad (34.22)$$

A partir de la expresión (34.22) hallemos $\dot{E}_{x0}$, y sustituyamos su valor en la fórmula (34.19)

$$\beta_f\dot{H}_{y0} = \frac{\omega^2\varepsilon_a}{\beta_f}\,(jb\dot{H}_{x0} + \mu_a\dot{H}_{y0}). \qquad (34.23)$$

A partir de la expresión (34.21) hallemos $\dot{E}_{y0}$, y sustituyamos su valor en la fórmula (34.20)

$$\beta_f\dot{H}_{x0} = \frac{\omega^2\varepsilon_a}{\beta_f}\,(\mu_a\dot{H}_{x0} - jb\dot{H}_{y0}). \qquad (34.24)$$

Seguidamente, por medio de la relación (34.24) expresemos $\dot{H}_{x0}$ mediante $\dot{H}_{y0}$:

$$\dot{H}_{x0}\,(\beta_f^2 - \omega^2\mu_a\varepsilon_a) = -jb\omega^2\varepsilon_a\dot{H}_{y0},$$

de donde

$$\dot{H}_{x0} = -\frac{jb\omega^2\varepsilon_a}{\beta_f^2 - \omega^2\mu_a\varepsilon_a}\,\dot{H}_{y0}. \qquad (34.25)$$

Multipliquemos la expresión (34.23) por β_f y sustituyamos en ésta el valor de $\dot{H}_{x0}$ a partir de la fórmula (34.25):

$$\beta_f^2 \dot{H}_{y0} = -jb\omega^2\varepsilon_a \frac{jb\omega^2\mu_a}{\beta_f^2 - \omega^2\mu_a\varepsilon_a}\dot{H}_{y0} + \omega^2\mu_a\varepsilon_a\dot{H}_{y0}.$$

Simplificando esta expresión por $\dot{H}_{y0}$ y efectuando algunas transformaciones, hallemos la ecuación para la constante de fase de la onda plana en el medio ferrítico β_f:

$$\beta_f^4 - 2\omega^2\mu_a\varepsilon_a\beta_f^2 + \omega^4\mu_a^2\varepsilon_a^2 - \omega^4 b^2\varepsilon_a^2 = 0, \qquad (34.26)$$

que tiene una solución simple

$$\beta_f = \pm\sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a \pm \sqrt{\omega^4\mu_a^2\varepsilon_a^2 - \omega^4\mu_a^2\varepsilon_a^2 + \omega^4 b^2\varepsilon_a^2}},$$

$$\beta_f = \pm\omega\sqrt{\varepsilon_a(\mu_a \pm b)}. \qquad (34.27)$$

El signo «más» ante el radical, de acuerdo con las soluciones (34.18), debe aplicarse a la onda que se propaga en dirección de los valores positivos del eje z. El signo «menos» corresponde a la onda reflejada que se propaga en la dirección de los valores negativos del eje z. Puesto que en el caso considerado el medio es homogéneo e infinito, la onda reflejada no puede engendrarse y la expresión (34.27) se escribirá en la forma

$$\beta_f = \omega\sqrt{\varepsilon_a(\mu_a \pm b)}. \qquad (34.28)$$

De este modo existen dos valores de la constante de fase de la onda plana en la ferrita:

$$\beta_{f1} = \omega\sqrt{\varepsilon_a(\mu_a + b)}. \qquad (34.29)$$

$$\beta_{f2} = \omega\sqrt{\varepsilon_a(\mu_a - b)}. \qquad (34.30)$$

A cada constante de fase corresponde su velocidad de fase:

$$v_{f1} = \omega/\beta_{f1}, \qquad (34.31)$$

$$v_{f2} = \omega/\beta_{f2}. \qquad (34.32)$$

Analicemos a qué proceso físico corresponde la aparición de dos velocidades de fase. Retornemos a la expresión (34.25). Sustituyamos en ésta el valor de β_f de la fórmula (34.28):

$$\dot{H}_{x0} = -\frac{jb\omega^2\varepsilon_a}{\omega^2\varepsilon_a\mu_a \pm \omega^2\varepsilon_a b - \omega^2\mu_a\varepsilon_a}\dot{H}_{y0}.$$

Al realizar las simplificaciones necesarias, obtenemos la siguiente relación entre las componentes $\dot{H}_{x0}$ y $\dot{H}_{y0}$:

$$\dot{H}_{x0} = \mp j\dot{H}_{y0}. \qquad (34.33)$$

Debido a que existen dos constantes de fase equivalentes β_{f1} y β_{f2} correspondientes a dos campos que se propagan con velocidades

de fase v_{f1} y v_{f2} y tomando en consideración las soluciones (34.18), el campo total $\dot{H}_{x\Sigma}$ se escribe en la forma

$$\left.\begin{aligned}\dot{H}_{x\Sigma} &= \dot{H}_{x0}e^{-j\beta_{f1}z} + \dot{H}_{x0}e^{-j\beta_{f2}z} = \\ &= \dot{H}_{x0}\left(e^{-j\beta_{f1}z} + e^{-j\beta_{f2}z}\right), \\ \dot{H}_{x0} &= H_{x0}e^{j\varphi_H},\end{aligned}\right\} \qquad (34.34)$$

donde φ_H es la fase inicial que, para simplificar la notación, puede suponerse igual a cero.

Entonces

$$\left.\begin{aligned}\dot{H}_{x0} &= H_{x0}, \\ \dot{H}_{x\Sigma} &= H_{x0}\left(e^{-j\beta_{f1}z} + e^{-j\beta_{f2}z}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (34.35)$$

El valor instantáneo de $H_{x\Sigma}(t)$ se halla mediante el simple paso de las amplitudes complejas a los valores instantáneos:

$$H_{x\Sigma}(t) = \mathrm{Re}\left(\dot{H}_{x\Sigma}e^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left\{H_{x0}\left(e^{-j\beta_{f1}z} + e^{-j\beta_{f2}z}\right)e^{j\omega t}\right\},$$

$$H_{x\Sigma}(t) = H_{x0}\left\{\cos\left(\omega t - \beta_{f1}z\right) + \cos\left(\omega t - \beta_{f2}z\right)\right\}. \qquad (34.36)$$

Basándose en la relación trigonométrica $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, la expresión (34.36) puede representarse en la forma

$$H_{x\Sigma}(t) = 2H_{x0}\cos\left(\omega t - \frac{\beta_{f1}+\beta_{f2}}{2}z\right)\cos\left(\frac{\beta_{f2}-\beta_{f1}}{2}z\right),$$

o bien, debido a que el coseno es una función par

$$H_{x\Sigma}(t) = 2H_{x0}\cos\left(\omega t - \frac{\beta_{f1}+\beta_{f2}}{2}z\right)\cos\left(\frac{\beta_{f1}-\beta_{f2}}{2}z\right). \qquad (34.37)$$

De la fórmula (34.33) se infiere que

$$\dot{H}_{y0} = \pm jH_{x0}. \qquad (34.38)$$

El signo «más» corresponde a la constante de fase β_{f1}, y el signo «menos», a la constante de fase β_{f2}. Por analogía con las fórmulas (34.34) el campo total $\dot{H}_{y\Sigma}$ se escribe en la forma

$$\dot{H}_{y\Sigma} = \dot{H}_{y0}e^{-j\beta_{f1}z} + \dot{H}_{y0}e^{-j\beta_{f2}z},$$

o bien, teniendo en cuenta la relación (34.38), así como la primera fórmula (34.35) ($\dot{H}_{x0} = H_{x0}$):

$$\dot{H}_{y\Sigma} = jH_{x0}e^{-j\beta_{f1}z} - jH_{x0}e^{-j\beta_{f2}z} = jH_{x0}\left(e^{-j\beta_{f1}z} - e^{-j\beta_{f2}z}\right).$$

Pasemos de las amplitudes complejas a los valores instantáneos del campo $H_{y\Sigma}(t)$:

$$H_{y\Sigma}(t) = \mathrm{Re}\left\{jH_{x0}\left(e^{-j\beta_{f1}z} - e^{-j\beta_{f2}z}\right)e^{j\omega t}\right\},$$

$$H_{y\Sigma}(t) = -H_{x0}\left\{\mathrm{sen}\left(\omega t - \beta_{f1}z\right) - \mathrm{sen}\left(\omega t - \beta_{f2}z\right)\right\}. \qquad (34.39)$$

Basándose en la relación trigonométrica $\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$, la expresión (34.39) puede representarse en la forma

$$H_{yz}(t) = -2H_{x0}\cos\left(\omega t - \frac{\beta_{f1}+\beta_{f2}}{2}z\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\beta_{f2}-\beta_{f1}}{2}z\right),$$

o bien, debido a que el seno es una función impar

$$H_{yz}(t) = 2H_{x0}\cos\left(\omega t - \frac{\beta_{f1}+\beta_{f2}}{2}z\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\beta_{f1}-\beta_{f2}}{2}z\right). \quad (34.40)$$

El campo magnético total es una superposición de los campos $H_{xz}(t)$ y $H_{yz}(t)$. La suma de los campos se efectúa gráficamente, tal como se ilustra en la fig 34.1.

La tangente del ángulo de inclinación α del vector total del campo magnético hacia el eje de abscisas se expresa por la relación

$$\operatorname{tg}\alpha = H_{yz}(t)/H_{xz}(t).$$

Al sustituir los valores de $H_{yz}(t)$ y $H_{xz}(t)$ de las fórmulas (34.40) y (34.37), obtenemos

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta_{f2}-\beta_{f1}}{2}z\right)}{\cos\left(\frac{\beta_{f2}-\beta_{f1}}{2}z\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\beta_{f1}-\beta_{f2}}{2}z\right),$$

de donde el ángulo de inclinación es

$$\alpha = \frac{\beta_{f1}-\beta_{f2}}{2}z. \quad (34.41)$$

El ángulo incrementa a medida que la onda plana se desplaza en la dirección positiva del eje z. El vector total $\mathbf{H}_\Sigma(t)$ no mantiene una orientación constante en el espacio, sino gira a medida que la onda avanza. En la fig. 34.1 se aprecia que la rotación del vector total tiene lugar en el sentido horario, si se mira a favor de los valores positivos del eje z.

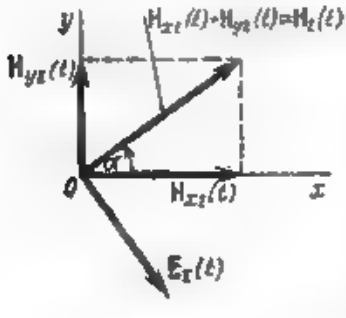

FIG. 34.1

Un cuadro análogo presenta el vector del campo eléctrico total $\mathbf{E}_\Sigma(t)$ que es ortogonal al vector $\mathbf{H}_\Sigma(t)$. De este modo, el medio ferrítico imantado no sólo es un medio anisótropo, sino también girotropo, en el cual se efectúa el giro de los vectores del campo en el espacio. La rotación de los vectores del campo en un medio girotropo se denomina *efecto de Faraday*.

La constante

$$\frac{\beta_{f1}-\beta_{f2}}{2}, \quad (34.42)$$

que determina el ángulo de giro de los vectores por unidad de longitud de recorrido en el medio girotropo lleva el nombre de *constante de Faraday*.

Se ha sometido al examen el caso en que la onda plana se propaga en un medio ferrítico en la dirección positiva del eje z. La orientación del vector de Poynting se determina por la disposición de los vectores totales $\mathbf{E}_\Sigma(t)$ y $\mathbf{H}_\Sigma(t)$ representados en la fig. 34.1 Cuando la onda plana se propaga en dirección inversa, o sea, en la dirección de los valores negativos del eje z, es necesario sustituir los signos ante las constantes de fase β_{f1} y β_{f2}. Como resultado, en lugar de la expresión (34.14) obtenemos

$$\alpha = -\frac{\beta_{f1} - \beta_{f2}}{2} z, \tag{34.43}$$

El ángulo α se hace negativo y creciente en la dirección de los ángulos negativos con el aumento del valor absoluto de la coordenada z. La rotación del vector total $\mathbf{H}_\Sigma(t)$ se opera en el sentido contrario en comparación con el caso de propagación de la onda plana en la dirección de los valores positivos de z.

De este modo, la influencia que el medio ferrítico ejerce sobre la onda electromagnética depende de la dirección de propagación de esta onda. Semejantes medios llevan el nombre de *medios no recíprocos*.

§ 34.4. Propagación transversal de ondas planas en el medio ferrítico magnetizado. Efecto de Cotton—Mouton

En el § 34.3 se ha examinado la propagación de la onda plana a lo largo del campo permanente que magnetiza suplementariamente la ferrita. Es de interés el caso en que el vector de Poynting que se propaga en el medio ferrítico está orientado perpendicularmente al campo magnetizante.

Supongamos que el campo magnetizante está orientado a lo largo del eje z, mientras que el vector de Poynting de la onda plana está dirigido a lo largo del eje x. Entonces, para el campo de la onda que incide en el medio ferrítico deben ser justas las relaciones:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{E}_y,\ \dot{E}_z,\ \dot{H}_y,\ \dot{H}_z \neq 0, \\ &\dot{E}_x = \dot{H}_x = 0, \\ &\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0,\ \partial/\partial x \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{34.44}$$

Para el medio ferrítico imantado a lo largo del eje z son válidos los sistemas de ecuaciones escalares de Maxwell (34.10) y (34.14). En virtud del carácter justo de las relaciones (34.44), los sistemas

de estas ecuaciones se simplifican sustancialmente:

$$-d\dot{H}_z/dx = j\omega\varepsilon_a\dot{E}_y, \tag{34.45}$$

$$d\dot{H}_y/dx = j\omega\varepsilon_a\dot{E}_z, \tag{34.46}$$

$$0 = -j\omega\mu_a\dot{H}_x - \omega b\dot{H}_y, \tag{34.47}$$

$$-d\dot{E}_z/dx = \omega b\dot{H}_x - j\omega\mu_a\dot{H}_y, \tag{34.48}$$

$$d\dot{E}_y/dx = -j\omega\mu_{ass}\dot{H}_z. \tag{34.49}$$

Como quiera que en la onda incidente existe la componente $\dot{H}_y$, ésta debe estar presente en el medio ferrítico. Por consiguiente, esta componente no puede igualarse a cero en la relación (34.47). Para cumplir esta condición es necesario suponer que, como resultado de la anisotropía (existencia del coeficiente b), en el medio ferrítico aparece complementariamente la componente $\dot{H}_x$ que faltaba en la onda incidente. A partir de la relación (34.47) se deduce que

$$\dot{H}_x = j\frac{b}{\mu_a}\dot{H}_y. \tag{34.50}$$

La componente $\dot{H}_x$ está ligada con la componente $\dot{H}_y$ mediante el factor j, lo que significa el desfasaje en el tiempo entre estas componentes en un ángulo igual a $\pi/2$. Una relación parecida se ha obtenido en el § 34.3 [véase la fórmula (34.38)]. Se ha demostrado que el desfasaje origina la rotación del plano de polarización. De este modo, al propagarse transversalmente la onda plana en la ferrita aparece una componente suplementaria del campo magnético, teniendo lugar la rotación de los vectores del campo a medida que éste avanza a lo largo de la dirección de propagación, o sea, a lo largo del eje x. El sistema de ecuaciones (34.45), (34.49) no depende del sistema de ecuaciones (34.46), (34.48) y puede resolverse independientemente. Al hacer la diferenciación de la ecuación (34.49) respecto a x y utilizar la ecuación (34.45), obtenemos

$$d^2\dot{E}_y/dx^2 + \omega^2\mu_{ass}\varepsilon_a\dot{E}_y = 0. \tag{34.51}$$

La solución de esta ecuación puede representarse en forma ordinaria:

$$\dot{E}_y = A_1 e^{-j\beta_{fs}x} + A_2 e^{j\beta_{fs}x}, \tag{34.52}$$

donde

$$\beta_{fs} = \omega\sqrt{\mu_{ass}\varepsilon_a}. \tag{34.53}$$

Puesto que el medio ferrítico se supone homogéneo e ilimitado y no existe la onda reflejada, se puede tomar

$$A_2 = 0. \tag{34.54}$$

Entonces

$$\dot{E}_y = A_1 e^{-j\beta_{ta}x}. \qquad (34.55)$$

La solución obtenida se denomina *onda ordinaria*. El segundo sistema se forma a partir de las ecuaciones (34.46) y (34.48). En la última ecuación la componente $\dot{H}_x$ puede eliminarse empleando la expresión (34.50). En este caso la ecuación (34.48) se transforma en relación

$$\frac{d\dot{E}_z}{dx} = j\omega\left(\mu_a - \frac{b^2}{\mu_a}\right)\dot{H}_y. \qquad (34.56)$$

Al diferenciar esta relación respecto a x y emplear la expresión (34.46) hallamos la ecuación para la componente del campo $\dot{E}_z$:

$$\frac{d^2\dot{E}_z}{dx^2} + \omega^2\varepsilon_a\left(\mu_a - \frac{b^2}{\mu_a}\right)\dot{E}_z = 0 \qquad (34.57)$$

con la solución del tipo

$$\dot{E}_z = B_1 e^{-j\beta_{te}x} + B_2 e^{j\beta_{te}x}, \qquad (34.58)$$

donde

$$\beta_{te} = \omega\sqrt{\varepsilon_a\left(\mu_a - \frac{b^2}{\mu_a}\right)}. \qquad (34.59)$$

En el caso de un medio ferrítico ilimitado la onda reflejada no existe y $B_2 = 0$. En este caso

$$\dot{E}_z = B_1 e^{-j\beta_{te}x}. \qquad (34.60)$$

La solución obtenida lleva el nombre de onda extraordinaria.

De este modo, se han hallado las soluciones de las ecuaciones electrodinámicas para las componentes del campo eléctrico $\dot{E}_y$ y $\dot{E}_z$. La solución para la componente del campo magnético $\dot{H}_z$ se escribe análogamente a la solución para $\dot{E}_y$. En el caso de «onda extraordinaria» el campo magnético tiene dos componentes. La solución para la componente del campo $\dot{H}_y$ tendrá un aspecto análogo a la solución para $\dot{E}_z$. Además, en el campo de la «onda extraordinaria» existe la componente $\dot{H}_x$ que viene definida por la relación (34.50) y está desfasada en el tiempo respecto a la componente $\dot{H}_y$ en un ángulo igual a $\pi/2$. Como resultado de este desfasaje en la «onda extraordinaria» tiene lugar una rotación de los vectores del campo a medida de su avance a lo largo del eje x.

La aparición de la «onda extraordinaria» durante la propagación transversal del campo electromagnético plano en un medio ferrítico magnetizado se denomina *efecto de Colton—Mouton*.

Actualmente, las ferritas han encontrado una amplia difusión en diferentes dispositivos radiotécnicos cuya descripción sale fuera de los límites de este libro.

CAPÍTULO 35

Elementos de la teoría de difracción del campo electromagnético

§ 35.1. Planteamiento del problema

En los capítulos anteriores se han analizado los procesos electrodinámicos desarrollados en diferentes medios de extensión infinita, así como en guías de ondas y resonadores de cavidad. A menudo surge la necesidad de buscar el campo electromagnético en los problemas, cuando en un espacio infinito se encuentra cierto cuerpo o grupo de cuerpos con los cuales interactúa la onda electromagnética que se propaga en el espacio. A resultas de esta interacción el campo primario sufre cambios que es preciso tomar en consideración al analizar el proceso.

Convengamos en entender como difracción del campo electromagnético el proceso de interacción de este campo con un cuerpo o grupo de cuerpos que se encuentran en la zona de la onda electromagnética en propagación.

La difracción pertenece a los problemas más difíciles de la electrodinámica y en un libro dedicado a sus fundamentos solamente pueden esbozarse los caminos de resolución de tales problemas. A título de ejemplo de los posibles enfoques del problema vamos a examinar dos casos: 1) la difracción de una onda plana en un cilindro metálico infinito de conductibilidad ideal, o sea, un problema que puede resolverse con precisión analíticamente; 2) la difracción de una onda plana en el orificio practicado en una pantalla plana de extensión infinita y de conductibilidad ideal, es decir, un problema que puede solucionarse empleando el método aproximado que requiere la deducción de relaciones auxiliares: el teorema de equivalencia y las fórmulas de Huygens—Kirchhoff. Se sobreentiende que estos casos están lejos de agotar los posibles métodos de solución de los problemas de difracción, y sólo pueden considerarse como cierta introducción a la teoría de la difracción.

§ 35.2. Difracción de una onda plana en un cilindro metálico infinito de conductibilidad ideal

Supongamos que la onda plana encuentra en su camino un cilindro metálico infinito de conductibilidad ideal cuyo radio es r_0. Sea que el vector de Poynting de la onda plana es perpendicular al eje del cilindro, y la polarización del campo es tal que el vector $\dot{E}$ de la onda incidente es paralelo al eje del cilindro (fig. 35.1). Para el

campo de la onda incidente serán justas las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\Pi} = \dot{\Pi}_x, \\ \dot{E}_z,\ \dot{H}_y \neq 0, \\ \dot{E}_x = \dot{E}_y = \dot{H}_x = \dot{H}_z = 0, \\ \partial/\partial y = \partial/\partial z = 0, \\ \partial/\partial x \neq 0. \end{array}\right\} \qquad (35.1)$$

La presencia del cilindro hace variar el campo no sólo a lo largo de la dirección de propagación de la onda incidente, es decir, a lo largo del eje x, sino también a lo largo del eje y. Examinemos qué

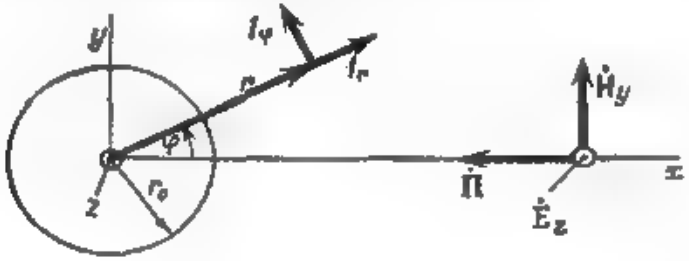

FIG. 35.1

componentes del campo se deben contener en el campo de difracción. Con este fin utilicemos el sistema de ecuaciones de Maxwell presentado en forma de las relaciones (34.10) y (34.14).

Supongamos que en el campo de difracción, al igual que en el campo de la onda incidente no habrá componentes $\dot{E}_x$ y $\dot{E}_y$:

$$\dot{E}_x = \dot{E}_y = 0. \qquad (35.2)$$

Como se ha señalado, la presencia del cilindro provoca la aparición de derivadas:

$$\partial/\partial y,\ \partial/\partial x \neq 0. \qquad (35.3)$$

Basándose en la última ecuación del sistema (34.14) es posible deducir que la componente del campo $\dot{H}_z$ ausente en la onda incidente tampoco aparece en el campo de difracción:

$$\dot{H}_z = 0. \qquad (35.4)$$

Sobre la base de la primera ecuación del sistema (34.14) y de las relaciones (35.3) se puede sacar la conclusión de que la existencia de la derivada $\partial \dot{E}_z/\partial y$ acarrea la aparición de la componente del campo $\dot{H}_x$ que no estaba presente en la onda incidente.

Con las suposiciones hechas se satisfarán todas las restantes ecuaciones de los sistemas (34.10) y (34.14). Como resultado, se formará

el sistema de ecuaciones escalares de Maxwell:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= j\omega \varepsilon_a \dot{E}_z, \\ \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} &= -j\omega \mu_a \dot{H}_x, \\ \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= j\omega \mu_a \dot{H}_y. \end{aligned}\right\} \qquad (35.5)$$

Estas ecuaciones ligan tres componentes del campo: $\dot{H}_x$, $\dot{H}_y$ y $\dot{E}_z$. Puesto que se considera la difracción de una onda plana en el cilindro, para aplicar las condiciones límites es racional pasar al sistema de coordenadas cilíndricas. Este paso puede efectuarse por medio de los siguientes razonamientos.

El campo de difracción obtenido contiene tres componentes $\dot{H}_x$, $\dot{H}_y$ y $\dot{E}_z$ y puede considerarse como campo del tipo eléctrico respecto a la coordenada z. En efecto, este campo contiene una componente eléctrica longitudinal y dos componentes magnéticas $\dot{H}_x$ y $\dot{H}_y$ transversales con respecto a la coordenada z. Como se ha indicado en el capítulo 11, en este campo las componentes transversales pueden expresarse por medio de la componente longitudinal definida por la relación (11.35):

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_\zeta}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\xi}\cdot\frac{\partial \dot{E}_\zeta}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\cdot\frac{\partial \dot{E}_\zeta}{\partial \eta}\right)\right\} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{E}_\zeta = 0.$$

Al analizar el problema en el sistema de coordenadas cilíndricas, elijamos la siguiente correspondencia de las coordenadas curvilíneas y cilíndricas:

$$\xi \to r,\ \eta \to \varphi,\ \zeta \to z,$$
$$h_\xi = h_r = 1,\ h_\eta = h_\varphi = r,\ h_\zeta = h_z = 1. \qquad (35.6)$$

En este caso la ecuación (11.35) puede representarse en la forma

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi}\right)\right\} + \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \dot{E}_z = 0.$$

El campo examinado no depende de la coordenada z. Supongamos también que el medio carece de pérdidas:

$$\tilde{\mu}_a \to \mu_a,\ \tilde{\varepsilon}_a \to \varepsilon_a,\ \omega^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a \to \omega^2 \mu_a \varepsilon_a = \beta^2.$$

Entonces, la ecuación para la componente longitudinal del campo $\dot{E}_z$ debe escribirse en la forma

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi}\right)\right\} + \beta^2 \dot{E}_z = 0. \qquad (35.7)$$

Al suprimir el paréntesis, obtenemos

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \varphi^2} + \beta^2 \dot{E}_z = 0, \qquad (35.8)$$

o bien, de otra forma,

$$r \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial r^2} + \frac{r^2}{r} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \beta^2 r^2 \dot{E}_z + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \varphi^2} = 0. \qquad (35.9)$$

La ecuación se resuelve aplicando el método de Fourier, por medio de la sustitución de la forma

$$\dot{E}_z = R_1 \Phi. \qquad (35.10)$$

La función R_1 es función solamente de la coordenada r, y la función Φ es función tan sólo de la coordenada φ.

Al sustituir la expresión (35.10) en la ecuación (35.9), obtenemos

$$r^2 \Phi \frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{r^2}{r} \Phi \frac{\partial R_1}{\partial r} + \beta^2 r^2 R_1 \Phi + R_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Dividamos esta ecuación por $R\Phi$:

$$r^2 \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{r^2}{r} \cdot \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial R_1}{\partial r} + \beta^2 r^2 + \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Los primeros tres términos de la ecuación son funciones solamente de la coordenada r, y el último término es tan sólo función de la coordenada φ. La igualdad es posible si los términos que son función de r, así como el término que es función de φ, por separado, son iguales al mismo número m^2 tomado con distintos signos. En virtud de lo expuesto suponganos:

$$\frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m^2,$$

$$r^2 \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{r^2}{r} \cdot \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial R_1}{\partial r} + \beta^2 r^2 = m^2.$$

Cada una de las relaciones obtenidas es función sólo de una coordenada. En consecuencia, las derivadas parciales pueden sustituirse por las ordinarias, escribiendo las ecuaciones de la manera siguiente.

$$d^2\Phi/d\varphi^2 + m^2\Phi = 0. \qquad (35.11)$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{dR_1}{dr} + \left(\beta^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R_1 = 0. \qquad (35.12)$$

El origen de las coordenadas cilíndricas está situado en el eje del cilindro, y el ángulo φ se calcula alrededor del cilindro. El campo de difracción debe ser periódico respecto a φ, por consiguiente, el coeficiente m debe ser un número entero.

La solución de la ecuación (35.11) puede representarse en la forma

$$\Phi = A_{1m} \cos(m\varphi) + A_{2m} \operatorname{sen}(m\varphi) \qquad (35.13)$$

La ecuación (35.12) es la ecuación de Bessel. En el capítulo 14 se han determinado diferentes funciones de Bessel que satisfacen esta ecuación. En el caso dado la onda plana entra en contacto con el cilindro conductor, se refleja de su superficie y se va al infinito. En otras palabras, surge un campo secundario que se propaga desde la superficie del cilindro hacia el infinito. Como se ha señalado en el § 14.1, a este campo le corresponden las funciones de Hankel de segundo género de orden m.

En el § 14.1 estas funciones se designaban por $H_m^{(2)}(gr)$ [véase la fórmula (14.18)]. Al comparar la ecuación de Bessel (14.8) con la ecuación (35.12) se ve que en el caso analizado el coeficiente g es sustituido por el coeficiente β. En consecuencia, por analogía con la fórmula (14.18), la solución de la ecuación (35.12) puede escribirse en la forma

$$R_1 = B_{1m} H_m^{(2)}(\beta r). \tag{35.14}$$

Teniendo en cuenta la fórmula (35.10), la componente longitudinal del campo es

$$\dot{E}_z = (A_{1m} \cos(m\varphi) + A_{2m} \operatorname{sen}(m\varphi))\, B_{1m} \dot{H}_m^{(2)}(\beta r). \tag{35.15}$$

El campo total que existe en el espacio se forma a partir de la onda plana incidente y del campo secundario $\dot{E}_z$ engendrado como resultado de la existencia del cilindro metálico.

El campo de la onda plana incidente $\dot{E}_{z\,\text{inc}}$ que se propaga hacia el lado de los valores negativos del eje x puede expresarse del modo habitual:

$$\dot{E}_{z\,\text{inc}} = \dot{E}_{z\,\text{inc}\,0} e^{j\beta x}. \tag{35.16}$$

En el sistema de coordenadas cilíndricas $x = r \cos\varphi$. Por consiguiente

$$\dot{E}_{z\,\text{inc}} = \dot{E}_{z\,\text{inc}\,0} e^{j\beta r \cos\varphi}. \tag{35.17}$$

En esta notación, la dependencia respecto al ángulo en la onda incidente se expresa por la ley par (cos φ). Conservando el mismo carácter de dependencia en el campo secundario $\dot{E}_z$, supongamos que $A_{2m} = 0$. Entonces, el campo secundario debe presentarse en la siguiente forma:

$$\dot{E}_z = C_m H_m^{(2)}(\beta r) \cos(m\varphi), \tag{35.18}$$

donde

$$C_m = A_{1m} B_{1m}.$$

La expresión (35.18) representa un armónico del campo secundario. El campo secundario total $\dot{E}_{z\Sigma}$ se obtiene sumando todos los

armónicos:

$$\dot{E}_{z\Sigma} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m^{(2)}(\beta r)\cos(m\varphi). \qquad (35.19)$$

De este modo, en el espacio existen el campo de la onda incidente definido por la expresión (35.17) y el campo secundario total $\dot{E}_{z\Sigma}$.

Al sumar estos campos hallamos el campo total que existe en el espacio, teniendo en cuenta la influencia del cilindro metálico:

$$\dot{E}_{z\,\text{tot}} = \dot{E}_{z\,\text{inc}\,0} e^{j\beta r\cos\varphi} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m^{(2)}(\beta r)\cos(m\varphi). \qquad (35.20)$$

De conformidad con las condiciones límites, junto a la superficie del metal ideal para $r = r_0$ se cumple la igualdad

$$\dot{E}_{z\,\text{inc}\,0} e^{j\beta r_0\cos\varphi} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m^{(2)}(\beta r_0)\cos(m\varphi) = 0. \qquad (35.21)$$

En la teoría de las funciones de Bessel [8] se demuestra la veracidad de la relación

$$e^{j\beta r_0\cos\varphi} = J_0(\beta r_0) + \sum_{m=1}^{\infty} 2(j)^m J_m(\beta r_0)\cos(m\varphi). \qquad (35.22)$$

Aquí $J_0(\beta r_0)$ es la función de Bessel de primer género de orden cero; $J_m(\beta r_0)$, la función de Bessel de primer género de orden m.

Al sustituir la expresión (35.22) en la igualdad (35.21), obtenemos

$$\dot{E}_{z\,\text{inc}\,0} J_0(\beta r_0) + \dot{E}_{z\,\text{inc}\,0} \sum_{m=1}^{\infty} 2(j)^m J_m(\beta r_0) \times$$

$$\times \cos(m\varphi) + \sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m^{(2)}(\beta r_0)\cos(m\varphi) = 0. \qquad (35.23)$$

Hagamos uso de las condiciones de ortogonalidad de las funciones trigonométricas:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi = \begin{cases} 0 & (\text{para } m \neq n), \\ \pi & (\text{para } m = n). \end{cases}$$

Al multiplicar la expresión (35.23) por $\cos(n\varphi)\,d\varphi$ ($n = 0, 1, 2 \ldots$), integrar entre los límites $-\pi$ y π y aplicar las condiciones de ortogonalidad de las funciones, obtenemos las relaciones:

$$\dot{E}_{z\,\text{inc}\,0} J_0(\beta r_0) + C_0 H_0^{(2)}(\beta r_0) = 0,$$

$$\dot{E}_{z\,\text{inc}\,0} 2(j)^m J_m(\beta r_0) + C_m H_m^{(2)}(\beta r_0) = 0,$$

a partir de las cuales se pueden determinar los coeficientes de amplitud:

$$C_0 = -\dot{E}_{z\,\text{inc}\,0}\frac{J_0(\beta r_0)}{H_0^{(2)}(\beta r_0)},$$
$$C_m = -2(j)^m \dot{E}_{z\,\text{inc}\,0}\frac{J_m(\beta r_0)}{H_m^{(2)}(\beta r_0)}, \qquad (35.24)$$

El conocimiento de los coeficientes de amplitud permite determinar, mediante las fórmulas (35.19) y (35.24), el campo secundario total $\dot{E}_{z\Sigma}$:

$$\dot{E}_{z\Sigma} = -\dot{E}_{z\,\text{inc}\,0}\left\{\frac{J_0(\beta r_0)}{H_0^{(2)}(\beta r_0)}H_0^{(2)}(\beta r) + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} 2(j)^m \frac{J_m(\beta r_0)}{H_m^{(2)}(\beta r_0)} H_m^{(2)}(\beta r)\cos(m\varphi)\right\}. \qquad (35.25)$$

Basándose en la expresión obtenida se puede construir el diagrama direccional del campo secundario total $\dot{E}_{z\Sigma}$ en función del ángulo φ y de los valores $\beta r_0 = \frac{2\pi}{\lambda} r_0$.

El conocimiento del campo eléctrico total permite determinar, valiéndose de las ecuaciones de Maxwell, el campo magnético total. Las condiciones límites junto a la superficie del metal ideal dan la posibilidad de buscar en la superficie del cilindro las corrientes engendradas por la onda plana incidente.

§ 35.3. Primer y segundo problemas electrodinámicos de contorno y sus correspondientes teoremas. Teorema de equivalencia

En una serie de problemas electrodinámicos se produce la siguiente situación: se conocen las densidades de las corrientes extrínsecas eléctrica y magnética $\dot{J}_e$ y $\dot{J}_m$ que crean el campo electromagnético. Este campo se propaga entre cualesquiera superficies límites las cuales provocan la variación del campo creado por las corrientes extrínsecas. Se requiere determinar el campo total teniendo en cuenta la influencia de las superficies límites.

El problema puede resolverse si se ha logrado determinar por cualquier método las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético junto a las superficies límites. La búsqueda del campo total se basa, en este caso, en el llamado teorema de equivalencia. Este teorema suma los resultados de dos teoremas: 1) el teorema correspondiente al primer problema de contorno exterior de electrodinámica; 2) el teorema correspondiente al segundo problema de contorno de electrodinámica.

El primer problema de contorno exterior de electrodinámica se reduce a determinar el campo $\dot{E}$, $\dot{H}$ en el volumen V_2 limitado por dentro por cierta superficie cerrada S que acota el volumen V_1 (fig. 35.2), basándose en los valores prefijados de la componente tangencial del campo eléctrico $\dot{E}_{1\tau}$ en la superficie S_1. En este caso se supone que todos los manantiales extrínsecos del campo se concentran dentro del volumen V_1 o en la superficie S_1 que forma parte del volumen V_1. En el volumen V_2 no hay manantiales extrínsecos del campo.

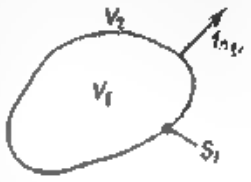

FIG. 35.2

El teorema que corresponde a este problema puede formularse de la siguiente manera. El campo $\dot{E}$, $\dot{H}$ existente en el volumen V_2 es equivalente al campo excitado por corrientes superficiales magnéticas que circulan por la superficie S_1, a condición de que la ligazón de la densidad de estas corrientes $\dot{v}_m$ con la componente tangencial del campo $\dot{E}_{1\tau}$ dada en la superficie S_1 se determine por la condición límite junto a la superficie del metal ideal (§ 21):

$$\dot{E}_{1\tau} = [1_{n_1} \dot{v}_m],$$

o bien, de otra forma

$$\dot{v}_m = [\dot{E}_{1\tau} 1_{n_1}]. \qquad (35.26)$$

Aquí $\dot{E}_{1\tau}$ es la componente tangencial del vector de intensidad del campo eléctrico junto a la superficie S_1, 1_{n_1}, el vector unitario normal a la superficie S_1 dirigido en el sentido del volumen V_2.

La demostración de este teorema es bastante simple. Se basa en el teorema de unicidad. La solución de las ecuaciones de Maxwell es única si satisface las condiciones de radiación en lo infinito y si está prefijada la componente tangencial del campo eléctrico o magnético en la superficie S_1.

Puesto que en el volumen V_2 no hay manantiales extrínsecos de la corriente, las condiciones de radiación se cumplen. Puesto que la componente tangencial prefijada $\dot{E}_{1\tau}$, de acuerdo con las condiciones del teorema, coincide con la componente tangencial creada por la corriente de densidad $\dot{v}_m$, el campo en el volumen V_2 engendrado por las corrientes extrínsecas que se encuentran en el volumen V_1, a base del teorema de unicidad coincidirá con el campo creado por la corriente magnética de densidad $\dot{v}_m$. De este modo el primer teorema puede considerarse demostrado.

El segundo problema de contorno exterior de electrodinámica se reduce a determinar el campo $\dot{E}$, $\dot{H}$ en el volumen V_2 limitado por dentro por la superficie cerrada S_1 que envuelve el volumen V_1, basándose en los valores prefijados de la componente tangencial

del campo magnético $\dot{H}_{1\tau}$ en la superficie S_1. En este caso se supone que todos los manantiales extrínsecos del campo están concentrados dentro del volumen V_1 o bien en la superficie S_1 que constituye una parte del volumen V_1. En el volumen V_2 no existen los manantiales extrínsecos de corriente.

A este problema le corresponde el segundo teorema que se formula del modo siguiente. El campo $\dot{E}$, $\dot{H}$ que existe en el volumen V_2 es equivalente al campo excitado por las corrientes eléctricas superficiales que fluyen por la superficie S_1, a condición de que la ligazón entre la densidad de estas corrientes $\dot{v}_{e1}$ y la componente tangencial dada del campo $\dot{H}_{1\tau}$ se determine por la condición límite junto a la superficie del metal ideal $\dot{H}_{1\tau} = [\dot{v}_{e1} l_{n1}]$.

Al determinar, partiendo de esta condición, la densidad de la corriente eléctrica superficial $\dot{v}_{e1}$ obtenemos la fórmula

$$\dot{v}_{e1} = [l_{n1} \dot{H}_{1\tau}], \qquad (35.27)$$

donde $\dot{H}_{1\tau}$ es la componente tangencial del vector de intensidad del campo magnético junto a la superficie S_1.

No es difícil advertir que el segundo teorema puede obtenerse a partir del primero aplicando el principio de dualidad de permutación. No hay necesidad en la demostración ya que ésta se realiza análogamente.

El teorema de equivalencia que es la superposición del primer y del segundo teoremas se enuncia de la siguiente manera. El campo $\dot{E}$, $\dot{H}$ que existe en el volumen V_2 acotado por dentro por la superficie cerrada S_1, cuyas componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético son $\dot{E}_{1\tau}$, $\dot{H}_{1\tau}$ coincide con el campo excitado por las corrientes superficiales magnética y eléctrica que fluyen por la superficie S_1 de conductibilidad ideal, siempre y cuando estas corrientes estén ligadas a los valores prefijados de las componentes tangenciales de los campos mediante las condiciones límites (35.26) y (35.27) junto a la superficie del metal ideal.

El teorema de equivalencia permite resolver el problema concerniente a la determinación del campo total que se engendra como resultado de la existencia de las corrientes extrínsecas y de las superficies S_1 en la parte considerada del espacio.

Este campo total es una superposición de los campos creados por las corrientes extrínsecas $\dot{J}_{e1}$, $\dot{J}_m$ y de los campos que se engendran bajo acción de las corrientes superficiales $\dot{v}_{e1}$ y $\dot{v}_m$ en las superficies S_1. La dificultad de principio en la resolución del problema reside en la determinación de los vectores $\dot{E}_1$ y $\dot{H}_1$ junto a las superficies de separación.

§ 35.4. Determinación del campo total creado por las corrientes extrínsecas en presencia de superficies complementarias en la parte considerada del espacio. Fórmulas del tipo de Huygens—Kirchhoff

Como se ha indicado en el § 35 3, el campo total es la superposición de los campos creados por las corrientes extrínsecas $\dot{\mathbf{J}}_{e1}$ y $\dot{\mathbf{J}}_m$ y de los campos aparecidos por acción de las corrientes superficiales $\dot{\mathbf{v}}_{e1}$ y $\dot{\mathbf{v}}_m$ que fluyen, de acuerdo con el teorema de equivalencia, por las superficies S_1 de conducción ideal coincidentes con unas superficies reales en el espacio. Los potenciales vectoriales creados por las corrientes $\dot{\mathbf{J}}_{e1}$ y $\dot{\mathbf{J}}_m$ se determinan mediante las fórmulas (28.46) y (28.48):

$$\dot{\mathbf{A}}_{e1} = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int\limits_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{e1} \frac{e^{-\gamma r}}{r} dV,$$

$$\dot{\mathbf{A}}_m = \frac{\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi} \int\limits_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_m \frac{e^{-\gamma r}}{r} dV.$$

Los potenciales vectoriales totales se expresan por medio de las relaciones:

$$\dot{\mathbf{A}}_{e\Sigma} = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \left(\int\limits_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{e1} \frac{e^{-\gamma r}}{r} dV + \int\limits_{S_1} \dot{\mathbf{v}}_{e1} \frac{e^{-\gamma r}}{r} dS \right), \quad (35.28)$$

$$\dot{\mathbf{A}}_{m\Sigma} = \frac{\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi} \left(\int\limits_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_m \frac{e^{-\gamma r}}{r} dV + \int\limits_{S_1} \dot{\mathbf{v}}_m \frac{e^{-\gamma r}}{r} dS \right). \quad (35.29)$$

Las densidades de las corrientes $\dot{\mathbf{J}}_{e1}$ y $\dot{\mathbf{J}}_m$ vienen prefijadas. De acuerdo con las fórmulas (35.26) y (35.27), para determinar las densidades de las corrientes superficiales $\dot{\mathbf{v}}_{e1}$ y $\dot{\mathbf{v}}_m$ es necesario conocer el campo electromagnético junto a las superficies S_1, lo que es posible si el problema planteado se ha resuelto y se conoce la distribución del campo en el espacio. Precisamente en ello reside la principal complejidad del problema.

Si se ha logrado determinar los potenciales vectoriales totales $\dot{\mathbf{A}}_{e\Sigma}$ y $\dot{\mathbf{A}}_{m\Sigma}$, los valores de los vectores del campo $\dot{\mathbf{E}}$ y $\dot{\mathbf{H}}$ pueden hallarse a partir de las relaciones deducidas antes (27.11), (27.21), (27 25) y (27.26).

Los campos que se engendran como resultado de la acción conjunta de las corrientes eléctricas y magnéticas pueden obtenerse recurriendo al principio de superposición En resumen, se obtienen relaciones del tipo (27.28) y (27.29).

Es de interés la búsqueda de las relaciones que enlazan directamente los campos $\dot{\mathbf{H}}_\Sigma$, $\dot{\mathbf{E}}_\Sigma$ con las corrientes extrínsecas. Con este fin, es necesario sustituir en las expresiones (27.28) y (27.29) los valores de los potenciales vectoriales a partir de las fórmulas (35.28)

y (35.29). Al efectuar las operaciones de diferenciación conviene tener en cuenta que la diferenciación se lleva a cabo en las coordenadas del punto de observación y que los vectores $\dot{\mathbf{J}}_{e1}$, $\dot{\mathbf{J}}_m$, $\dot{\mathbf{v}}_{e1}$ y $\dot{\mathbf{v}}_m$ no dependen de éstas. Como resultado se obtienen las siguientes relaciones:

$$\dot{\mathbf{H}}_\Sigma = \frac{1}{4\pi}\int_{V_1} \operatorname{rot}\left(\dot{\mathbf{J}}_{e1}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\,dV\right) + \frac{1}{4\pi}\int_{S_1} \operatorname{rot}\left(\dot{\mathbf{v}}_{e1}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right)dS +$$
$$+ \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a 4\pi}\int_{V_1} \operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dot{\mathbf{J}}_m\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right)dV +$$
$$+ \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a 4\pi}\int_{S_1} \operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dot{\mathbf{v}}_m\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right)dS -$$
$$- j\omega\frac{\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi}\int_{V_1}\dot{\mathbf{J}}_m\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\,dV - j\omega\frac{\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi}\int_{S_1}\dot{\mathbf{v}}_m\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\,dS. \quad (35.30)$$

Análogamente, puede obtenerse la fórmula para $\dot{\mathbf{E}}_\Sigma$:

$$\dot{\mathbf{E}}_\Sigma = -\frac{1}{4\pi}\int_{V_1} \operatorname{rot}\left(\dot{\mathbf{J}}_m\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right)dV - \frac{1}{4\pi}\int_{S_1} \operatorname{rot}\left(\dot{\mathbf{v}}_m\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right)dS +$$
$$+ \frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a 4\pi}\int_{V_1} \operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dot{\mathbf{J}}_{e1}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right)dV +$$
$$+ \frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a 4\pi}\int_{S_1} \operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dot{\mathbf{v}}_{e1}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right)dS -$$
$$- \frac{j\omega\tilde{\mu}_a}{4\pi}\int_{V_1}\dot{\mathbf{J}}_{e1}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\,dV - \frac{j\omega\tilde{\mu}_a}{4\pi}\int_{S_1}\dot{\mathbf{v}}_{e1}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\,dS \quad (35.31)$$

Multiplicando y dividiendo los dos primeros y los dos últimos términos del segundo miembro de la expresión (35.30) por $j\omega\tilde{\mu}_a$, aprovechando la designación $\omega^2\tilde{\mu}_a\tilde{\varepsilon}_a = \gamma^2$ y agrupando los términos, hallamos la expresión para el campo $\dot{\mathbf{H}}_\Sigma$:

$$\dot{\mathbf{H}}_\Sigma = \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a 4\pi}\int_{V_1}\left\{j\omega\tilde{\mu}_a \operatorname{rot}\left(\dot{\mathbf{J}}_{e1}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right) + \right.$$
$$\left. + \operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dot{\mathbf{J}}_m\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right) + \gamma^2\dot{\mathbf{J}}_m\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right\}dV +$$
$$+ \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a 4\pi}\int_{S_1}\left\{j\omega\tilde{\mu}_a \operatorname{rot}\left(\dot{\mathbf{v}}_{e1}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right) + \right.$$
$$\left. + \operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dot{\mathbf{v}}_m\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right) + \gamma^2\dot{\mathbf{v}}_m\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right\}dS. \quad (35.32)$$

La fórmula (35.31) para el campo eléctrico $\dot{\mathbf{E}}_\Sigma$ puede obtenerse a partir de la fórmula (35.30) para el campo magnético $\dot{\mathbf{H}}_\Sigma$ aplicando

el principio de dualidad de permutación. En virtud de ello, $\dot{\mathbf{E}}_\Sigma$ puede determinarse de la fórmula (35.32) mediante las conversiones del tipo

$$\tilde{\mu}_a \to -\tilde{\varepsilon}_a, \quad \dot{\mathbf{H}}_\Sigma \to \dot{\mathbf{E}}_\Sigma, \quad \dot{\mathbf{J}}_{el} \rightleftarrows -\dot{\mathbf{J}}_m, \quad \dot{\mathbf{v}}_{el} \rightleftarrows -\dot{\mathbf{v}}_m.$$

Después de haber realizado las permutaciones, obtenemos

$$\dot{\mathbf{E}}_\Sigma = -\frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a 4\pi}\int_{V_1}\left\{j\omega\tilde{\varepsilon}_a \operatorname{rot}\left(\dot{\mathbf{J}}_m\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right) - \operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dot{\mathbf{J}}_{el}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right) - \right.$$

$$\left. - \gamma^2\dot{\mathbf{J}}_{el}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right\} dV - \frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a 4\pi}\int_{S_1}\left\{j\omega\tilde{\varepsilon}_a \operatorname{rot}\left(\dot{\mathbf{v}}_m\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right) - \right.$$

$$\left. - \operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dot{\mathbf{v}}_{el}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right) - \gamma^2\dot{\mathbf{v}}_{el}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right\} dS. \qquad (35.33)$$

De este modo, si se conocen las densidades de las corrientes extrínsecas y las densidades de las corrientes superficiales en las superficies que existen en la parte considerada del espacio, resulta que el problema sobre la determinación de los vectores del campo en cualquier punto de este espacio puede resolverse, de principio, mediante las expresiones (35.32), (35.33). La principal complejidad radica en determinar las densidades de las corrientes superficiales.

Como se ha señalado, las densidades de las corrientes $\dot{\mathbf{v}}_{el}$ y $\dot{\mathbf{v}}_m$ están ligadas con los vectores del campo junto a las superficies $\dot{\mathbf{E}}_{1\tau}$ y $\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}$ por las relaciones (35.27) y (35.26). Sustituyamos estas relaciones en las fórmulas (35.32) y (35.33):

$$\dot{\mathbf{H}}_\Sigma = \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a 4\pi}\int_{V_1}\left\{j\omega\tilde{\mu}_a \operatorname{rot}\left(\dot{\mathbf{J}}_{el}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dot{\mathbf{J}}_m\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right) + \gamma^2\dot{\mathbf{J}}_m\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right\} dV +$$

$$+ \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a 4\pi}\int_{S_1}\left\langle j\omega\tilde{\mu}_a \operatorname{rot}\left\{[\mathbf{1}_{n1}\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}]\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right\} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{grad}\operatorname{div}\left\{[\dot{\mathbf{E}}_{1\tau}\mathbf{1}_{n1}]\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right\} + \gamma^2[\dot{\mathbf{E}}_{1\tau}\mathbf{1}_{n1}]\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right\rangle dS, \qquad (35.34)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_\Sigma = -\frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a 4\pi}\int_{V_1}\left\{j\omega\tilde{\varepsilon}_a \operatorname{rot}\left(\dot{\mathbf{J}}_m\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right) - \right.$$

$$\left. - \operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dot{\mathbf{J}}_{el}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right) - \gamma^2\dot{\mathbf{J}}_{el}\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right\} dV -$$

$$- \frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a 4\pi}\int_{S_1}\left\langle j\omega\tilde{\varepsilon}_a \operatorname{rot}\left\{[\dot{\mathbf{E}}_{1\tau}\mathbf{1}_{n1}]\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right\} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{grad}\operatorname{div}\left\{[\mathbf{1}_{n1}\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}]\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right\} - \gamma^2[\mathbf{1}_{n1}\dot{\mathbf{H}}_{1\tau}]\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right\rangle dS. \qquad (35.35)$$

Las expresiones obtenidas permiten determinar el campo electromagnético en cualquier punto del espacio, si se conoce su valor junto a las superficies S_1. En el § 35.5 se da un ejemplo de la posible aplicación de las fórmulas deducidas.

§ 35.5. Difracción de las ondas planas en el orificio de una pantalla de conducción ideal y de extensión infinita

Supongamos que una onda plana incide sobre una pantalla metálica plana de extensión infinita en la cual se ha practicado un orificio rectangular. Sea que el vector de Poynting de la onda plana es perpendicular al plano de la pantalla, tal como se muestra en la fig. 35.3.

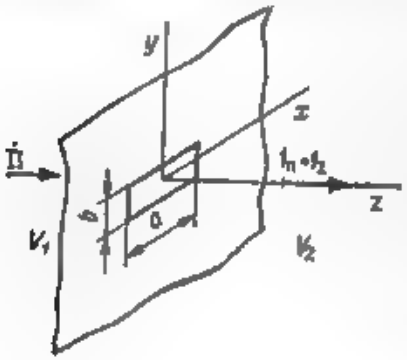

FIG. 35.3

Puesto que la pantalla se supone de conducción ideal la componente tangencial del campo eléctrico junto a su superficie debe ser igual a cero. Por esta razón, el producto vectorial $[\dot{\mathbf{E}}_{1\tau} \mathbf{l}_{n1}]$ por toda la superficie de la pantalla, a excepción del orificio, en las fórmulas (35.34) y (35.35) debe tomarse igual a cero.

La onda plana que incide sobre el orificio en la pantalla provoca la aparición de una componente tangencial del campo magnético junto a la superficie de la pantalla por el lado del volumen V_2. Sin embargo, como lo demuestra un examen más estricto del problema, esta componente del campo magnético será pequeña fuera de los límites del orificio. Debido a esta circunstancia se puede admitir que también el producto vectorial $[\mathbf{l}_{n1} \dot{\mathbf{H}}_{1\tau}]$ fuera de los límites del orificio junto a la superficie de la pantalla puede considerarse igual a cero.

A continuación supongamos que el campo en el orificio es idéntico al de la onda plana incidente. Supongamos que la polarización del campo incidente es tal que éste contiene las componentes $\dot{\mathbf{E}}_x$ y $\dot{\mathbf{H}}_y$. Entonces, el problema de difracción que resolvemos puede enunciarse de la manera siguiente.

Todos los manantiales del campo se encuentran en el volumen V_1. En el volumen V_2 los manantiales del campo no existen. En el marco del área del orificio en la pantalla vienen prefijadas las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético $\dot{\mathbf{E}}_x$ y $\dot{\mathbf{H}}_y$. Fuera de los límites del orificio las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético son iguales a cero. Se requiere determinar el campo electromagnético en el volumen V_2.

Al resolver el problema para el volumen V_2 mediante las fórmulas (35.32) y (35.33), es necesario tomar las densidades de las corrien-

tes $\dot{\mathbf{J}}_{el}$ y $\dot{\mathbf{J}}_m$ en este volumen iguales a cero, a raíz de lo cual se eliminan las integrales de volumen de las expresiones indicadas.

En cambio, las integrales de superficie se conservan. Las densidades de las corrientes superficiales deben hallarse recurriendo a las expresiones (35.26) y (35.27):

$$\dot{\mathbf{v}}_m = [\dot{\mathbf{E}}_x \mathbf{1}_n \mathbf{1}] = [\dot{\mathbf{E}}_x \mathbf{1}_z] = -\mathbf{1}_y \dot{E}_x, \qquad (35.36)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{el} = [\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{H}}_y] = [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{H}}_y] = -\mathbf{1}_x \dot{H}_y. \qquad (35.37)$$

La integración en integrales de superficie debe realizarse en los límites del área del orificio, puesto que fuera de sus límites no hay corrientes superficiales.

Teniendo en cuenta lo expuesto, las fórmulas (35.32) y (35.33) toman la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{H}}_\Sigma = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left\langle \operatorname{rot} \left\{ [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{H}}_y] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a} \operatorname{grad} \operatorname{div} \left\{ [\dot{\mathbf{E}}_x \mathbf{1}_z] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} - j\omega\tilde{\varepsilon}_a [\dot{\mathbf{E}}_x \mathbf{1}_z] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\rangle dS, \qquad (35.38)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_\Sigma = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left\langle \operatorname{rot} \left\{ [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{E}}_x] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a} \operatorname{grad} \operatorname{div} \left\{ [\dot{\mathbf{H}}_y \mathbf{1}_z] \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\} + j\omega\tilde{\mu}_a [\dot{\mathbf{H}}_y \mathbf{1}_z \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \right\rangle dS. \qquad (35.39)$$

En estas expresiones S_0 es el área del orificio. El campo de la onda plana incidente $\dot{E}_x$, $\dot{H}_y$ es prefijado.

Las integrales de superficie de las expresiones (35.38) y (35.39) pueden calcularse con el grado de precisión necesario, sin embargo, la solución será aproximada ya que no toma en consideración el hecho de que las corrientes superficiales «rebosan» los límites del área del orificio.

En electrodinámica, con bastante frecuencia, se hace uso de semejante enfoque de los problemas de difracción. De esta manera, por ejemplo, puede encontrarse el campo irradiado por el extremo abierto de la guía de ondas rectangular o circular o el campo de la antena en cono invertido. El problema se reduce a calcular las integrales de superficie respecto al área de la sección transversal de las guías de ondas o de los conos (bocinas). En este caso se supone que el campo en las guías de ondas o en los conos es idéntico al de las guías de ondas y de los conos de extensión infinita. Además, no se tiene en cuenta el «rebosamiento» de las corrientes superficiales sobre las paredes exteriores de las guías de ondas y de los conos, al igual que no se toma en consideración la variación del campo en la abertura de las guías de ondas o de los conos en comparación con el campo que existe en estos sistemas en el caso de su extensión infinita.

Como quiera que en las fórmulas (35.34) y (35.35) el campo buscado entra tanto en la parte integral izquierda, como en la derecha, en una serie de casos el problema puede reducirse a la resolución de ecuaciones integrales [9]. Se debe tener presente que desde el punto de vista teórico el problema se resuelve con exactitud, pero en la práctica, la solución de las ecuaciones integrales exactas puede realizarse tan sólo por métodos numéricos aproximados.

CAPÍTULO 36

Principio de semejanza electrodinámica

§ 36.1. Planteamiento del problema

En electrodinámica, de la misma manera que en otras ramas de la ciencia y la técnica, se emplea ampliamente la simulación. La creación de un dispositivo de antena que trabaje en un diapasón de ondas largas con unas enormes dimensiones, puede facilitarse considerablemente, realizando experimentos en un modelo cuyo diapasón de trabajo es de altas frecuencias y que en virtud de ello tiene pequeñas dimensiones. En la investigación de ondas milimétricas y submilimétricas hay que afrontar un problema inverso. En este caso es más racional trasladar el experimento a la región de ondas más largas, con el fin de aumentar las dimensiones del dispositivo mediante el cual se lleva a cabo el experimento.

Se presentan casos en que un sistema real debe trabajar en un medio cuyos parámetros son difíciles de reproducir en condiciones de laboratorio. Surge el problema de si es posible montar el experimento en el laboratorio de tal manera que reproduzca fielmente el funcionamiento del sistema en las condiciones reales.

La tarea de este capítulo es establecer el principio basándose en el cual el experimento realizado en unas condiciones representará correctamente el trabajo del sistema en otras condiciones. Este principio lleva el nombre de principio de semejanza electrodinámica.

§ 36.2. Condiciones matemáticas de la semejanza electrodinámica

Escribamos las ecuaciones de Maxwell para los valores instantáneos y los vectores del campo [véanse las ecuaciones (2.5) y (2.6)]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_{el} + \gamma_{el}\mathbf{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m - \gamma_m \mathbf{H} - \mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Para escribir estas ecuaciones en la forma adimensional es necesario destacar magnitudes adimensionales de amplitud unitaria que determinen la dependencia funcional respecto a las coordenadas y el tiempo, así como magnitudes que encierren la dimensión y la escala.

Representemos las magnitudes que forman parte de las ecuaciones de Maxwell de la manera siguiente:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{H} &= \beta_1 \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{E} = \beta_2 \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{J}_{el} = \beta_3 \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{J}_m = \beta_4 \mathbf{a}_4, \\ \gamma_{el} &= \beta_5 a_5, \quad \varepsilon_a = \beta_6 a_6, \quad \gamma_m = \beta_7 a_7, \quad \mu_a = \beta_8 a_8, \\ l &= \beta_9 a_9, \quad t = \beta_{10} a_{10}. \end{aligned}\right\} \qquad (36.1)$$

Aquí $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ y $\mathbf{a}_4$ son vectores adimensionales de la amplitud unitaria que determinan la dependencia funcional de los vectores del campo y de las corrientes extrínsecas respecto a las coordenadas adimensionales y al tiempo; a_5, a_6, a_7 y a_8, escalares adimensionales de la amplitud unitaria que determinan la dependencia funcional de las conductibilidades específicas eléctrica y magnética, así como de la permitividad absoluta y la permeabilidad magnética absoluta respecto a las coordenadas adimensionales (en el caso de un medio no homogéneo) y respecto a los vectores del campo (en el caso de un medio no lineal); a_9 y a_{10}, escalares adimensionales de la amplitud unitaria que determinan la longitud y el tiempo en los operadores diferenciales de las ecuaciones (2.5) y (2.6); $\beta_1 - \beta_{10}$, coeficientes (factores) de escala que tienen las siguientes unidades de medida:

β_1, A/m; β_2, V/m; β_3, A/m^2; β_4, V/m^2; β_5, S·m;

β_6, Φ/m; β_7, Ω/m; β_8, H/m; β_9, m; β_{10}, s.

Sustituyamos las expresiones (36.1) en las ecuaciones (2.5) y (2.6):

$$\frac{\beta_1}{\beta_9} \operatorname{rot} \mathbf{a}_1 = \beta_3 \mathbf{a}_3 + \beta_5 \beta_2 a_5 \mathbf{a}_2 + \frac{\beta_6 \beta_2}{\beta_{10}} a_6 \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial a_{10}}, \qquad (36.2)$$

$$\frac{\beta_2}{\beta_9} \operatorname{rot} \mathbf{a}_2 = -\beta_4 \mathbf{a}_4 - \beta_7 \beta_1 a_7 \mathbf{a}_1 - \frac{\beta_8 \beta_1}{\beta_{10}} a_8 \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial a_{10}}. \qquad (36.3)$$

Dividamos la ecuación (36.2) por β_1, la ecuación (36.3) por β_2 y multipliquemos las dos ecuaciones por β_9:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}_1 = \frac{\beta_3 \beta_9}{\beta_1} \mathbf{a}_3 + \frac{\beta_9 \beta_2 \beta_5 a_5}{\beta_1} \mathbf{a}_2 + \frac{\beta_6 \beta_2 \beta_9 a_6}{\beta_{10} \beta_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial a_{10}}, \qquad (36.4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}_2 = -\frac{\beta_4 \beta_9}{\beta_2} \mathbf{a}_4 - \frac{\beta_7 \beta_1 \beta_9 a_7}{\beta_2} \mathbf{a}_1 - \frac{\beta_8 \beta_1 \beta_9 a_8}{\beta_{10} \beta_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial a_{10}}. \qquad (36.5)$$

Al introducir las designaciones

$$C_1 = \frac{\beta_3 \beta_9}{\beta_1}, \quad C_2 = \frac{\beta_5 \beta_2 \beta_9 a_5}{\beta_1}, \quad C_3 = \frac{\beta_6 \beta_2 \beta_9 a_6}{\beta_{10} \beta_1},$$

$$C_4 = \frac{\beta_4 \beta_9}{\beta_2}, \quad C_5 = \frac{\beta_7 \beta_1 \beta_9 a_7}{\beta_2}, \quad C_6 = \frac{\beta_8 \beta_1 \beta_9 a_8}{\beta_{10} \beta_2} \qquad (36.6)$$

y ponerlas en las ecuaciones (36.4) y (36.5), obtenemos

$$\text{rot } \mathbf{a}_1 = C_1\mathbf{a}_3 + C_2\mathbf{a}_3 + C_3 \frac{\partial a_2}{\partial a_{10}}, \tag{36.7}$$

$$\text{rot } \mathbf{a}_2 = -C_4\mathbf{a}_4 - C_5\mathbf{a}_1 - C_6 \frac{\partial a_1}{\partial a_{10}}. \tag{36.8}$$

Las ecuaciones (36.7) y (36.8) son adimensionales. Mediante estas ecuaciones pueden describirse diferentes problemas electrodinámicos.

Supongamos que tenemos dos problemas electrodinámicos y los correspondientes dos grupos de ecuaciones que los definen. Si los coeficientes C con los mismos índices en los dos grupos de ecuaciones son idénticos, también lo serán las ecuaciones. Sin embargo, el carácter idéntico de las ecuaciones no significa que son idénticos los problemas electrodinámicos. El carácter idéntico de los problemas tiene lugar en el caso de que los coeficientes β tienen los índices iguales, así como cuando los coeficientes a_5, a_6, a_7 y a_8 de dos problemas son iguales entre sí. La identidad de las ecuaciones requiere que sean iguales los coeficientes C, lo cual puede conseguirse con diferentes valores de los coeficientes β y a en el primer y segundo problemas. Si se han creado las condiciones en que los coeficientes C de ambos problemas son iguales siendo distintos los valores de los coeficientes β y a, se dice que los problemas electrodinámicos son semejantes, o sea, se caracterizan por las mismas ecuaciones adimensionales de Maxwell. Al marcar los coeficientes pertenecientes al primer problema con un trazo y los referentes al segundo problema con dos trazos, se puede escribir el requisito de identidad de los dos problemas electrodinámicos

$$\beta'_n = \beta''_n, \quad a'_5 = a''_5, \quad a'_6 = a''_6, \quad a'_7 = a''_7, \quad a'_8 = a''_8, \tag{36.9}$$

donde $n = 1, 2, 3, \ldots, 6$.

Mientras tanto, el requisito de semejanza de los dos problemas electrodinámicos debe escribirse en forma de igualdades

$$C'_m = C''_m, \tag{36.10}$$

donde $m = 1, 2, 3, \ldots, 6$.

Las igualdades (36.10) representan la expresión matemática del principio de semejanza electrodinámica.

En el Apéndice V se dan ejemplos de utilización del principio de semejanza electrodinámica.

CAPÍTULO 37

Algunas cuestiones de interacción de los electrones con el campo electromagnético

§ 37.1. Planteamiento del problema

Los procesos de interacción de los electrones y de los haces electrónicos con el campo electromagnético ocupan un lugar especial en la teoría del campo electromagnético. El trabajo de los dispositivos electrónicos modernos se basa en las leyes de esta interacción. El número de cuestiones que deben analizarse al estudiar los procesos de interacción puede formar el contenido de varios cursos especiales. En el marco del curso «Fundamentos de electrodinámica» es imposible esclarecer estas cuestiones en grado suficiente. Por eso, en el presente capítulo nos limitaremos a exponer las tesis fundamentales acerca de la interacción de los electrones con el campo electromagnético, lo cual puede considerarse como una introducción a los cursos especiales.

§ 37.2. Movimiento del electrón en el campo electromagnético

De acuerdo con la ley de Coulomb (1.1) y la definición del vector de intensidad del campo eléctrico **E**, la fuerza que actúa sobre el electrón por parte del campo eléctrico puede expresarse por la relación

$$\mathbf{F}_{e1} = e\mathbf{E}, \tag{37.1}$$

donde $\mathbf{F}_{e1}$ es el vector de la fuerza que actúa sobre el electrón por parte del campo eléctrico; e, la carga del electrón igual a $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C, y **E**, el vector de intensidad del campo eléctrico.

La acción del campo magnético se caracteriza por la relación (1.56), la cual, con arreglo al caso considerado, se escribe en la forma

$$\mathbf{F}_m = e\,[\mathbf{vB}], \tag{37.2}$$

donde $\mathbf{F}_m$ es el vector de la fuerza que actúa sobre el electrón por parte del campo magnético; **v**, el vector de velocidad del movimiento del electrón, y **B**, el vector de inducción magnética.

La fuerza total $\mathbf{F}_e$ que actúa sobre el electrón es igual al producto de la masa por la aceleración:

$$\mathbf{F}_e = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \tag{37.3}$$

donde m es la masa del electrón igual a $9{,}108 \cdot 10^{-31}$ kg; $d^2\mathbf{r}/dt^2$, la segunda derivada del recorrido $\mathbf{r}$ respecto al tiempo t, o la aceleración.

Se puede escribir que

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_{el} + \mathbf{F}_m = e\mathbf{E} + e\,[\mathbf{vB}]. \qquad (37.4)$$

Al comparar las expresiones (37.3) y (37.4), obtenemos

$$1_F \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{e}{m}\mathbf{E} + \frac{e}{m}[\mathbf{vB}]. \qquad (37.5)$$

La expresión (37.5) permite determinar el carácter del movimiento del electrón en diferentes casos. Examinemos algunos de ellos.

Movimiento del electrón en un campo eléctrico. En ausencia del campo magnético, a base de las relaciones (27.13) y (27.11)

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\, U_{el}. \qquad (37.6)$$

Por consiguiente, la expresión (37.5) puede escribirse de nuevo en la siguiente forma

$$1_F \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{e}{m}\,\text{grad}\, U_{el} = -\frac{e}{m}\,1_F \frac{dU_{el}}{dr}. \qquad (37.7)$$

Puesto que

$$dr/dt = v \quad \text{y} \quad dr = v\,dt,$$

la ecuación (37.7) puede escribirse en la forma

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\frac{e}{m}\cdot\frac{1}{v}\cdot\frac{dU_{el}}{dt}.$$

Al integrar esta ecuación, obtenemos

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = -\frac{e}{m}\int_{U_{el0}}^{U_{el}} dU_{el}$$

o bien, teniendo en cuenta que el electrón porta una carga negativa,

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = e\,(U_{el} - U_{el0}). \qquad (37.8)$$

Si los valores iniciales de v_0 y $U_{el\,0}$ son iguales a cero, la expresión (37.8) nos lleva a la relación conocida

$$v = \sqrt{2\frac{e}{m}U_{el}}. \qquad (37.9)$$

Movimiento del electrón en un campo magnético. Cuando no hay campo eléctrico, a base de la expresión (37.2)

$$F_m = evB \operatorname{sen} \alpha, \qquad (37.10)$$

donde α es el ángulo entre las direcciones de los vectores **v** y **B**.

Supongamos que el campo magnético está orientado a lo largo del eje z. Entonces, $B_x = B_y = 0$ y la ecuación (37.5) se escribe

en la forma

$$1_F \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{e}{m}[vB_z]. \qquad (37.11)$$

Desarrollemos las expresiones para $1_F \frac{d^2r}{dt^2}$ y v:

$$1_F \frac{d^2r}{dt^2} = 1_x \frac{d^2x}{dt^2} + 1_y \frac{d^2y}{dt^2} + 1_z \frac{d^2z}{dt^2},$$

$$v = 1_x \frac{dx}{dt} + 1_y \frac{dy}{dt} + 1_z \frac{dz}{dt}.$$

Sustituyamos las expresiones obtenidas en la ecuación (37.11):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{e}{m} \cdot \frac{dy}{dt} B_z, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{e}{m} \cdot \frac{dx}{dt} B_z, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (37.12)$$

La solución de estas ecuaciones no presenta dificultades. Al suponer que la velocidad inicial de movimiento del electrón es v_0 y admitir que su dirección es tal que el ángulo formado con el eje z es α y el ángulo que la proyección de esta velocidad sobre el plano x, y forma con el eje x es igual a β, escribamos la solución del sistema de ecuaciones (37.12):

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{m}{eB_z} v_0 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{eB_z}{m} t - \beta\right), \\ y &= \frac{m}{eB_z} v_0 \operatorname{sen}\alpha \cos\left(\frac{eB_z}{m} t - \beta\right), \\ z &= v_0 t \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (37.13)$$

La veracidad de las soluciones anotadas es fácil de confirmar sustituyéndolas en el sistema de ecuaciones (37.12). En el plano x, y el electrón se mueve por una circunferencia, lo que puede demostrarse sumando las expresiones para x e y elevadas al cuadrado:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{m}{eB_z} v_0 \operatorname{sen}\alpha\right)^2. \qquad (37.14)$$

El movimiento a lo largo del eje z, de acuerdo con la última ecuación del sistema (37.13), es progresivo y se realiza a la velocidad de $v_0 \cos\alpha$. En su conjunto, el electrón, influenciado por el campo magnético, se mueve según una línea helicoidal, girando alrededor del eje z y avanzando progresivamente a lo largo de éste. De las expresiones (37.13) se deduce que la frecuencia angular ω_z de la rotación del electrón alrededor del eje z es

$$\omega_z = \frac{eB_z}{m}, \qquad (37.15)$$

Movimiento del electrón en un campo electromagnético homogéneo. Analicemos un caso elemental en que los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí. Supongamos que $\mathbf{B} = \mathbf{B}_z$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_x$ y $\mathbf{E}_y = \mathbf{E}_z = \mathbf{B}_x = \mathbf{B}_y = 0$. Sea que en el momento inicial del tiempo el electrón atraviesa el origen de coordenadas a una velocidad v_0 dirigida normalmente con respecto al campo $\mathbf{B}_z$. Las ecuaciones que definen el movimiento del electrón, basándose en la expresión (37.5), se escriben en la forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{e}{m} E_x + \frac{e}{m} B_z \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{e}{m} B_z, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{37.16}$$

Como resultado de integración de las ecuaciones (37.16), se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\omega_z} v_{0x} \operatorname{sen}(\omega_z t) + \left(\frac{e}{m}\frac{1}{\omega_z^2} E_x + \frac{1}{\omega_z} v_{0y}\right)\{1 - \cos(\omega_z t)\}, \\ y &= \left(\frac{1}{\omega_z^2}\frac{e}{m} E_x + \frac{1}{\omega_z} v_{0y}\right) \operatorname{sen}(\omega_z t) - \\ &\qquad - \frac{1}{\omega_z} v_{0x}\{1 - \cos(\omega_z t)\} - \frac{E_x}{B_z} t, \\ z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{37.17}$$

donde v_{0x} y v_{0y} son las proyecciones de la velocidad v_0 sobre los ejes x e y, respectivamente.

Al eliminar las funciones trigonométricas de las expresiones (37.17), obtenemos la ecuación de la trayectoria del electrón:

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = R^2, \tag{37.18}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{\omega_z}\left(v_{0y} + \frac{E_x}{B_z}\right), \\ B &= -\frac{1}{\omega_z}\left(v_{0x} + \frac{e}{m} E_x t\right), \\ R^2 &= \frac{2}{m} \cdot \frac{1}{\omega_z^2}\left(\frac{mv_0^2}{2} + \frac{mv_{0y}}{B_z} E_x + \frac{m}{2B_z^2} E_x^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{37.19}$$

De este modo, la acción sobre el electrón de los campos eléctrico y magnético perpendiculares entre sí conduce a la ecuación de la trayectoria (37.18) que se define por un punto en la circunferencia de radio R. El centro de esta circunferencia se desplaza de modo rectilíneo y uniforme por una recta que se encuentra a una distancia A de eje y, estando orientada paralelamente a este eje. La velocidad de desplazamiento del centro es igual a E_x/B_z.

§ 37.3. Angulo ficticio del vuelo del electrón

En muchos dispositivos electrónicos, el electrón emitido por el cátodo se dirige bajo la acción del campo hacia el segundo electrodo. Es muy importante conocer el tiempo de vuelo del electrón entre los electrodos Habitualmente, lo que importa no es el valor absoluto de este tiempo, sino su relación respecto al período de oscilación. A raíz de ello se introduce el concepto de ángulo del vuelo de los electrones θ:

$$\theta = 2\pi \frac{t_{\text{vuelo}}}{T},$$

donde t_{vuelo} es el tiempo de vuelo del electrón entre los electrodos, y T, el período de oscilación de la tensión entre los electrodos.

Puesto que los electrones poseen distintas velocidades, el tiempo de vuelo de cada electrón es diferente Con el fin de impartir cierta determinación al concepto de ángulo del vuelo, éste se sustituye por el ángulo ficticio del vuelo que se determina de la misma manera que el ángulo del vuelo, pero la tensión entre los electrodos se toma constante e igual al valor de amplitud de la tensión alterna. Hallemos la magnitud del ángulo ficticio del vuelo. Si en la expresión (37.5) suponemos que el vector $\mathbf{B}$ es igual a cero, obtenemos la siguiente ecuación de movimiento del electrón:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{e}{m} E.$$

Si el campo es homogéneo y la distancia entre los electrodos es igual a d, entonces

$$E = U_{el}/d$$

y la ecuación de movimiento del electrón se escribe en la forma

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{e}{md} U_{el}. \qquad (37.20)$$

Al considerar que la velocidad del electrón en el momento inicial de tiempo es igual a cero y al disponer el origen de las coordenadas en el plano del cátodo, obtenemos

$$r = \frac{eU_{el}}{md} \cdot \frac{t^2}{2},$$

de donde el tiempo ficticio de vuelo para $r = d$ es

$$t_f = d\sqrt{\frac{2m}{eU_{el}}}. \qquad (37.21)$$

El ángulo ficticio del vuelo es

$$\theta_f = 2\pi \frac{t_f}{T} = \frac{2\pi}{T} d\sqrt{\frac{2m}{eU_{el}}}. \qquad (37.22)$$

Al sustituir el valor de la masa y de la carga del electrón, tenemos

$$\theta_f = \frac{12fd}{\sqrt{U_{el}}}. \qquad (37.23)$$

Aquí θ_f es el ángulo ficticio del vuelo del electrón, grad; f, la frecuencia de las oscilaciones de la tensión aplicada entre los electrodos, mHz; d, la distancia entre los electrodos, cm, y U_{el}, la tensión entre los electrodos, V.

La expresión (37.23) es la expresión de cálculo para determinar el ángulo ficticio del vuelo.

§ 37.4. Corriente total que se engendra entre los electrodos

Cuando se calculan los dispositivos electrónicos, es necesario saber la magnitud de la corriente total que aparece entre los electrodos en el caso de que entre éstos vuelan los electrones. Esta corriente puede hallarse partiendo de las siguientes consideraciones. El desplazamiento de la carga entre los electrodos se acompaña por el consumo de una potencia igual al producto de la fuerza aplicada a la carga por la velocidad de desplazamiento de la misma.

$$P = F_{el}v. \qquad (37.24)$$

Por otra parte, esta potencia es igual al producto de la tensión aplicada a los electrodos por la magnitud de la corriente en el circuito de los electrodos:

$$P = U_{el}I_{el}. \qquad (37.25)$$

Al igualar los valores de las potencias, hallamos

$$F_{el}v = U_{el}I_{el}. \qquad (37.26)$$

Al sustituir en esta última expresión el valor de la fuerza F_{el} a partir de la ecuación (37.1) y suponer que el campo entre los electrodos es homogéneo, en el cual

$$E = U_{el}/d,$$

donde U_{el} es la tensión en los electrodos, y d, la distancia entre los electrodos, la ecuación (37.26) puede escribirse en la forma

$$I_{el} = \frac{ev}{d}. \qquad (37.27)$$

El valor obtenido de la corriente que aparece en el circuito de dos electrodos cuando entre éstos vuela la carga e, representa la corriente inducida en estos electrodos por la carga en vuelo. En virtud de ello dicha corriente se denomina inducida. Así es cuando la frecuencia es pequeña y la corriente de desplazamiento entre los electrodos puede despreciarse. En cambio, si la frecuencia es grande, a la corriente inducida se le debe añadir la corriente de desplazamiento,

cuya densidad es

$$J_{des} = \frac{dD}{dt} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}.$$

Para obtener la densidad de la corriente inducida conviene dividir la corriente hallada de la expresión (37.27) por el área de los electrodos

$$J_{el} = 1_n \frac{I_{el}}{S} = 1_n \frac{ev}{Sd}.$$

El producto $S \cdot d$ es el volumen encerrado entre los electrodos, y el cociente de la división de la carga por este volumen representa la densidad volumétrica de las cargas ρ_{el}. Entonces, la densidad de la corriente inducida es

$$J_{el} = 1_n \rho_{el} v. \tag{37.28}$$

La densidad de la corriente total J_Σ es igual a la suma de densidades de la corriente inducida y de la de desplazamiento:

$$J_\Sigma = J_{el} + J_{des} = 1_n \rho_{el} v + \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}. \tag{37.29}$$

Precisamente esta corriente total debe tomarse en consideración en el análisis de los aparatos electrónicos que funcionan con frecuencias ultraaltas.

§ 37.5. Interacción entre el flujo electrónico y el campo eléctrico

El funcionamiento de una serie de dispositivos electrónicos, por ejemplo, de los tubos de ondas progresivas, se basa en el principio de interacción de los haces electrónicos con los campos electromagnéticos. Para comprender el trabajo de semejantes dispositivos es necesario formarse una idea acerca del carácter de esta interacción.

Ante todo, examinemos el caso en que sobre el flujo electrónico, en forma de cierto haz de sección finita, actúa el campo externo E_z orientado a lo largo de este haz. Supongamos que el eje del haz de electrones coincide con el eje z del sistema de coordenadas cartesianas. Admitamos que la velocidad de los electrones en el haz es la suma de cierta componente constante v_0 y de cierta componente alterna $v(z, t)$ que es función de la coordenada z y del tiempo t:

$$v = v_0 + v(z, t). \tag{37.30}$$

Basándose en la ecuación del movimiento (37.3) se puede escribir la ecuación del movimiento de los electrones en el haz para el caso considerado:

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = eE_z,$$

donde m es la masa del electrón; d^2z/dt^2, la aceleración; e, la carga del electrón, y E_z, la componente longitudinal de la intensidad del

campo eléctrico que actúa sobre el haz de conformidad con las condiciones del problema analizado.

Teniendo en cuenta que la aceleración es la primera derivada de la velocidad respecto al tiempo, se puede escribir esta ecuación en la forma

$$m \frac{d}{dt} \{v_0 + v(z, t)\} = eE_z. \qquad (37.31)$$

Hasta el momento se desconoce cómo variará la densidad de las cargas volumétricas en el haz electrónico bajo la acción del campo eléctrico externo. En virtud de ello escribamos la densidad de las cargas volumétricas en forma de cierta componente constante ρ_0 y de otra componente alterna $\rho(z, t)$ que es función de la coordenada z y del tiempo t:

$$\rho_{el.\ haz} = \rho_0 + \rho(z, t). \qquad (37.32)$$

La densidad de la corriente en el haz $J_{el.haz}$ es igual al producto de la densidad de las cargas volumétricas ρ por el vector de velocidad del movimiento de estas cargas v:

$$J_{el.\ haz} = \rho_{el.\ haz}\, v.$$

Al sustituir en la última expresión el valor de la velocidad y de la densidad tomado de las fórmulas (37.30) y (37.32), obtenemos la densidad de la corriente que también se formará de cierta componente constante J_0 y la componente alterna $J_{haz}(z, t)$:

$$J_{el.\ haz} = J_0 + J_{haz}(z, t) = \\ = \{\rho_0 + \rho(z, t)\}\ \{v_0 + v(z, t)\}, \qquad (37.33)$$

donde

$$J_0 = \rho_0 v_0. \qquad (37.34)$$

Seguidamente, hagamos uso de otra dependencia que relaciona la densidad de la corriente en el haz con la densidad de las cargas volumétricas. Esta dependencia que lleva el nombre de ecuación de continuidad quedó establecida por la relación (2.10). Con arreglo al caso considerado esta relación debe escribirse en la forma

$$\operatorname{div} J_{el.\ haz} = -d\rho_{el.\ haz}/dt. \qquad (37.35)$$

La ecuación de continuidad puede escribirse en la forma

$$\operatorname{div} J_{el\ haz} = \operatorname{div}\{J_0 + J_{haz}(z, t)\} = -\frac{d}{dt}\{\rho_0 + \rho(z, t)\}. \qquad (37.36)$$

Las ecuaciones (37.31), (37.33) y (37.36) representan un sistema de ecuaciones que enlazan entre sí el campo, la velocidad, la densidad de las cargas volumétricas y la densidad de la corriente en el haz. Empleando este sistema se puede relacionar mediante una sola ecuación cualesquiera dos funciones de las cuatro mencionadas. Con este fin, escribamos dichas ecuaciones para las amplitudes complejas, lo que facilitará sustancialmente la solución. Comencemos por la ecua-

ción (37.31). Al llevar a cabo la diferenciación de la velocidad respecto al tiempo conviene tener en cuenta que la derivada de la componente constante de la velocidad v_0 es igual a cero. La componente alterna de la velocidad debe diferenciarse como una función compleja:

$$\frac{dv(z, t)}{dt} = \frac{dv(z, t)}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{dv(z, t)}{dt}.$$

Puesto que la derivada $dz/dt = v = v_0 + v(z, t)$ y la diferenciación respecto al tiempo en el caso de amplitudes complejas es equivalente a la multiplicación por $j\omega$, a partir de la ecuación (37.31) obtenemos

$$(\dot{v}_0 + \dot{v}) \frac{d\dot{v}}{dz} + j\omega\dot{v} = \frac{e}{m} \dot{E}_z. \qquad (37.37)$$

Aquí $\dot{v}$ es la amplitud compleja de la componente alterna de la velocidad, y $\dot{E}_z$, la amplitud compleja de la componente longitudinal de la intensidad del campo eléctrico.

Valiéndonos de la ecuación (37.33) obtenemos la relación para la amplitud compleja de la componente alterna de la densidad de la corriente:

$$\dot{J}_{haz} = \dot{\rho}v_0 + \dot{\rho}_0\dot{v} + \dot{\rho}\dot{v}, \qquad (37.38)$$

donde $\dot{J}_{haz}$ es la amplitud compleja de la componente alterna de la densidad de la corriente.

A continuación, pasemos a la última ecuación (37.36). Como se conoce, en el sistema de coordenadas cartesianas

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{J}}_{haz} = \frac{\partial \dot{J}_{haz\,x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{J}_{haz\,y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{J}_{haz\,z}}{\partial z}.$$

En el problema examinado el haz está orientado a lo largo del eje z, por cuya razón, en la expresión aducida es necesario tener en cuenta tan sólo la componente $\dot{J}_{haz\,z}$. La derivada respecto al tiempo de la componente constante de la densidad de la carga volumétrica ρ_0 es igual a cero. Entonces, la ecuación (37.36) para las amplitudes complejas se escribirá en la forma

$$d\dot{J}_{haz\,z}/dz = -j\omega\dot{\rho}, \qquad (37.39)$$

donde $\dot{\rho}$ es la amplitud compleja de la componente alterna de la densidad de la carga volumétrica en el haz.

Las ecuaciones para las amplitudes complejas (37.37), (37.38) y (37.39) representan un sistema de ecuaciones no lineales cuya solución es bastante compleja. Para simplificar el problema supongamos que los cambios de la velocidad y de la densidad de la carga volumétrica son pequeños en comparación con sus componentes constan-

tes. Este enunciado puede expresarse por medio de las desigualdades

$$|\dot{v}| \ll |\dot{v}_0| \quad \text{y} \quad |\dot{\rho}| \ll |\dot{\rho}_0|.$$

En este caso el sistema de ecuaciones no lineales (37.37) (37.38) se transforma en el sistema de ecuaciones lineales:

$$\dot{v}_0 \frac{d\dot{v}}{dz} + j\omega\dot{v} = \frac{e}{m}\dot{E}_z, \tag{37.40}$$

$$\dot{J}_{\text{haz}} = \dot{J}_{\text{haz}\,z} = \dot{\rho}\dot{v}_0 + \dot{\rho}_0\dot{v}. \tag{37.41}$$

La ecuación (37.39) se escribe sin cambios.

Deduzcamos de este sistema de ecuaciones una sola ecuación que relacione la intensidad del campo eléctrico $\dot{E}_z$ con la densidad de la corriente en el haz $J_{\text{haz}\,z}$. Con este fin, a partir de la ecuación (37.39) hallemos ante todo la amplitud compleja de la densidad de la carga volumétrica:

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{j\omega} \cdot \frac{d\dot{J}_{\text{haz}\,z}}{dz}. \tag{37.42}$$

Sustituyamos el valor hallado de $\dot{\rho}$ en la ecuación (37.41):

$$\dot{J}_{\text{haz}\,z} = -\frac{\dot{v}_0}{j\omega} \cdot \frac{d\dot{J}_{\text{haz}\,z}}{dz} + \dot{\rho}_0\dot{v}.$$

Seguidamente, determinemos a partir de la última ecuación la amplitud compleja de la velocidad $\dot{v}$:

$$\dot{v} = \frac{1}{\dot{\rho}_0}\left(\dot{J}_{\text{haz}\,z} + \frac{\dot{v}_0}{j\omega} \cdot \frac{d\dot{J}_{\text{haz}\,z}}{dz}\right).$$

Sustituyamos el valor hallado de $\dot{v}$ en la ecuación (37.40).

$$\frac{\dot{v}_0}{\dot{\rho}_0}\left(\frac{d\dot{J}_{\text{haz}\,z}}{dz} + \frac{\dot{v}_0}{j\omega} \cdot \frac{d^2\dot{J}_{\text{haz}\,z}}{dz^2}\right) + \frac{j\omega}{\dot{\rho}_0}\left(\dot{J}_{\text{haz}\,z} + \frac{\dot{v}_0}{j\omega} \cdot \frac{d\dot{J}_{\text{haz}\,z}}{dz}\right) = \frac{e}{m}\dot{E}_z.$$

Al agrupar los términos, obtenemos

$$\frac{\dot{v}_0^2}{j\omega\dot{\rho}_0} \cdot \frac{d^2\dot{J}_{\text{haz}\,z}}{dz^2} + 2\frac{\dot{v}_0}{\dot{\rho}_0} \cdot \frac{d\dot{J}_{\text{haz}\,z}}{dz} + \frac{j\omega}{\dot{\rho}_0}\dot{J}_{\text{haz}\,z} = \frac{e}{m}\dot{E}_z. \tag{37.43}$$

Esta ecuación relaciona la densidad de la corriente en el haz electrónico con la intensidad del campo eléctrico que actúa sobre el haz. Para el análisis posterior del proceso es necesario prefijar el campo eléctrico que actúa sobre el haz o establecer una relación adicional entre el campo y el haz, de modo que, después de obtener otra ecuación, resolverla conjuntamente con la ecuación (37.43). Supongamos que en cierto sistema electrodinámico, que momentáneamente no concretaremos, actúa un haz de electrones que consideraremos como una corriente extrínseca de excitación.

§ 37.6. Excitación del campo mediante un haz electrónico

Sea que el haz electrónico orientado a lo largo del eje z en el sistema de coordenadas cartesianas atraviesa un medio carente de conductibilidad. Tomemos como base del cálculo las ecuaciones de Maxwell para las amplitudes complejas (2.12) y (2.13), admitiendo que $\dot{J}_m = 0$:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{J}_{el} + j\omega\varepsilon_a \dot{\mathbf{E}},$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}}$$

(el medio no es conductor, por eso en lugar de $\tilde{\varepsilon}_a\tilde{\mu}_a$ se han tomado ε_a y μ_a).

De estas ecuaciones se obtienen las siguientes correlaciones:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu_a \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}},$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = \omega^2\mu_a\varepsilon_a \dot{\mathbf{E}} - j\omega\mu_a \dot{\mathbf{J}}_{el}.$$

Puesto que $\omega^2\mu_a\varepsilon_a = \beta^2$,

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = \beta^2 \dot{\mathbf{E}} - j\omega\mu_a \dot{\mathbf{J}}_{el}.$$

Al aprovechar la identidad vectorial

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} \equiv \operatorname{grad}\operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} - \nabla^2 \dot{\mathbf{E}},$$

obtenemos

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \beta^2 \dot{\mathbf{E}} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} + j\omega\mu_a \dot{\mathbf{J}}_{el}. \qquad (37.44)$$

En el problema investigado el papel de densidad de la corriente eléctrica extrínseca lo desempeña la densidad de la corriente en el haz electrónico $\dot{\mathbf{J}}_{haz\ z}$. Teniendo en cuenta esta circunstancia la ecuación (37.44) debe escribirse en la forma

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \beta^2 \dot{\mathbf{E}} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} + j\omega\mu_a \dot{\mathbf{J}}_{haz\ z}. \qquad (37.45)$$

Para determinar la divergencia del vector $\dot{\mathbf{E}}$ hacemos uso de la ecuación (2.14):

$$\operatorname{div}(\tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}}) = \dot{\rho}_{el},$$

que en el caso considerado puede escribirse en la forma

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} = \dot{\rho}_{el}/\varepsilon_a.$$

El papel de $\dot{\rho}_{el}$ lo juega la densidad de la carga volumétrica en el haz, en virtud de lo cual la fórmula puede escribirse de la siguiente manera:

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} = \dot{\rho}/\varepsilon_a. \qquad (37.46)$$

El valor de ρ viene definido por la fórmula (37.42).
Entonces, la expresión (37.46) se puede escribir como sigue:

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon_a} \cdot \frac{d\dot{J}_{\text{haz } z}}{dz}. \qquad (37.47)$$

Al sustituir la expresión (37.47) en la fórmula (37.45), obtenemos

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \beta^2 \dot{\mathbf{E}} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon_a} \operatorname{grad} \frac{d\dot{J}_{\text{haz } z}}{dz} + j\omega\mu_a \dot{\mathbf{J}}_{\text{haz } z}. \qquad (37.48)$$

La ecuación (37.48) es la ecuación inicial que relaciona la densidad de la corriente en el haz electrónico con el campo eléctrico excitado por este haz. En el párrafo anterior (§ 37.5) se ha establecido la relación entre la densidad de la corriente en el haz y el campo $\dot{E}_z$ [véase la ecuación (37.43)]. Transformemos la ecuación (37.48) de modo que a partir de ésta se obtenga la relación entre la densidad de la corriente en el haz y la componente longitudinal del campo eléctrico E_z. Con este fin pasemos de la ecuación vectorial a la escalar compuesta para la componente del campo $\dot{E}_z$. En el sistema de coordenadas cartesianas el laplaciano es igual a

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\mathbf{1}_x \dot{E}^x + \mathbf{1}_y \dot{E}^y + \mathbf{1}_z \dot{E}^z),$$

donde $\dot{E}^x$, $\dot{E}^y$ y $\dot{E}^z$ son las componentes del campo $\dot{E}$ por los ejes de coordenadas.

Para la componente longitudinal del campo orientada a lo largo del eje z se deben conservar de esta expresión únicamente los términos

$$\frac{\partial^2 \dot{E}^z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}^z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}^z}{\partial z^2}.$$

En el sistema de coordenadas cartesianas el gradiente es igual a

$$\operatorname{grad} \frac{d\dot{J}_{\text{haz } z}}{dz} = \mathbf{1}_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\dot{J}_{\text{haz } z}}{dz} \right) +$$

$$+ \mathbf{1}_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d\dot{J}_{\text{haz } z}}{dz} \right) + \mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{d\dot{J}_{\text{haz } z}}{dz} \right).$$

Limitándose a la componente del gradiente orientada a lo largo del eje z, en esta expresión debe conservarse el término

$$\mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{d\dot{J}_{\text{haz } z}}{dz} \right) = \mathbf{1}_z \frac{d^2 \dot{J}_{\text{haz}}}{dz^2}.$$

Entonces, la ecuación escalar para la componente del campo eléctrico orientada a lo largo del eje z obtenida de la ecuación (37.48)

tendrá la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}^z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}^z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}^z}{\partial z^2} + \beta^2 \dot{E}^z =$$

$$= -\frac{1}{j\omega\varepsilon_a} \cdot \frac{d^2 \dot{J}_{\text{haz } z}}{dz^2} + j\omega\mu_a \dot{J}_{\text{haz } z}. \qquad (37.49)$$

Luego, siguiendo el método de Fourier, supongamos que la componente del campo $\dot{E}^z$, en el caso general, es función de las tres coordenadas: x, y, z. Representemos este campo como producto de tres funciones

$$\dot{E}^z = XY\dot{E}_z,$$

donde X es función solamente de la coordenada x y no depende de las otras dos coordenadas; Y es función tan sólo de la coordenada y, no dependiente de las dos coordenadas restantes, y $\dot{E}_z$ es una función que determina la dependencia del campo sólo respecto a la coordenada z y no depende de las coordenadas x e y.

Si sustituimos la última expresión en la ecuación (37.49) y realizamos la diferenciación, obtenemos

$$Y\dot{E}_z \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X\dot{E}_z \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + XY \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + \beta^2 XY\dot{E}_z =$$

$$= -\frac{1}{j\omega\varepsilon_a} \cdot \frac{d^2 \dot{J}_{\text{haz } z}}{dz^2} + j\omega\mu_a \dot{J}_{\text{haz } z}$$

Al dividir la ecuación obtenida por el producto de tres funciones $XY\dot{E}_z$ y agrupar los términos, obtenemos

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \beta^2 = -\frac{1}{\dot{E}_z} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} +$$

$$+ \frac{1}{XY\dot{E}_z} \left(-\frac{1}{j\omega\varepsilon_a} \cdot \frac{d^2 \dot{J}_{\text{haz } z}}{dz^2} + j\omega\mu_a \dot{J}_{\text{haz } z} \right).$$

El primer sumando del primer miembro de esta ecuación es función solamente de la coordenada x, el segundo sumando es función, exclusivamente, de la coordenada y y el tercer sumando es un número constante. En el segundo miembro el primer sumando es función tan sólo de la coordenada z, mientras que el segundo y el tercer sumandos, en el caso general, pueden ser funciones de las tres coordenadas. De acuerdo con el método de Fourier, la igualdad es posible a condición de que los primeros dos sumandos del primer miembro sean números constantes y su suma también sea un número constante. De este modo es posible escribir

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -g^2,$$

donde g es cierto número constante equivalente al número de onda transversal.

Admitiendo que $\beta^2 - g^2 = h^2$, donde h es el número de onda longitudinal, obtenemos

$$h^2 = -\frac{1}{\dot{E}_z} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{dz^2} + \frac{1}{XY\dot{E}_z} \left(\frac{1}{j\omega\varepsilon_a} \cdot \frac{d^2 \dot{j}_{\text{haz}\,z}}{dz^2} + j\omega\mu_a \dot{j}_{\text{haz}\,z} \right).$$

Al sustituir la derivada parcial por la ordinaria, multiplicar todos los términos de esta ecuación por $\dot{E}_z$ y agruparlos, se puede escribir la ecuación buscada en forma definitiva:

$$\frac{d^2 \dot{E}_z}{dz^2} + h^2 \dot{E}_z = \frac{1}{XY} \left(-\frac{1}{j\omega\varepsilon_a} \cdot \frac{d^2 \dot{j}_{\text{haz}\,z}}{dz^2} + j\omega\mu_a \dot{j}_{\text{haz}\,z} \right). \quad (37.50)$$

De la última ecuación se desprende que el haz electrónico agrupado por el eje z, es decir, el haz que posee la segunda derivada de la densidad de la corriente respecto a la coordenada z, provoca la aparición del campo eléctrico axial agrupado, o sea, de un campo que posee la segunda derivada respecto a la coordenada z. Y viceversa, el campo elétrico axial agrupado acarrea la agrupación por el eje z de los electrones en un haz. Cuando se investiga el comportamiento del campo eléctrico a lo largo del eje z, siendo invariables los valores de las coordenadas x e y, se debe tener en cuenta que en este caso las funciones X e Y son magnitudes constantes y, por consiguiente, el producto XY en el denominador del segundo miembro de la ecuación (37.50) se convierte en un factor constante. Al suponer que $1/(XY) = A_{xy}$, obtenemos, al sacar fuera del paréntesis el factor $1/(j\omega\varepsilon_a)$, la siguiente ecuación válida para los valores prefijados e invariables de x e y:

$$\frac{d^2 \dot{E}_z}{dz^2} + h^2 \dot{E}_z = -\frac{A_{xy}}{j\omega\varepsilon_a} \left(\frac{d^2 \dot{j}_{\text{haz}\,z}}{dz^2} + \beta^2 \dot{j}_{\text{haz}\,z} \right). \quad (37.51)$$

La solución conjunta de las ecuaciones (37.43) y (37.51) en un caso concreto puede dar la ley de la variación del campo eléctrico y de la densidad de la corriente en el haz a lo largo del eje z. Esbocemos en rasgos generales esta solución.

No representa dificultad componer la ecuación para la densidad de la corriente en el haz. Con este fin definimos $\dot{E}_z$, basándose en la ecuación (37.43)

$$\dot{E}_z = \frac{m\dot{v}_0}{j\omega\rho_0 e} \cdot \frac{d^2 \dot{j}_{\text{haz}\,z}}{dz^2} + 2\frac{\dot{v}_0 m}{\rho_0 e} \cdot \frac{d\dot{j}_{\text{haz}\,z}}{dz} + \frac{j\omega m}{\rho_0 e} \dot{j}_{\text{haz}\,z}. \quad (37.52)$$

Hallemos la segunda derivada de la intensidad del campo eléctrico

$$\frac{d^2 \dot{E}_z}{dz^2} = \frac{m\dot{v}_0}{\omega\rho_0 e} \cdot \frac{d^4 \dot{j}_{\text{haz}\,z}}{dz^4} + 2\frac{\dot{v}_0 m}{\rho_0 e} \cdot \frac{d^3 \dot{j}_{\text{haz}\,z}}{dz^3} + \frac{j\omega m}{\rho_0 e} \cdot \frac{d^2 \dot{j}_{\text{haz}\,z}}{dz^2}. \quad (37.53)$$

Sustituyamos en la ecuación (37.51) $\dot{E}_z$ a partir de la ecuación (37.52) y $\frac{d^2\dot{E}_z}{dz}$ de la expresión (37.53):

$$\frac{m\dot{v}_0^2}{j\omega\dot{\rho}_0 e}\cdot\frac{d^4\dot{j}_{\text{haz }z}}{dz^4}+2\frac{\dot{v}_0 m}{\dot{\rho}_0 e}\cdot\frac{d^3\dot{j}_{\text{haz }z}}{dz^3}+\frac{j\omega m}{\dot{\rho}_0 e}\cdot\frac{d^2\dot{j}_{\text{haz }z}}{dz^2}+$$

$$+h^2\frac{m\dot{v}_0^2}{j\omega\dot{\rho}_0 e}\cdot\frac{d^2\dot{j}_{\text{haz }z}}{dz^2}+2h^2\frac{\dot{v}_0 m}{\dot{\rho}_0 e}\cdot\frac{d\dot{j}_{\text{haz }z}}{dz}+h^2\frac{j\omega m}{\dot{\rho}_0 e}\dot{j}_{\text{haz }z}+$$

$$+\frac{A_{xy}}{j\omega\varepsilon_a}\cdot\frac{d^2\dot{j}_{\text{haz }z}}{dz^2}+\frac{A_{xy}}{j\omega\varepsilon_a}\beta^2\dot{j}_{\text{haz }z}=0.$$

Agrupemos los términos en la ecuación obtenida:

$$\frac{m\dot{v}_0^2}{j\omega\dot{\rho}_0 e}\cdot\frac{d^4\dot{j}_{\text{haz }z}}{dz^4}+2\frac{\dot{v}_0 m}{\dot{\rho}_0 e}\frac{d^3\dot{j}_{\text{haz }z}}{dz^3}+$$

$$+\left(\frac{j\omega m}{\dot{\rho}_0 e}+\frac{h^2 m\dot{v}_0^2}{j\omega\dot{\rho}_0 e}+\frac{A_{xy}}{j\omega\varepsilon_a}\right)\frac{d^2\dot{j}_{\text{haz }z}}{dz^2}+$$

$$+2h^2\frac{\dot{v}_0 m}{\dot{\rho}_0 e}\cdot\frac{d\dot{j}_{\text{haz }z}}{dz}+\left(\frac{h^2 j\omega m}{\dot{\rho}_0 e}+\frac{A_{xy}}{j\omega\varepsilon_a}\beta^2\right)\dot{j}_{\text{haz }z}=0. \quad (37.54)$$

La ecuación (37.54) representa una ecuación diferencial de cuarto orden con la solución del tipo

$$\dot{j}_{\text{haz }z}=A_1e^{\alpha_1 z}+A_2e^{\alpha_2 z}+A_3e^{\alpha_3 z}+A_4e^{\alpha_4 z}. \quad (37.55)$$

Los coeficientes α_1, α_2, α_3 y α_4 se determinan resolviendo la ecuación característica correspondiente a la ecuación (37.54). Su búsqueda, en casos concretos, no representa dificultad Si se conoce la solución de la ecuación (37.54) para la densidad de la corriente, se puede introducir esta solución en la ecuación (37.52), obteniendo la expresión para la intensidad del campo eléctrico $\dot{E}_z$ En el caso general este campo contiene cuatro ondas independientes, con la particularidad de que algunas ondas pueden ser de amplitud creciente.

El haz electrónico actúa recíprocamente con el campo de tal modo que provoca el aumento de su amplitud. Tiene lugar el proceso de amplificación.

El análisis ulterior de los procesos de interacción del haz electrónico con el campo está relacionado con el estudio de aparatos electrónicos concretos lo cual sale fuera del marco del presente libro.

Apéndices

APÉNDICE 1

Elementos del análisis vectorial

§ I.1. Concepto de la divergencia y el rotor de la función vectorial

Al examinar los problemas del análisis vectorial se introduce el concepto de manantial (o fuente) que engendra el campo y de sumidero que lo absorbe. En electrodinámica puede considerarse como manantial del campo la antena transmisora, y como sumidero, la antena de recepción. La intensidad del manantial o del sumidero del campo se suele caracterizar mediante una operación matemática llamada *divergencia*. Formalmente, la divergencia del campo del vector a se designa por div a y se define por la expresión

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint\limits_{\Delta S} \mathbf{a}\, d\mathbf{S}}{\Delta V}. \qquad (I.1)$$

Aquí $\oint\limits_{\Delta S}$ es una integral por una superficie cerrada pequeña ΔS que rodea el punto en que se determina la divergencia; a es el vector que caracteriza el campo; $d\mathbf{S} = dS\mathbf{1}_n$ es un elemento infinitamente pequeño de la superficie que rodea el punto multiplicado por el vector normal unitario $\mathbf{1}_n$ dirigido desde el interior de la superficie cerrada hacia fuera; ΔV es un volumen pequeño acotado por la superficie cerrada ΔS.

Por medio del paso límite la superficie cerrada se contrae a un punto. De este modo, la divergencia caracteriza la intensidad del manantial o del sumidero del campo en un punto. En el numerador de la expresión (I.1) se encuentra el flujo del vector a a través de la superficie cerrada ΔS.

Si el vector a forma un ángulo agudo con la normal unitaria $\mathbf{1}_n$, entonces el producto escalar bajo la integral

$$\mathbf{a}\, d\mathbf{S} = a dS \cos(\mathbf{a}, \mathbf{1}_n)$$

será positivo. El campo vectorial saldrá del punto en que se determina la divergencia, y el punto será el manantial del campo. En este caso la divergencia será una magnitud escalar positiva.

Si el vector a forma con la normal unitaria $\mathbf{1}_n$ un ángulo obtuso, la expresión escalar bajo la integral será negativa. El campo vectorial entrará en el punto en que se determina la divergencia, y el punto será el sumidero del campo. En este caso la divergencia será una magnitud escalar negativa.

Si el campo no existe o el flujo total del vector a a través de la superficie cerrada ΔS es igual a cero, la divergencia en el punto dado es igual a cero. En el punto no hay manantial ni sumidero del campo.

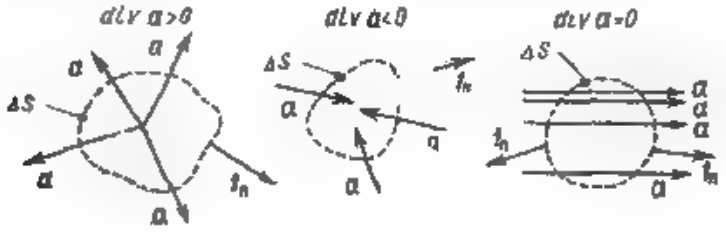

FIG. I.1

En la fig. I.1 se exponen ejemplos de campos que poseen divergencia positiva, negativa o nula.

En el análisis vectorial para caracterizar el campo se utiliza, además de la divergencia, una operación matemática llamada *rotor*.

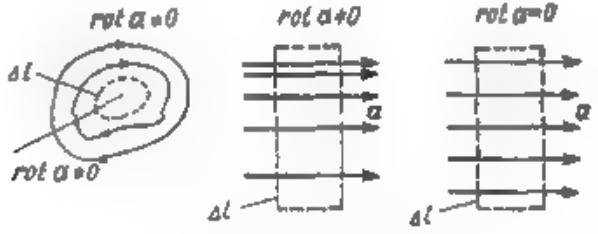

FIG. I.2

El rotor del campo del vector a se designa por rot a y se define por la expresión

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_{\Delta l} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}}{\Delta S} \mathbf{1}_n, \qquad (I.2)$$

donde $\operatorname{rot}_n \mathbf{a}$ es la componente del rotor orientada en la dirección de la normal unitaria $\mathbf{1}_n$ a la superficie ΔS, $\oint_{\Delta l} \mathbf{a}\, d\mathbf{l}$ es la integral a lo largo del pequeño contorno cerrado Δl que acota la superficie pequeña ΔS.

Por medio del paso límite esta superficie se contrae a un punto.

En la fig. I.2 se dan ejemplos de campos, cuando en dos casos el rotor del campo es diferente de cero y en el tercer caso es igual a cero.

§ I.2. Concepto del gradiente de la función escalar

El campo de una función escalar se caracteriza por la operación matemática llamada *gradiente*. El gradiente representa un vector dirigido por la normal a la superficie de igual nivel de la función escalar en dirección del crecimiento de la función e igual numéricamente a la velocidad con que varía la función en esta dirección. En la fig. I.3 se muestran superficies de igual nivel en el campo de la función escalar U, así como el vector unitario normal 1_n orientado en el sentido del crecimiento de la función U. La velocidad de variación de la función por la dirección 1_n se caracteriza mediante la derivada dU/dn, donde dn es el incremento infinitamente pequeño del trayecto por la dirección 1_n. El gradiente de la función U se designa como grad U y se representa en forma de una relación matemática general

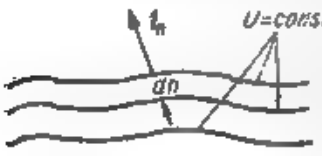

FIG. I.3

$$\text{grad } U = \frac{dU}{dn} 1_n. \qquad \text{(I.3)}$$

De este modo, el gradiente es una operación matemática que se efectúa sobre una función escalar y cuyo resultado es la aparición de una función vectorial.

§ I.3. Sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas

En la solución de problemas electrodinámicos resulta necesario hacer uso de diferentes sistemas de coordenadas. Cuando se deducen las relaciones generales es conveniente escribirlas en una forma matemática que sea válida para cualquier sistema concreto de coordenadas. En este caso, como condición indispensable es el paso, lo suficientemente simple, desde las expresiones generales hacia las expresiones destinadas a ser utilizadas en un sistema concreto de coordenadas. A estos fines es muy útil el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas ξ, η, ζ, cuya representación convencional se da en la fig. I.4.

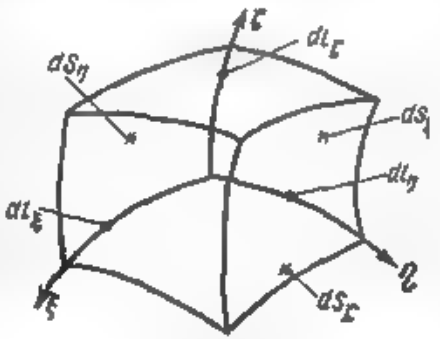

FIG. I.4

Construyamos, basándose en estas coordenadas, un paralelepípedo infinitamente pequeño cuyos lados son dl_ξ, dl_η, dl_ζ. Admitamos la siguiente designación para las áreas de los lados del paralelepípedo: construida sobre los ejes η y ζ, dS_ξ; construida sobre los ejes

ξ y ζ, dS_η; construida sobre los ejes ξ y η, dS_ζ. El volumen infinitamente pequeño del paralelepípedo designémoslo dV.

Se entenderán como distancias dl_ξ, dl_η y dl_ζ los trayectos recorridos por un punto dado en el sistema de coordenadas ξ, η, ζ al variar éstas en $d\xi$, $d\eta$ y $d\zeta$, respectivamente. Demostremos sobre la base de varios sistemas de coordenadas que estos trayectos casi nunca coinciden con el incremento de las coordenadas.

En la fig. 1.5 se representan tres sistemas de coordenadas: el cartesiano, el cilíndrico y el esférico. Pongámonos de acuerdo en

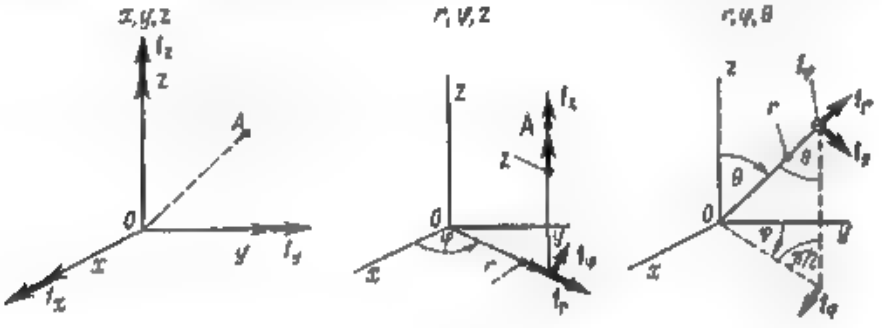

FIG. 1.5

cuanto al orden de representación de los ejes o direcciones de las coordenadas. Si las coordenadas se escriben en la sucesión x, y, z, esto significa el carácter justo de la correlación

$$[1_x 1_y] = 1_z.$$

El producto vectorial del vector unitario orientado a lo largo del eje x y del vector unitario orientado a lo largo del eje y debe dar el vector unitario orientado a lo largo del eje z. En otras palabras, el tornillo dextrógiro desplazado en la dirección más corta desde el eje x hacia el eje y debe atornillarse en dirección del eje z. En virtud de ello el eje z en la fig. 1.5 debe dirigirse hacia arriba y no abajo.

En el caso de coordenadas cilíndricas escritas en la sucesión r, φ, z debe observarse, análogamente, la correlación

$$[1_r 1_\varphi] = 1_z.$$

Cuando se trata de coordenadas esféricas cuya sucesión, al anotarlas, es r, φ, θ es justa la correlación

$$[1_r 1_\varphi] = 1_\theta.$$

A raíz de lo expuesto, el ángulo φ debe tomarse no a partir del eje x, sino a partir del eje y. Si las coordenadas hubieran sido escritas en la sucesión r, θ, φ, habría sido necesario el cumplimiento de la correlación

$$[1_r 1_\theta] = 1_\varphi,$$

y el ángulo φ debería tomarse a partir del eje x. Si en el sistema de coordenadas cartesianas se dan incrementos a las coordenadas dx, dy, dz, el punto A dado en estas coordenadas recorrerá, respectivamente, el trayecto

$$dl_x = 1dx, \quad dl_y = 1dy, \quad dl_z = 1dz. \tag{I.4}$$

El trayecto recorrido por el punto resultará ser igual al incremento de la coordenada correspondiente. Si en el sistema de coordenadas cilíndricas se dan incrementos a las coordenadas dr, $d\varphi$, $d\theta$, el punto A prefijado en estas coordenadas se desplazará a la distancia

$$dl_r = 1dr, \quad dl_\varphi = r\,d\varphi, \quad dl_z = 1dz. \tag{I.5}$$

En este caso el trayecto dl_φ no es igual al incremento de la coordenada curvilínea φ. Existe el coeficiente r que relaciona estos incrementos. Si en el sistema de coordenadas esféricas se dan incrementos a las coordenadas dr, $d\varphi$, $d\theta$ entonces, el punto A prefijado en estas coordenadas se desplazará a una distancia

$$dl_r = 1dr, \quad dl_\varphi = r \operatorname{sen}\theta d\varphi, \quad dl_\theta = r\,d\theta. \tag{I.6}$$

Una vez más, en el caso del incremento de las coordenadas curvilíneas φ y θ, el trayecto recorrido por el punto A no es igual al incremento de estas coordenadas. De este modo, en el caso general de coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas es conveniente introducir coeficientes entre sus incrementos y los trayectos del camino recorridos por el punto prefijado en estas coordenadas para los incrementos indicados. En este caso se pueden escribir las siguientes fórmulas:

$$dl_\xi = h_\xi d\xi, \quad dl_\eta = h_\eta\, d\eta, \quad dl_\zeta = h_\zeta\, d\zeta. \tag{I.7}$$

Los coeficientes h_ξ, h_η y h_ζ se denominan *coeficientes de Lamé*.

En el sistema de coordenadas cartesianas, para la correspondencia de coordenadas se tiene:

$$\xi \to x, \quad \eta \to y, \quad \zeta \to z,$$
$$h_\xi = h_x = 1, \quad h_\eta = h_y = 1, \quad h_\zeta = h_z = 1. \tag{I.8}$$

En el sistema de coordenadas cilíndricas, para la correspondencia de coordenadas se tiene:

$$\xi \to r, \quad \eta \to \varphi, \quad \zeta \to z,$$
$$h_\xi = h_r = 1, \quad h_\eta = h_\varphi = r, \quad h_\zeta = h_z = 1. \tag{I.9}$$

En el sistema de coordenadas esféricas, para la correspondencia de coordenadas se tiene:

$$\xi \to r, \quad \eta \to \varphi, \quad \zeta \to \theta,$$
$$h_\xi = h_r = 1, \quad h_\eta = h_\varphi = r \operatorname{sen}\theta, \quad h_\zeta = h_\theta = r. \tag{I.10}$$

Como se infiere de los ejemplos expuestos, los coeficientes de Lamé pueden ser iguales a la unidad o ser funciones de las coordenadas.

Valiéndonos de las expresiones (I.7), obtenemos las fórmulas para las áreas y el volumen infinitamente pequeños en el sistema de coordenadas curvilíneas:

$$\left.\begin{aligned} dS_\xi &= dl_\eta\, dl_\zeta = h_\eta h_\zeta\, d\eta\, d\zeta, \\ dS_\eta &= dl_\xi\, dl_\zeta = h_\xi h_\zeta\, d\xi\, d\zeta, \\ dS_\zeta &= dl_\xi\, dl_\eta = h_\xi h_\eta\, d\xi\, d\eta, \\ dV &= dl_\xi\, dl_\eta\, dl_\zeta = h_\xi h_\eta h_\zeta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I.11)}$$

Si se conocen los coeficientes de Lamé no es difícil hallar expresiones análogas en cualquier sistema de coordenadas. Por ejemplo, el elemento de volumen en el sistema de coordenadas esféricas se escribe en la forma

$$dV = 1r \operatorname{sen} \theta r\, dr\, d\varphi\, d\theta = r^2 \operatorname{sen} \theta\, dr\, d\varphi\, d\theta.$$

§ I.4. Expresiones para la divergencia, el rotor y el gradiente en el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas

En el caso de un volumen infinitamente pequeño dV en lugar de la expresión para la divergencia (I.1) se puede escribir

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\sum a\, dS}{dV}. \qquad \text{(I.12)}$$

La sumación que ha sustituido la integral se realiza por todos los lados del paralelepípedo curvilíneo. Representemos el vector en forma de la suma de las componentes del vector por las direcciones de las coordenadas:

$$\mathbf{a} = 1_\xi a_\xi + 1_\eta a_\eta + 1_\zeta a_\zeta. \qquad \text{(I.13)}$$

La parte del flujo del vector **a** que fluye a través del elemento de la superficie dS_ξ (véase la fig. I.4) constituye $-dS_\xi a_\xi$. El flujo está formado por la componente del vector a_ξ. La normal a la superficie dS_ξ está dirigida desde el interior del volumen dV hacia fuera, es decir, hacia el lado $-\xi$, en virtud de lo cual el producto escalar es

$$-dS_\xi 1_\xi 1_\xi a_\xi = -dS_\xi a_\xi.$$

Otras componentes del vector **a** están orientadas formando un ángulo recto con la normal -1_ξ y los productos escalares de estas por el elemento del área serán iguales a cero.

Segundamente, examinemos la parte del flujo del vector a que atraviesa la cara anterior del volumen dV. Debido al carácter curvilíneo de las coordenadas, durante el paso desde la cara posterior hacia la anterior la superficie de la cara anterior puede variar en una magnitud infinitamente pequeña en comparación con la cara posterior. Es posible una variación infinitamente pequeña de la componente del vector a_ξ, que crea el flujo del vector **a** a través de la cara anterior. Por eso, la parte del flujo que atraviesa la cara anterior

puede representarse como la suma del viejo valor del flujo que circulaba a través de la cara posterior y de un incremento infinitamente pequeño. Puesto que la normal a la cara anterior está orientada hacia el lado 1_ξ, el flujo que pasa a través de esta cara es positivo. Como resultado, este flujo puede escribirse en la forma

$$dS_\xi a_\xi + \frac{\partial}{\partial \xi}(dS_\xi a_\xi)\, d\xi.$$

El segundo sumando representa una adición infinitamente pequeña al valor viejo del flujo. Como cada diferencial, éste puede obtenerse multiplicando la derivada por la diferencial del argumento.

El flujo total a través de las caras posterior y anterior se escribe en la forma

$$-dS_\xi a_\xi + dS_\xi a_\xi + \frac{\partial}{\partial \xi}(dS_\xi a_\xi)\, d\xi = \frac{\partial}{\partial \xi}(dS_\xi a_\xi)\, d\xi.$$

Por medio de razonamientos análogos hallemos el flujo total del vector a que forma parte del numerador de la expresión (I.12):

$$\sum \mathbf{a}\, d\mathbf{S} = -dS_\xi a_\xi + dS_\xi a_\xi + \frac{\partial}{\partial \xi}(dS_\xi a_\xi)\, d\xi -$$

$$- dS_\eta a_\eta + dS_\eta a_\eta + \frac{\partial}{\partial \eta}(dS_\eta a_\eta)\, d\eta - dS_\zeta a_\zeta + dS_\zeta a_\zeta + \frac{\partial}{\partial \zeta}(dS_\zeta a_\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi}(dS_\xi a_\xi)\, d\xi + \frac{\partial}{\partial \eta}(dS_\eta a_\eta)\, d\eta + \frac{\partial}{\partial \zeta}(dS_\zeta a_\zeta)\, d\zeta.$$

Sustituyamos en esta expresión los valores de las áreas elementales de las fórmulas (I.11):

$$\sum \mathbf{a}\, d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial \xi}(h_\eta h_\zeta\, d\eta\, d\zeta a_\xi)\, d\xi + \frac{\partial}{\partial \eta}(h_\xi h_\zeta\, d\xi\, d\zeta a_\eta)\, d\eta +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \zeta}(h_\xi h_\eta\, d\xi\, d\eta a_\zeta)\, d\zeta.$$

Los incrementos infinitamente pequeños de las coordenadas $d\xi$, $d\eta$ y $d\zeta$ son magnitudes independientes que se pueden sacar fuera del signo de la derivada. Como resultado se obtiene la fórmula

$$\sum \mathbf{a}\, d\mathbf{S} = d\xi\, d\eta\, d\zeta \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}(h_\eta h_\zeta a_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(h_\xi h_\zeta a_\eta) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(h_\xi h_\eta a_\zeta) \right\}.$$

Al sustituirla en la correlación (I.12) y aprovechar la expresión para el volumen elemental (I.11) obtenemos la fórmula definitiva para la divergencia del vector a en el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}(h_\eta h_\zeta a_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(h_\xi h_\zeta a_\eta) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(h_\xi h_\eta a_\zeta) \right\}. \quad \text{(I.14)}$$

A continuación examinemos el rotor del vector **a** en el sistema de coordenadas curvilíneas. Como expresión inicial se utiliza la expresión (I.2).

Analicemos tres superficies infinitamente pequeñas dS_ξ, dS_η y dS_ζ (fig I.6). Supongamos que las normales a estas superficies son los vectores unitarios $\mathbf{1}_\xi$, $\mathbf{1}_\eta$ y $\mathbf{1}_\zeta$.

Al elegir la dirección del recorrido de la superficie nos guiaremos por la regla del tornillo dextrógiro que se atornilla en dirección de la normal a la superficie. El movimiento del tornillo indica la dirección del recorrido. En el caso de superficies infinitamente pequeñas y de contornos de recorrido infinitamente pequeños, respectivamente, la expresión (I.2) se escribe en la forma

$$\mathrm{rot}_n \mathbf{a} = \frac{\sum \mathbf{a}\, d\mathbf{l}}{dS}\, \mathbf{1}_n. \qquad \text{(I.15)}$$

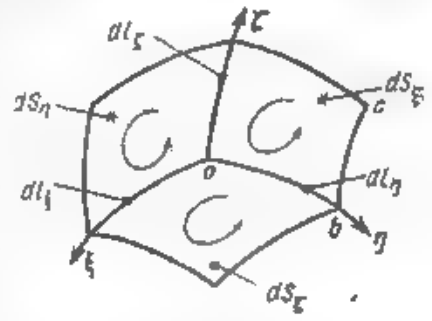

FIG. I.6

Determinemos la suma en el numerador de la expresión (I.15) en el caso del recorrido de la superficie dS_ξ. Representemos el vector **a** en forma de la expresión (I.13). Al comenzar el recorrido de la superficie a partir del origen de las coordenadas en el sentido del eje η, escribamos la parte de la suma en el trayecto *ob*:

$$\mathbf{1}_\eta a_\eta\, dl_\eta\, \mathbf{1}_\eta = a_\eta\, dl_\eta.$$

Seguidamente, escribamos la parte de la suma en el trayecto *cd*. El movimiento se realiza hacia el lado de los valores negativos del eje η. Al pasar del tramo *ob* al tramo *cd*, en virtud del carácter curvilíneo de las coordenadas, puede variar en una magnitud infinitamente pequeña la longitud del tramo dl_η. Además, es posible una variación infinitamente pequeña de la componente del vector a_η. A raíz de ello la parte de la suma en el trayecto *cd* puede representarse como el valor viejo $a_\eta\, dl_\eta$ y una adición infinitamente pequeña la cual, de acuerdo con la regla de cálculo de la diferencial, es el producto de la derivada por la diferencial del argumento. Como resultado, la parte de la suma en el trayecto *cd* es

$$-\left\{a_\eta\, dl_\eta + \frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\eta\, dl_\eta)\, d\zeta\right\}.$$

En su conjunto, la suma $\sum \mathbf{a}\, d\mathbf{l}$ en los trayectos *ob* y *cd* se escribe en forma de la relación

$$a_\eta\, dl_\eta - a_\eta\, dl_\eta - \frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\eta\, dl_\eta)\, d\zeta = -\frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\eta\, dl_\eta)\, d\zeta.$$

Análogamente, la parte de la suma en los trayectos *do* y *bc* es

$$-a_\xi\, dl_\xi + a_\xi\, dl_\xi + \frac{\partial}{\partial \eta}(a_\xi\, dl_\xi)\, d\eta = \frac{\partial}{\partial \eta}(a_\xi\, dl_\xi)\, d\eta.$$

En total, la suma $\sum \mathbf{a}\, d\mathbf{l}$ en el trayecto cerrado del recorrido *obcdo* se expresa por la fórmula

$$\sum \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial \eta}(a_\xi\, dl_\xi)\, d\eta - \frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\eta\, dl_\eta)\, d\zeta.$$

Al sustituir los valores de dl_ξ y dl_η a partir de las fórmulas (I.7) y sacar los incrementos independientes $d\xi$ y $d\eta$ fuera del signo de la derivada, obtenemos

$$\sum \mathbf{a}\, d\mathbf{l} = \left\{\frac{\partial}{\partial \eta}(a_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\eta h_\eta)\right\} d\eta\, d\zeta.$$

Esta expresión se sustituye en el numerador de la fórmula (I.15). En el denominador debe ponerse el valor del área dS_ξ acotada por el contorno de recorrido. Como normal unitaria $\mathbf{1}_n$ se utiliza el vector $\mathbf{1}_\xi$. Como resultado, se obtiene la expresión para la componente del rotor del vector a orientada a lo largo de la coordenada ξ:

$$\mathrm{rot}_\xi \mathbf{a} = \frac{\left\{\frac{\partial}{\partial \eta}(a_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\eta h_\eta)\right\} d\eta\, d\zeta}{h_\eta h_\zeta\, d\eta\, d\zeta}\, \mathbf{1}_\xi.$$

o, definitivamente, después de simplificar

$$\mathrm{rot}_\xi \mathbf{a} = \mathbf{1}_\xi \frac{1}{h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial \eta}(a_\eta h_\eta) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\eta h_\eta)\right\}. \qquad \text{(I.16)}$$

De manera análoga se hallan las componentes del rotor del vector a orientadas a lo largo de las coordenadas η y ζ.

$$\mathrm{rot}_\eta \mathbf{a} = \mathbf{1}_\eta \frac{1}{h_\xi h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi}(a_\zeta h_\zeta)\right\}, \qquad \text{(I.17)}$$

$$\mathrm{rot}_\zeta \mathbf{a} = \mathbf{1}_\zeta \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}(a_\eta h_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta}(a_\xi h_\xi)\right\}. \qquad \text{(I.18)}$$

La expresión total para el rotor del vector a tiene la forma

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\, \mathbf{a} = {} & \mathbf{1}_\xi \frac{1}{h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial \eta}(a_\zeta h_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\eta h_\eta)\right\} + \\ & + \mathbf{1}_\eta \frac{1}{h_\xi h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial \zeta}(a_\xi h_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi}(a_\zeta h_\zeta)\right\} + \\ & + \mathbf{1}_\zeta \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}(a_\eta h_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta}(a_\xi h_\xi)\right\}, \qquad \text{(I.19)}\end{aligned}$$

y la expresión para el gradiente de la función escalar en el sistema de coordenadas curvilíneas es

$$\mathrm{grad}\, U = \frac{dU}{dn}\mathbf{1}_n.$$

La toma de la derivada por la normal a la superficie de igual nivel de la función U significa, en esencia, el siguiente procedimiento. El punto de observación se traslada a un segmento infinitamente pequeño dn a lo largo de la dirección de la normal, se fija el incremento de la función dU, se toma la relación entre los incrementos dU

y dn y se le atribuye la dirección de la normal, multiplicándola relación por el vector normal unitario $\mathbf{1}_n$. Esta operación puede desarrollarse en coordenadas curvilíneas. Al trasladarse el punto de observación a la distancia dn, las proyecciones del punto sobre los ejes ξ, η y ζ se trasladan, respectivamente, a unas distancias infinitamente pequeñas dl_ξ, dl_η y dl_ζ. El vector $(dU/dn)\,\mathbf{1}_n$ en este caso se escribe como la suma de componentes por las direcciones de las coordenadas

$$\operatorname{grad} U = \frac{dU}{dn}\,\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_\xi \frac{\partial U}{\partial l_\xi} + \mathbf{1}_\eta \frac{\partial U}{\partial l_\eta} + \mathbf{1}_\zeta \frac{\partial U}{\partial l_\zeta}. \qquad (I.20)$$

Los incrementos ∂l_ξ, ∂l_η y ∂l_ζ pueden obtenerse de las fórmulas (I.7):

$$\partial l_\xi = h_\xi\,\partial\xi, \quad \partial l_\eta = h_\eta\,\partial\eta, \quad \partial l_\zeta = h_\zeta\,\partial\zeta.$$

Al sustituir estas expresiones en la fórmula (I.20), obtenemos la relación definitiva para el gradiente de la función escalar U en el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas:

$$\operatorname{grad} U = \mathbf{1}_\xi \frac{1}{h_\xi}\cdot\frac{\partial U}{\partial \xi} + \mathbf{1}_\eta \frac{1}{h_\eta}\cdot\frac{\partial U}{\partial \eta} + \mathbf{1}_\zeta \frac{1}{h_\zeta}\cdot\frac{\partial U}{\partial \zeta}. \qquad (I.21)$$

§ 1.5. Expresiones para la divergencia, el rotor y el gradiente en los sistemas concretos de coordenadas

Expongamos las expresiones para la divergencia, el rotor y el gradiente en los sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas, teniendo en cuenta las fórmulas (I.14), (I.19) y (I.20) para la correspondencia entre las coordenadas y los coeficientes de Lamé, dados en las fórmulas (I.8), (I.9) y (I.10):

1. Sistema de coordenadas cartesianas

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \qquad (I.22)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{1}_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \mathbf{1}_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \mathbf{1}_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right), \qquad (I.23)$$

$$\operatorname{grad} U = \mathbf{1}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (I.24)$$

2. Sistema de coordenadas cilíndricas

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r a_r) - \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z}(r a_z)\right\}, \qquad (I.25)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{1}_r \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(a_\varphi r)\right\} +$$

$$+ \mathbf{1}_\varphi\left\{\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right\} + \mathbf{1}_z \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(a_\varphi r) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right\}, \qquad (I.26)$$

$$\operatorname{grad} U = \mathbf{1}_r \frac{\partial U}{\partial r} + \mathbf{1}_\varphi \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \mathbf{1}_z \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (I.27)$$

3. Sistema de coordenadas esféricas

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \operatorname{sen} \theta a_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r a_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \operatorname{sen} \theta a_\theta) \right\}, \quad (I.28)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{1}_r \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} (r a_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (r \operatorname{sen} \theta a_\varphi) \right\} +$$

$$+ \mathbf{1}_\varphi \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) \right\} + \mathbf{1}_\theta \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \operatorname{sen} \theta a_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right\}, \quad (I.29)$$

$$\operatorname{grad} U = \mathbf{1}_r \frac{\partial U}{\partial r} + \mathbf{1}_\varphi \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \mathbf{1}_\theta \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta}. \quad (I.30)$$

§ I.6. Algunas identidades vectoriales

Valiéndose de las expresiones deducidas para la divergencia, el rotor y el gradiente se puede demostrar las siguientes identidades vectoriales válidas para todos los sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0, \quad (I.31)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0, \quad (I.32)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \nabla^2 U, \quad (I.33)$$

donde ∇^2 es el operador de Laplace;

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a}. \quad (I.34)$$

De la expresión (I.34) se puede determinar el resultado de la acción del operador de Laplace sobre el vector **a**:

$$\nabla^2 \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a}, \quad (I.35)$$

$$\operatorname{div} [\mathbf{ab}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}, \quad (I.36)$$

$$\operatorname{div} (\Psi \operatorname{grad} U) = \operatorname{grad} \Psi \operatorname{grad} U + \Psi \nabla^2 U. \quad (I.37)$$

Aquí Ψ y U son funciones escalares:

$$\operatorname{rot} (\Psi \mathbf{a}) = [\operatorname{grad} \Psi \mathbf{a}] + \Psi \operatorname{rot} \mathbf{a}. \quad (I.38)$$

§ I.7. Expresiones para $\nabla^2 U$ y $\nabla^2 \mathbf{a}$ en el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas

Expongamos la notación de las expresiones para $\nabla^2 U$ y $\nabla^2 \mathbf{a}$ en el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta h_\zeta}{h_\xi} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi h_\zeta}{h_\eta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{h_\xi h_\eta}{h_\zeta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) \right\}, \quad (I.39)$$

$$\nabla^2 \mathbf{a} = \mathbf{1}_\xi \left\langle \frac{1}{h_\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\xi h_\eta h_\zeta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\eta h_\xi h_\zeta) + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \zeta} (a_\zeta h_\xi h_\eta) \right\} \right\rangle - \frac{1}{h_\eta h_\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left\langle \frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (a_\eta h_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (a_\xi h_\xi) \right\} \right\rangle -$$

$$-\frac{1}{h_\eta h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\langle\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}(a_\xi h_\xi)-\frac{\partial}{\partial\xi}(a_\zeta h_\zeta)\right\}\right\rangle+$$

$$+1_\eta\left\langle\frac{1}{h_\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\left\langle\frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(a_\xi h_\eta h_\zeta)+\frac{\partial}{\partial\eta}(a_\eta h_\xi h_\zeta)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\partial}{\partial\zeta}(a_\zeta h_\xi h_\eta)\right\}\right\rangle-\frac{1}{h_\xi h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\langle\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}(a_\zeta h_\zeta)-\frac{\partial}{\partial\zeta}(a_\eta h_\eta)\right\}\right\rangle-$$

$$-\frac{1}{h_\xi h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left\langle\frac{h_\zeta}{h_\xi h_\eta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(a_\eta h_\eta)-\frac{\partial}{\partial\eta}(a_\xi h_\xi)\right\}\right\rangle\Big\rangle+$$

$$+1_\zeta\left\langle\frac{1}{h_\zeta}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\langle\frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(a_\xi h_\eta h_\zeta)+\frac{\partial}{\partial\eta}(a_\eta h_\xi h_\zeta)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\partial}{\partial\zeta}(a_\zeta h_\xi h_\eta)\right\}\right\rangle-\frac{1}{h_\xi h_\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left\langle\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(a_\zeta h_\xi)-\frac{\partial}{\partial\zeta}(a_\xi h_\zeta)\right\}\right\rangle-$$

$$-\frac{1}{h_\zeta h_\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\left\langle\frac{h_\xi}{h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}(a_\zeta h_\zeta)-\frac{\partial}{\partial\zeta}(a_\eta h_\eta)\right\}\right\rangle\Big\rangle. \qquad \text{(I.40)}$$

APÉNDICE II

Cálculo de los coeficientes de atenuación del campo h' en guías de ondas rectangulares

§ II.1. Cálculo de los coeficientes de atenuación del campo h' en guías de ondas rectangulares en el caso de ondas del tipo magnético

La base del cálculo es la expresión (20.6):

$$h'=\frac{\sqrt{\frac{\mu_{a_2}\omega}{2\gamma_{el_2}}}\left(\int\limits_{\xi}|\dot{H}_{0\tau}|^2\,h_\xi\,d\xi+\int\limits_{\eta}|\dot{H}_{0\tau}|^2\,h_\eta\,d\eta\right)}{2\int\limits_{S_g}\mathrm{Re}\,[\dot{E}_0\dot{H}_0^*]\,dS}. \qquad \text{(II.1)}$$

Al introducir, para simplificar, la designación $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_{a_2}\omega}{2\gamma_{el_2}}}=\alpha_{t_2}$ se obtiene

$$h'=\alpha_t\frac{\int\limits_{\xi}|\dot{H}_{0\tau}|^2\,h_\xi\,d\xi+\int\limits_{\eta}|\dot{H}_{0\tau}|^2\,h_\eta\,d\eta}{\int\limits_{S_g}\mathrm{Re}\,[\dot{E}_0\dot{H}_0^*]\,dS}. \qquad \text{(II.2)}$$

Las ondas del tipo magnético poseen componentes del campo que se definen por las fórmulas (13.52)—(13.57).

En primer lugar hallemos las integrales del numerador de la expresión (II.2).

El cuadrado de intensidad del campo magnético junto a la pared inferior, para $y = 0$, y junto a la pared superior, para $y = b$, será el mismo. En virtud de ello se puede determinar inmediatamente la integral total junto a las paredes inferior y superior de la guía de ondas:

$$2\int_0^a |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2\,dx = 2\int_0^a \{|\dot{H}_x|^2 + |\dot{H}_z|^2\}\,dx =$$

$$= 2\int_0^a \left\{\frac{h^2}{g_{mn}^4} C_z^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) + C_z^2 \cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\right\} dx =$$

$$= 2\,\frac{a}{2}\left\{\frac{h^2}{g_{mn}^4}\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 + 1\right\} C_z^2 = a\left\{\frac{h}{g_{mn}^4}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + 1\right\} C_z^2. \quad \text{(II.3)}$$

Análogamente se determina la integral total junto a las paredes derecha e izquierda de la guía de ondas:

$$2\int_0^b |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2\,dy = 2\int_0^b \{|\dot{H}_y|^2 + |\dot{H}_z|^2\}\,dy =$$

$$= 2\int_0^b \left\{\frac{h}{g_{mn}^4} C_z^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + C_z^2 \cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right\} dy =$$

$$= b\left\{\frac{h^2}{g_{mn}^4}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + 1\right\} C_z^2. \quad \text{(II.4)}$$

La integral en el denominador de la expresión (II.2) representa la proyección duplicada del vector de Poynting sobre el eje z de la guía de ondas. Esta proyección la forman las componentes del campo $\dot{E}_x$ y $\dot{H}_y$, $\dot{E}_y$ y $\dot{H}_x$. Por consiguiente,

$$\int_{S_g} \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*]\,d\mathbf{S} = \int_0^a \int_0^b (\dot{E}_x \dot{H}_y^* - \dot{E}_y \dot{H}_x^*)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^a \int_0^b \left\{\frac{\omega\mu_a h}{g_{mn}^4} C_z^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega\mu_a h}{g_{mn}^4} C_z^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right\} dy\,dx =$$

$$= \frac{\omega\mu_a h}{g_{mn}^4} C_z^2 \frac{ab}{4}\left\{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right\}. \quad \text{(II.5)}$$

Teniendo en cuenta que, de acuerdo con la fórmula (13.22)

$$g_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2,$$

la expresión (II.5) puede volverse a escribir en otra forma:

$$\int_{S_g} \mathrm{Re}\,[\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*]\, dS = \frac{\omega\mu_a h}{g_{mn}^2} C_2^2 \frac{ab}{4} \qquad \text{(II.6)}$$

Haciendo uso de las fórmulas (II.2), (II.3), (II.4) y (II.6) escribamos la siguiente correlación para h'.

$$h' = \alpha_1 \frac{a\left\{\frac{h^2}{g_{mn}^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + 1\right\} C_2^2 + b\left\{\frac{h^2}{g_{mn}^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + 1\right\} C_2^2}{\frac{\omega\mu_a h}{g_{mn}^2} C_2^2 \frac{ab}{4}} =$$

$$= \alpha_1 \frac{a\left\{\frac{h^2}{g_{mn}^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + 1\right\} + b\left\{\frac{h^2}{g_{mn}^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + 1\right\}}{\frac{\omega\mu_a h}{g_{mn}^2} \frac{ab}{4}}.$$

Multipliquemos el numerador y el denominador de la expresión obtenida por g_{mn}^2 y calculemos el valor de h empleando la fórmula (13.35):

$$h = \sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a - g_{mn}^2}.$$

Entonces

$$h' = \alpha_1 \frac{a\left\{\frac{\omega^2\mu_a\varepsilon_a - g_{mn}^2}{g_{mn}^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + g_{mn}^2\right\} + b\left\{\frac{\omega^2\mu_a\varepsilon_a - g_{mn}^2}{g_{mn}^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + g_{mn}^2\right\}}{\omega\mu_a\sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a - g_{mn}^2}\,\frac{ab}{4}} =$$

$$= \alpha_1\omega^2\mu_a\varepsilon_a \left(\frac{\left\{1 - \frac{g_{mn}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}\right\}\frac{1}{g_{mn}^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \frac{g_{mn}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}}{\omega^2\mu_a\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\sqrt{1 - \frac{g_{mn}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}}\,\frac{b}{4}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{b}{a}\left\{1 - \frac{g_{mn}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}\right\}\frac{1}{g_{mn}^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \frac{g_{mn}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}}{\omega^2\mu_a\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\sqrt{1 - \frac{g_{mn}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}}\,\frac{b}{4}} \right).$$

Luego, apliquemos la relación (13.59)

$$\frac{g^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2$$

y realicemos las simplificaciones necesarias:

$$h' = \alpha_1 \left\langle \frac{\left\{\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}{g_{mn}^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2\right\}}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}\,\frac{b}{4}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{b}{a}\left\{\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)}{g_{mn}^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2\right\}}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}\,\frac{b}{4}} \right\rangle.$$

Al agrupar los miembros, obtenemos

$$h' = \alpha_1 \frac{\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2 + \left\{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2\right\}\frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \frac{b}{a}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{g_{mn}^2}}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}\,\frac{b}{4}}.$$

Analicemos por separado el quebrado

$$\frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \frac{b}{a}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{g_{mn}^2} = \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \frac{b}{a}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

Simplificando por π y multiplicando por b^2, obtenemos

$$\frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \frac{b}{a}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \frac{\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}m^2 + n^2\right)}{\frac{b^2m^2}{a^2} + n^2}.$$

Sustituyamos la igualdad obtenida en la expresión para h':

$$h' = \alpha_1 \frac{\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2 + \left\{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2\right\}\frac{\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}m^2 + n^2\right)}{\frac{b^2m^2}{a^2} + n^2}}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}\,\frac{b}{4}}. \qquad \text{(II.7)}$$

Para simplificar la notación utilicemos las designaciones:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2 = \alpha_2, \quad 1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2 = 1-\alpha_2 = \alpha_3, \quad \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = Z_{med}, \qquad \text{(II.8)}$$

donde Z_{med} es la resistencia característica del medio.

En este caso el coeficiente de atenuación del campo de las ondas del tipo magnético se escribe en la forma

$$h' = h'_{H_{mn}} = 4\alpha_1 \frac{\left(1+\frac{b}{a}\right)\alpha_2 + \alpha_3 \frac{\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}m^2+n^2\right)}{\frac{b^2m^2}{a^2}+n^2}}{Z_{med}\sqrt{\alpha_3 b}} \qquad \text{(II.9)}$$

Determinemos los coeficientes de atenuación h' del campo en el caso de ondas del tipo magnético cuyos índices son cero. Supongamos que $m = 0$ y se investiga la atenuación del campo de la onda del tipo H_{0n} que posee las componentes

$$\left.\begin{aligned} \dot{H}_y &= j\frac{h}{g^2_{0n}} C_2 \frac{n\pi}{b} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_z &= C_2 \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_x &= j\frac{\omega\mu_a}{g^2_{0n}} C_2 \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jhz}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.10)}$$

Hallemos las integrales en el numerador de la expresión (II.2):

$$2\int_0^a |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2\, dx = 2\int_0^a |\dot{H}_z|^2\, dx = 2\int_0^a C_2^2\, dx = 2aC_2^2. \qquad \text{(II.11)}$$

Determinemos la integral total junto a las paredes derecha e izquierda de la guía de ondas:

$$2\int_0^b |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2\, dy = 2\int_0^b \{|\dot{H}_y|^2 + |\dot{H}_z|^2\}\, dy =$$

$$= 2\int_0^b \left\{\frac{h^2}{g^2_{0n}} C_2^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) + C_2^2 \cos^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right)\right\} dy =$$

$$= 2\frac{b}{a}\left\{\frac{h^2}{g^2_{0n}} C_2^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + C_2^2\right\} = b\left\{\frac{h^2}{g^2_{0n}}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + 1\right\} C_2^2, \qquad \text{(II.12)}$$

así como la integral en el denominador de la expresión (II.2):

$$\int_{S_B} \operatorname{Re}\,[\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*]\, d\mathbf{S} = \int_0^a \int_0^b \dot{E}_x \dot{H}_y^*\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^a \int_0^b \frac{\omega\mu_a h}{g^2_{0n}} C_2^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dy\, dx =$$

$$= \frac{ab}{2} \cdot \frac{\omega\mu_a h}{g^2_{0n}} C_2^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \qquad \text{(II.13)}$$

Al sustituir las expresiones (II.11), (II.12), (II.13) en la fórmula (II.2), obtenemos

$$h' = \alpha_1 \frac{2aC_1^2 + b\left\{\frac{h^2}{g_{0n}^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + 1\right\} C_1^2}{\frac{ab}{2}\frac{\omega\mu_a h}{g_{0n}^2} C_1^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \qquad \text{(II.14)}$$

De la expresión (13.22) se infiere que

$$g_{0n}^2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \qquad \text{(II.15)}$$

Al sustituir g_{0n}^2 en la fórmula (II.14) y efectuar las simplificaciones necesarias, hallamos

$$h' = \alpha_1 \frac{2a + b\left(\frac{h^2}{g_{0n}^2} + 1\right)}{\frac{ab}{2}\frac{\omega\mu_a h}{g_{0n}^2}} = 2\alpha_1 \frac{2\frac{a}{b} g_{0n}^2 + h^2 + g_{0n}^2}{a\omega\mu_a h},$$

o bien, teniendo en cuenta la relación (13.35)

$$h' = 2\alpha_1 \frac{2\frac{a}{b} g_{0n}^2 + \omega^2\mu_a\varepsilon_a}{a\omega\mu_a \sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a - g_{0n}^2}} =$$

$$= 2\alpha_1\omega^2\mu_a\varepsilon_a \frac{2\frac{a}{b}\frac{g_{0n}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a} + 1}{a\omega^2\mu_a \sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\sqrt{1 - \frac{g_{0n}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}}}.$$

Empleando la relación (13.59) esta fórmula se puede escribir de la manera siguiente:

$$h_1 = 2\alpha_1 \frac{1 + 2\frac{a}{b}\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}{a\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}}.$$

Al introducir las designaciones (II.8), se obtiene

$$h' = h'_{H_{0n}} = 2\alpha_1 \frac{1 + 2\frac{a}{b}\alpha_2}{a\tilde{z}_{med}\sqrt{\alpha_2}}. \qquad \text{(II.16)}$$

Sea $n = 0$. Investiguemos la atenuación del campo de las ondas del tipo H_{m0} con las componentes que a base de las fórmulas (13.52) (13.57) se escriben en la forma de las relaciones

$$\left.\begin{aligned} \dot{H}_x &= j\frac{h}{g_{m0}^2} C_2 \frac{m\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_z &= C_2 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{-jhz}. \\ \dot{E}_y &= -j\frac{\omega\mu_a}{g_{m0}^2} C_2 \frac{m\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) e^{-jhz}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.17)}$$

Determinemos las integrales:

$$2\int_{\Gamma}^{a}|\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2\,dx=2\int_{0}^{a}\{|\dot{H}_x|^2+|\dot{H}_z|^2\}\,dx=$$

$$=2\int_{0}^{a}\left\{\frac{h^2}{g_{m0}^2}C_2^2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)+C_2\cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\right\}dx=$$

$$=a\left\{\frac{h^2}{g_{m0}^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+1\right\}C_2^2, \qquad \text{(II.18)}$$

$$2\int_{0}^{b}|\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2\,dy=2\int_{0}^{b}|\dot{H}_z|^2\,dy=2\int_{0}^{b}C_2^2\,dy=2bC_2^2,$$

$$\int_{S_b}\operatorname{Re}\left[\dot{\mathbf{E}}_0\,\dot{\mathbf{H}}_0^*\right]dS=-\int_{0}^{a}\int_{0}^{b}\dot{E}_y\dot{H}_x^*\,dy\,dx=$$

$$=\int_{0}^{a}\int_{0}^{b}\frac{\omega\mu_a h}{g_{m0}^2}C_2^2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)dy\,dx=\frac{ab}{2}\frac{\omega\mu_a h}{g_{m0}^2}C_2^2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2. \qquad \text{(II.19)}$$

Sustituyamos las expresiones obtenidas en la fórmula (II.2):

$$h'=h'_{Hm_0}=\alpha_1\frac{2bC_2^2+a\left\{\frac{h^2}{g_{m0}^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+1\right\}C_2^2}{\frac{ab}{2}\frac{\omega\mu_a h}{g_{m0}^2}C_2^2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}.$$

Seguidamente, llevando a cabo las transformaciones análogas a las realizadas anteriormente mediante las relaciones (13.22), (13.35) y (13.39), hallamos

$$h'_{Hm_0}=2\alpha_1\frac{2\frac{b}{a}+\left(\frac{h^2}{g_{m0}^2}+1\right)}{b\frac{\omega\mu_a h}{g_{m0}^2}}=2\alpha_1\frac{2\frac{b}{a}g_{m0}^2+(h^2+g_{m0}^2)}{b\omega\mu_a\sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a-g_{m0}^2}}=$$

$$=2\alpha_1\frac{2\frac{b}{a}g_{m0}^2+\omega^2\mu_a\varepsilon_a}{b\omega^2\mu_a\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\sqrt{1-\frac{g_{m0}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}}}=$$

$$=2\alpha_1\frac{\omega^2\mu_a\varepsilon_a\left(1+2\frac{b}{a}\cdot\frac{g_{m0}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}\right)}{b\omega^2\mu_a\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\sqrt{1-\frac{g_{m0}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}}}=$$

$$=2\alpha_1\frac{1+2\frac{b}{a}\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}{b\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}},$$

o bien, teniendo en cuenta la designación (II.8),

$$h'_{Hm_1} = 2\alpha_1 \frac{1+2\frac{b}{a}\alpha_2}{bZ_{med}\sqrt{\alpha_2}}. \qquad \text{(II.20)}$$

§ II.2. Cálculo de los coeficientes de atenuación del campo h' en guías de ondas rectangulares en el caso de ondas del tipo eléctrico

Las ondas del tipo eléctrico poseen componentes del campo que se definen por medio de las fórmulas (13.29)—(13.34).

Hallemos las integrales en el numerador de la expresión (II.2). La integral junto a las paredes superior e inferior de la guía de ondas es:

$$2\int_0^a |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2\,dx = 2\int_0^a |\dot{H}_x|^2 dx =$$

$$= 2\int_0^a \frac{(\omega\varepsilon_a)^2}{g^4_{mn}} C_1^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = \frac{(\omega\varepsilon_a)^2}{g^4_{mn}} C_1^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 a. \qquad \text{(II.21)}$$

La integral junto a las paredes derecha e izquierda de la guía de ondas es:

$$2\int_0^b |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2\,dy = 2\int_0^b |\dot{H}_y|^2 dy = 2\int_0^b \frac{(\omega\varepsilon_a)^2}{g^4_{mn}} C_1^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy =$$

$$= \frac{(\omega\varepsilon_a)^2}{g^4_{mn}} C_1^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 b. \qquad \text{(II.22)}$$

La integral en el denominador de la expresión (II.2) se calcula de la siguiente forma:

$$\int_{S_\Sigma} \operatorname{Re}\,[\dot{\mathbf{E}}_0\dot{\mathbf{H}}_0^*]\,dS = \int_0^a\int_0^b (\dot{E}_x\dot{H}_y^* - \dot{E}_y\dot{H}_x^*)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^a\int_0^b \left\{\frac{\omega\varepsilon_a h}{g^4_{mn}} C_1^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega\varepsilon_a h}{g^4_{mn}} C_1^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right\} dy\,dx =$$

$$= \frac{\omega\varepsilon_a h}{g^4_{mn}} C_1^2 \frac{ab}{4}\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\} = \frac{\omega\varepsilon_a h}{g^2_{mn}} C_1^2 \frac{ab}{4}. \qquad \text{(II.23)}$$

Al utilizar las fórmulas (II.2), (II.21), (II.22) y (II.23), se puede escribir la siguiente expresión para h':

$$h' = \alpha_1 \frac{\frac{(\omega\varepsilon_a)^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 a + \frac{(\omega\varepsilon_a)^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 b}{\frac{\omega\varepsilon_a h}{g_{mn}^2} C_1^2 \frac{ab}{4}} =$$

$$= 4\alpha_1 \frac{\frac{\omega\varepsilon_a}{g_{mn}^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 a + \frac{\omega\varepsilon_a}{g_{mn}^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 b}{hab}.$$

Calculemos los valores de g_{mn}^2 y h empleando las fórmulas (13.22) y (13.35):

$$h' = 4\alpha_1 \frac{\omega\varepsilon_a \left\{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 a + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 b\right\}}{\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\} \sqrt{\omega^2\mu_a\varepsilon_a - g_{mn}^2} ab} =$$

$$= 4\alpha_1 \frac{\omega\varepsilon_a \left\{\left(\frac{n}{b}\right)^2 a + \left(\frac{m}{a}\right)^2 b\right\}}{\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right\} \omega \sqrt{\mu_a\varepsilon_a} \sqrt{1 - \frac{g_{mn}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}} ab} =$$

$$= \frac{4\alpha_1}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \frac{g_{mn}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}} ab} \cdot \frac{\frac{a}{b^2}\left\{m^2\left(\frac{b}{a}\right)^3 + n^2\right\}}{\frac{1}{b^2}\left\{m^2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + n^2\right\}} =$$

$$= \frac{4\alpha_1}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \frac{g_{mn}^2}{\omega^2\mu_a\varepsilon_a}} b} \cdot \frac{m^2\left(\frac{b}{a}\right)^3 + n^3}{m^2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + n^2}.$$

Luego, utilizando la fórmula (13.39) y las designaciones (II.8), hallamos

$$h' = h'_{Emn} = \frac{4\alpha_1}{Z_{med} \sqrt{\alpha_3 b}} \cdot \frac{m^2\left(\frac{b}{a}\right)^3 + n^2}{m^2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + n^2}. \qquad \text{(II.24)}$$

§ II.3. Cálculo de los coeficientes de atenuación del campo h' en guías de ondas circulares en el caso de ondas del tipo magnético

Las ondas del tipo magnético en la guía de ondas circular poseen componentes del campo definidas por medio de las fórmulas (14.51)—(14.56).

Hallemos las integrales en el numerador de la expresión (II.2).

$$\int_0^{2\pi} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|\, r\, d\varphi = \int_0^{2\pi} (|\dot{\mathbf{H}}_{0\varphi}|^2 + |\dot{H}_{0z}|^2)\, r\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{h^2 r_0^2}{\mu_{mn}^4} C_2^2 m^2 J_m^2(\mu_{mn}) \operatorname{sen}^2(m\varphi) + C_2^2 J_m'^2(\mu_{mn}) \cos^2(m\varphi) \right\} r_0\, d\varphi =$$

$$= C_2^2 J_m'^2(\mu_{mn})\, \pi \left(\frac{h^2 r_0^2}{\mu_{mn}^4} m^2 + r_0 \right). \qquad \text{(II 25)}$$

La integral por el área de la sección transversal de la guía de ondas es

$$\int_{S_g} \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*]\, dS = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} (\dot{E}_r \dot{H}_\varphi^* - \dot{E}_\varphi \dot{H}_r^*)\, r\, d\varphi\, dr =$$

$$= \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\omega \mu_a h r_0^2}{r^2 \mu_{mn}^2} C_2^2 m^2 J_m^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \operatorname{sen}^2(m\varphi) + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega \mu_a h r_0^2}{\mu_{mn}^2} C_2^2 J_m'^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \cos^2(m\varphi) \right\} r\, d\varphi\, dr =$$

$$= \int_0^{r_0} \left\{ \frac{\omega \mu_a h r_0^2}{r^2 \mu_{mn}^2} C_2^2 m^2 J_m^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \pi + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega \mu_a h r_0^2}{\mu_{mn}^2} C_2^2 J_m'^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \pi \right\} r\, dr =$$

$$= \frac{\omega \mu_a h r_0^2}{\mu_{mn}^2} C_2^2 \pi \int_0^{r_0} \left\{ \frac{r_0^2}{\mu_{mn}^2 r^2} m^2 J_m^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) + \right.$$

$$\left. + J_m'^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \right\} r\, dr = \frac{\omega \mu_a h r_0^2}{\mu_{mn}^2} C_2^2 \pi u, \qquad \text{(II.26)}$$

donde

$$u = \int_0^r \left\{ \frac{r_0^2 m^2}{\mu_{mn}^2 r^2} J_m^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) + J_m'^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \right\} r\, dr. \qquad \text{(II.27)}$$

Realicemos la sustitución de las variables, poniendo

$$r = r_0 x. \qquad \text{(II.28)}$$

Entonces

$$u = r_0^2 \int_0^1 \left\{ \frac{m^2}{\mu_{mn}^2 x^2} J_m^2(\mu_{mn} x) + J_m'^2(\mu_{mn} x) \right\} x\, dx \qquad \text{(II.29)}$$

Haciendo uso de la relación recurrente para las funciones de Bessel:

$$J_m(z) = \frac{z}{2m} \{ J_{m-1}(z) + J_{m+1}(z) \}, \qquad \text{(II.30)}$$

obtenemos

$$u = \frac{r_0^2}{4} \int_0^1 \left\langle \frac{m^2}{\mu_{mn}^2 x^2} \frac{\mu_{mn}^2 x^2}{m^2} \{J_{m-1}^2(\mu_{mn}x) + J_{m+1}^2(\mu_{mn}x) + \right.$$

$$+ 2J_{m-1}(\mu_{mn}x) J_{m+1}(\mu_{mn}x)\} + \{J_{m-1}^2(\mu_{mn}x) + J_{m+1}^2(\mu_{mn}x) -$$

$$\left. - 2J_{m-1}(\mu_{mn}x) J_{m+1}(\mu_{mn}x)\} \right\rangle x\,dx,$$

o bien

$$u = \frac{r_0^2}{2} \int_0^1 \{J_{m-1}^2(\mu_{mn}x) + J_{m+1}^2(\mu_{mn}x)\} x\,dx. \qquad \text{(II.31)}$$

Para las funciones cilíndricas es válida la correlación

$$\int Z_p^2(ax)\,x\,dx = \frac{x^2}{2}\{Z_p^2(ax) - Z_{p-1}(ax)\,Z_{p+1}(ax)\}, \qquad \text{(II.32)}$$

donde Z_p es cualquier función cilíndrica.

Por consiguiente,

$$u = \frac{r_0^2}{2}\frac{x^2}{2}\{J_{m-1}^2(\mu_{mn}x) - J_{m-2}(\mu_{mn}x)\,J_m(\mu_{mn}x) + J_{m+1}^2(\mu_{mn}x) -$$

$$- J_m(\mu_{mn}x)\,J_{m+2}(\mu_{mn}x)\}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{r_0^2}{4}\{J_{m-1}^2(\mu_{mn}) -$$

$$- J_m(\mu_{mn})\{J_{m-2}(\mu_{mn}) + J_{m+2}(\mu_{mn})\} + J_{m+1}^2(\mu_{mn})\}. \qquad \text{(II.33)}$$

Por medio de la relación recurrente (II.30) hallamos

$$J_{m-2}(\mu_{mn}) = \frac{2(m-1)}{\mu_{mn}} J_{m-1}(\mu_{mn}) - J_m(\mu_{mn}),$$

$$J_{m+2}(\mu_{mn}) = \frac{2(m+1)}{\mu_{mn}} J_{m+1}(\mu_{mn}) - J_m(\mu_{mn}).$$

De este modo

$$J_{m-2}(\mu_{mn})\,J_m(\mu_{mn}) = \frac{2(m-1)}{\mu_{mn}} J_{m-1}(\mu_{mn})\,J_m(\mu_{mn}) - J_m^2(\mu_{mn}), \qquad \text{(II.34)}$$

$$J_{m+2}(\mu_{mn})\,J_m(\mu_{mn}) = \frac{2(m+1)}{\mu_{mn}} J_{m+1}(\mu_{mn})\,J_m(\mu_{mn}) - J_m^2(\mu_{mn}). \qquad \text{(II.35)}$$

A continuación utilicemos las siguientes relaciones recurrentes:

$$J_{m-1}(z) = J_m'(z) + \frac{m}{z} J_m(z), \qquad \text{(II.36)}$$

$$J_{m+1}(z) = \frac{m}{z} J_m(z) - J_m'(z), \qquad \text{(II.37)}$$

$$J_{m-2}(\mu_{mn})\,J_m(\mu_{mn}) = \frac{2(m-1)}{\mu_{mn}} J_m'(\mu_{mn})\,J_m(\mu_{mn}) +$$

$$+ \frac{2(m-1)\,m}{\mu_{mn}^2} J_m^2(\mu_{mn}) - J_m^2(\mu_{mn}).$$

Puesto que μ_{mn} es la raíz de la derivada de las funciones de Bessel, se puede escribir

$$J'_m(\mu_{mn}) = 0, \tag{II.38}$$

$$J_{m-2}(\mu_{mn})\, J_m(\mu_{mn}) = \frac{2(m-1)\,m}{\mu^2_{mn}} J^2_m(\mu_{mn}) - J'^2_m(\mu_{mn}). \tag{II.39}$$

De modo análogo

$$J_{m+2}(\mu_{mn})\, J_m(\mu_{mn}) = \frac{2(m+1)\,m}{\mu^2_{mn}} J^2_m(\mu_{mn}) -$$

$$- \frac{2(m+1)\,m}{\mu^2_{mn}} J'_m(\mu_{mn})\, J_m(\mu_{mn}) - J'^2_m(\mu_{mn}) =$$

$$= \frac{2(m+1)\,m}{\mu^2_{mn}} J^2_m(\mu_{mn}) - J'^2_m(\mu_{mn}). \tag{II.40}$$

Al sustituir las expresiones (II.39) y (II.40) en la fórmula (II.33), obtenemos

$$u = \frac{r_0^2}{4} \left\langle J^2_{m-1}(\mu_{mn}) + J'^2_m(\mu_{mn}) \left\{ 1 - \frac{2(m-1)\,m}{\mu^2_{mn}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 1 - \frac{2(m+1)\,m}{\mu^2_{mn}} \right\} + J^2_{m+1}(\mu_{mn}) \right\rangle = \frac{r_0^2}{4} \left\{ J^2_{m-1}(\mu_{mn}) + \right.$$

$$\left. + J^2_{m+1}(\mu_{mn}) + 2J'^2_m(\mu_{mn}) - \frac{4m^2}{\mu^2_{mn}} J'^2_m(\mu_{mn}) \right\}. \tag{II.41}$$

Aplicando las correlaciones (II.36), (II.37) y (II.38) se puede deducir las siguientes expresiones:

$$J^2_{m-1}(\mu_{mn}) = \left\{ J'_m(\mu_{mn}) + \frac{m}{\mu_{mn}} J_m(\mu_{mn}) \right\}^2 = \frac{m^2}{\mu^2_{mn}} J^2_m(\mu_{mn}),$$

$$J^2_{m+1}(\mu_{mn}) = \left\{ \frac{m}{\mu_{mn}} J_m(\mu_{mn}) - J'_m(\mu_{mn}) \right\}^2 = \frac{m^2}{\mu^2_{mn}} J^2_m(\mu_{mn}).$$

Sustituyamos estas expresiones en la fórmula (II.41):

$$u = \frac{r_0^2}{4} \left\{ \frac{2m^2}{\mu^2_{mn}} J^2_m(\mu_{mn}) + 2J'^2_m(\mu_{mn}) - \frac{4m^2}{\mu^2_{mn}} J'^2_m(\mu_{mn}) \right\} =$$

$$= \frac{r_0^2}{2} \left(1 - \frac{m^2}{\mu^2_{mn}} \right) J^2_m(\mu_{mn}). \tag{II.42}$$

Coloquemos la expresión (II.42) en la fórmula (II.26):

$$\int_{S_K} \mathrm{Re}\,[\dot{E}_0 \dot{H}_0^*]\, dS = \frac{\omega\mu_a h r_0^2}{\mu^2_{mn}} C_3^2 \pi \frac{r_0^2}{2} \left(1 - \frac{m^2}{\mu^2_{mn}} \right) J^2_m(\mu_{mn}). \tag{II.43}$$

Sustituyamos las expresiones (II.25) y (II.43) en la fórmula (II.2):

$$h'_{\mathrm{K}mn} = \alpha_1 \frac{\frac{h^2 r_0^2}{\mu^4_{mn}} m^2 + r_0}{\frac{\omega\mu_a h r_0^2}{\mu^2_{mn}} \cdot \frac{r_0^2}{2} \left(1 - \frac{m^2}{\mu^2_{mn}} \right)}. \tag{II.44}$$

A continuación, hagamos uso de las expresiones (14.57) y (14.59):

$$h = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0}\right)^2},$$

$$\lambda = \frac{2\pi r_0}{\mu_{mn}}$$

con cuya ayuda se obtiene la relación

$$h = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \frac{\mu_{mn}^2}{r_0^2 \omega^2 \mu_a \varepsilon_a}} = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \frac{\mu_{mn}^2}{r_0^2 4\pi^2 f^2 \mu_a \varepsilon_a}} =$$

$$= \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{\lambda_{cr}^2 f^2}} = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}. \quad \text{(II.45)}$$

Al utilizar las fórmulas (14.59) y (II.45), la expresión (II.44) puede representarse en la forma

$$h'_{H_{mn}} = 2\alpha_1 r_0 \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a \left\{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2\right\} m^2 r_0^2 + \mu_{mn}^4}{\mu_{mn}^4 \omega^2 \mu_a \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2} \frac{r_0^2}{\mu_{mn}^2} \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right)} =$$

$$= 2\alpha_1 \frac{m^2 \left(\frac{\lambda_{cr}}{\lambda}\right)^2 - m^2 + \mu_{mn}^2}{r_0 \left(\frac{\lambda_{cr}}{\lambda}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2} (\mu_{mn}^2 - m^2)} =$$

$$= 2\alpha_1 \frac{1 + \frac{m^2}{\mu_{mn}^2 - m^2} \left(\frac{\lambda_{cr}}{\lambda}\right)^2}{r_0 \left(\frac{\lambda_{cr}}{\lambda}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}},$$

o bien, definitivamente,

$$h'_{H_{mn}} = 2\alpha_1 \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2 + \frac{m^2}{\mu_{mn}^2 - m^2}}{r_0 \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}}. \quad \text{(II.46)}$$

Para hacer más simple la notación hagamos uso de las designaciones (11.8). Entonces

$$h'_{H_{mn}} = 2\alpha_1 \frac{\alpha_a + \frac{m^2}{\mu_{mn}^2 - m^2}}{r_0 Z_{med} \sqrt{\alpha_a}} \quad \text{(II.47)}$$

Analicemos la deducción de la expresión para el coeficiente de atenuación del campo en el caso de ondas del tipo H_{0n} que posee las

componentes

$$\left.\begin{aligned}\dot{H}_r &= -j\frac{hr_0}{\mu_{0n}}C_2J_0'\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0}r\right)e^{-jhz},\\ \dot{H}_z &= C_2J_0\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0}r\right)e^{-jhz},\\ \dot{E}_\varphi &= j\frac{\omega\mu_a r_0}{\mu_{0n}}C_2J_0'\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0}r\right)e^{-jhz},\end{aligned}\right\} \qquad (II.48)$$

Escribamos las expresiones para las integrales: integral junto a la superficie metálica de la guía de ondas

$$\int_0^{2\pi}|\dot{H}_{0r}|^2\cdot r\,d\varphi=\int_0^{2\pi}|\dot{H}_z|^2 r_0\,d\varphi=C_2^2J_0^2(\mu_{0n})\,r_0 2\pi \qquad (II.49)$$

integral por el área de la sección transversal de la guía de ondas

$$u=\int_{S_g}\mathrm{Re}\,[\dot{E}_0\dot{H}_0^*]\,dS=-\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\dot{E}_\varphi\dot{H}_r^*r\,d\varphi\,dr=$$

$$=\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\frac{hC_2^2\omega\mu_a r_0^2}{\mu_{0n}^2}J_0'^2\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0}r\right)r\,d\varphi\,dr=$$

$$=\frac{hC_2^2\omega\mu_a r_0^2 2\pi}{\mu_{0n}^2}\int_0^{r_0}J_0'^2\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0}r\right)r\,dr.$$

Basándose en la relación recurrente (II.37), para $m=0$ son válidas las fórmulas

$$J_1(z)=-J_0'(z)\ \text{ y }\ J_1'^2(z)=J_1^2(z).$$

Entonces

$$u=\int_{S_g}\mathrm{Re}\,[\dot{E}_0\dot{H}_0^*]\,dS=\frac{hC_2^2\omega\mu_a r_0^2 2\pi}{\mu_{0n}^2}\int_0^{r_0}J_1^2\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0}r\right)r\,dr.$$

Efectuemos la sustitución de las variables, poniendo $r=r_0x$:

$$u=\frac{hC_2^2\omega\mu_a r_0^2 2\pi}{\mu_{0n}^2}\int_0^1 J_1^2(\mu_{0n}x)\,x\,dx.$$

La integral obtenida es integral del tipo (II.32), por eso se puede escribir

$$u=\frac{hC_2^2\omega\mu_a r_0^2 2\pi}{\mu_{0n}^2}\,\frac{x^2}{2}\,J_1^2(\mu_{0n}x)-J_0(\mu_{0n}x)\,J_2(\mu_0x)\big|_{x=1}=$$

$$=\frac{hC_2^2\omega\mu_a r_0^2 2\pi}{\mu_{0n}^2}\left\{\frac{1}{2}J_1^2(\mu_{0n})-J_0(\mu_{0n})\,J_2(\mu_{0n})\right\}.$$

A partir de las relaciones recurrentes (II.36) y (II.37) sigue la fórmula

$$J_{m-1}(z)\,J_{m+1}(z)=\frac{m^2}{z^2}J_m^2(z)-J_m'^2(z), \qquad \text{(II.50)}$$

sobre cuya base se puede escribir

$$J_0(\mu_{0n})\,J_2(\mu_{0n})=\frac{1}{\mu_{0n}^2}J_1^2(\mu_{0n})-J_1'^2(\mu_{0n}).$$

De la relación recurrente (II.36) se infiere también que

$$J_1(z)=-J_0'(z), \quad J_1^2(z)=J_0'^2(z), \qquad \text{(II.51)}$$

de donde

$$1/2J_1^2(\mu_{0n})-J_0(\mu_{0n})\,J_2(\mu_{0n})=$$
$$=1/2J_0'^2(\mu_{0n})-\frac{1}{\mu_{0n}}J_0'(\mu_{0n})+J_1'^2(\mu_{0n})=J_1'^2(\mu_{0n}). \qquad \text{(II.52)}$$

Teniendo en cuenta las relaciones deducidas y las fórmulas (II.36) y (II.50), obtenemos

$$J_0(z)=J_1'(z)+\frac{1}{z}J_1(z)=J_1'(z)-\frac{1}{z}J_0'(z).$$

Para $z=\mu_{0n}$

$$J_0(\mu_{0n})=J_1'(\mu_{0n})-\frac{1}{\mu_{0n}^2}J_0'(\mu_{0n}), \quad J_0(\mu_{0n})=J_1'(\mu_{0n}),$$
$$u=\frac{hC_1^2\omega\mu_a r_0^2\pi}{\mu_{0n}^2}J_1'^2(\mu_{0n})=\frac{hC_1^2\omega\mu_a r_0^2\pi}{\mu_{0n}^2}J_0^2(\mu_{0n}). \qquad \text{(II.53)}$$

Sustituyamos en la fórmula (II.2) las expresiones (II.49) y (II.53):

$$h'_{H_{0n}}=\alpha_1\frac{\mu_1^2C_0J_0^2(\mu_{0n})\,r_0^2\pi}{hC_1^2\omega\mu_a r_0^2\pi J_0^2(\mu_{0n})}=\frac{\alpha_1 4\pi^2}{r_0\dfrac{4\pi^2r_0^2}{\mu_{0n}^2}h\omega\mu_a}=$$
$$=\frac{\alpha_1 4\pi^2\varepsilon_a}{r_0\dfrac{4\pi^2r_0^2}{\mu_{0n}^2}\omega^2\mu_a\varepsilon_a\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}}.$$

Teniendo en cuenta la correlación (14.59) esta expresión puede escribirse en la forma

$$h'_{H_{0n}}=\alpha_1\frac{1}{r_0\left(\dfrac{\lambda_{cr}}{\lambda}\right)^2\sqrt{\dfrac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}}, \qquad \text{(II.54)}$$

o bien, en las designaciones (II.8)

$$h'_{H_{0n}}=\alpha_1\frac{\alpha_2}{r_0Z_{med}\sqrt{\alpha_3}} \qquad \text{(II.55)}$$

§ II.4. Cálculo de los coeficientes de atenuación del campo h' en guías de ondas circulares en el caso de ondas del tipo eléctrico

Las ondas del tipo eléctrico en una guía de ondas circular poseen componentes del campo que se definen por medio de las fórmulas (14.33)—(14.38).

Hallemos las expresiones para las integrales:

integral junto a la superficie metálica de la guía de ondas, la cual se encuentra en el numerador de la expresión (II.2):

$$\int_0^{2\pi} |\dot{\mathbf{H}}_{0\tau}|^2 r\, d\varphi = \int_0^{2\pi} |\dot{H}_\varphi|^2 r_0\, d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\omega^2 \varepsilon_a^2 r_0^4}{\eta_{mn}^4} C_1^2 J_m'^2(\eta_{mn}) \cos^2(m\varphi)\, d\varphi = \frac{\omega^2 \varepsilon_a^2 r_0^4}{\eta_{mn}^2} C_1^2 J_m'^2(\eta_{mn})\, \pi; \quad \text{(II.56)}$$

integral por el área transversal de la guía de ondas:

$$\int_{S_\varphi} Re\,[\dot{\mathbf{E}}_0 \dot{\mathbf{H}}_0^*]\, dS = \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} (\dot{E}_r \dot{H}_\varphi^* - \dot{E}_\varphi \dot{H}_r^*)\, r\, d\varphi\, dr =$$

$$= \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\omega \varepsilon_a r_0^2 h C_1^2}{\eta_{mn}^2} J_m'^2\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \cos^2(m\varphi) + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega \varepsilon_a r_0^2 h C_1^2 m^2}{\eta_{mn}^4} \cdot \frac{1}{r^2} J_m^2\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \operatorname{sen}^2(m\varphi) \right\} r\, d\varphi\, dr =$$

$$= \frac{\omega \varepsilon_a r_0^2 h C_1^2 \pi}{\eta_{mn}^2} \int_0^{r_0} \left\{ J_m'^2\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) + \frac{r_0^2 m^2}{\eta_{mn}^2 r^2} J_m^2\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \right\} r\, dr. \quad \text{(II.57)}$$

Introduzcamos la designación

$$u_1 = \int_0^{r_0} \left\{ J_m'^2\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) + \frac{r_0^2 m^2}{\eta_{mn}^2 r^2} J_m^2\left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r\right) \right\} r\, dr.$$

Efectuemos la sustitución de las variables, suponiendo que $r = r_0 x$:

$$u_1 = r_0^2 \int_0^1 \left\{ \frac{m^2}{\eta_{mn}^2 x^2} J_m^2(\eta_{mn} x) + J_m'^2(\eta_{mn} x) \right\} x\, dx. \quad \text{(II.58)}$$

La integral u_1 por su forma matemática coincide con la integral (II.29). Su solución puede representarse en una forma semejante a la expresión (II.33):

$$u_1 = \frac{r_0^2}{4} \{ J_{m-1}^2(\eta_{mn}) - J_m(\eta_{mn}) \{ J_{m-2}(\eta_{mn}) + J_{m+2}(\eta_{mn}) \} + J_{m+1}^2(\eta_{mn}) \}. \quad \text{(II.59)}$$

Puesto que η_{mn} son las raíces de las funciones de Bessel J_m, es válida la relación

$$J_m(\eta_{mn}) = 0 \tag{II.60}$$

y

$$u_1 = \frac{r_0^2}{4}\left(J_{m-1}^2(\eta_{mn}) + J_{m+1}^2(\eta_{mn})\right). \tag{II.61}$$

De las relaciones recurrentes (II.36) y (II.37) se desprenden las fórmulas

$$J_{m-1}^2(\eta_{mn}) = \left\{J'_m(\eta_{mn}) + \frac{m}{\eta_{mn}} J_m(\eta_{mn})\right\}^2,$$

$$J_{m+1}^2(\eta_{mn}) = \left\{\frac{m}{\eta_{mn}} J_m(\eta_{mn}) - J'_m(\eta_{mn})\right\}^2,$$

o bien, teniendo en cuenta la igualdad (II.60),

$$J_{m-1}^2(\eta_{mn}) = J_m'^2(\eta_{mn}),$$
$$J_{m+1}^2(\eta_{mn}) = J_m'^2(\eta_{mn}).$$

Sustituyamos las relaciones obtenidas en la fórmula (II.61):

$$u_1 = \frac{r_0^2}{2} J_m'^2(\eta_{mn}). \tag{II.62}$$

Seguidamente, sustituyamos la integral u_1 en la expresión (II.57):

$$\int_{S_\Gamma} \mathrm{Re}\,[\dot{E}_0 \dot{H}_0^*]\, dS = \frac{\omega \varepsilon_a r_0^2 h C_1^2 \pi}{\eta_{mn}^2} \cdot \frac{r_0^2}{2} J_m'^2(\eta_{mn}). \tag{II.63}$$

Las relaciones (II.56), (II.63) y (II.2) dan la posibilidad de determinar el coeficiente de atenuación $h'_{\mathrm{E}mn}$ en el caso de ondas del tipo eléctrico:

$$h'_{\mathrm{E}mn} = \alpha_1 \frac{\dfrac{\omega^2 \varepsilon_a r_0^2}{\eta_{mn}^2}}{\dfrac{\omega r_0^2 k}{\eta_{mn}^2} \cdot \dfrac{r_0^2}{2}} = 2\alpha_1 \frac{\varepsilon_a}{r_0 \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sqrt{1 - \left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}},$$

o bien

$$h'_{\mathrm{E}mn} = \frac{2\alpha_1}{r_0 \sqrt{\dfrac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}} \tag{II.64}$$

Valiéndonos de las designaciones (II.8), obtenemos la expresión definitiva para $h'_{\mathrm{E}mn}$:

$$h'_{\mathrm{E}mn} = 2\alpha_1 \frac{1}{r_0 Z_{med} \sqrt{\alpha_s}}. \tag{II.65}$$

A continuación, analicemos la deducción del coeficiente de atenuación para las ondas del tipo E_{0n}, cuando $m = 0$. En este caso, las

expresiones para las componentes del campo toman la forma

$$\dot{E}_r = -j\frac{hr_0}{\eta_{0n}} C_1 J_0'\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) e^{-jhz}, \tag{II.66}$$

$$\dot{E}_z = C_1 J_0\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) e^{-jhz}, \tag{II.67}$$

$$\dot{H}_\varphi = -j\frac{\omega\varepsilon_a r_0}{\eta_{0n}} C_1 J_0'\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) e^{-jhz}. \tag{II.68}$$

Hallemos las expresiones para las integrales: integral en el numerador de la expresión (II.2)

$$\int_0^{2\pi} |\dot{H}_{0r}|^2 r_0\, d\varphi \quad \int_0^{2\pi} |H_\varphi|^2 r_0\, d\varphi = \frac{\omega^2\varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2(\eta_{0n})\, 2\pi; \tag{II.69}$$

integral en el denominador de la expresión (II.2)

$$\int_{S_g} \mathrm{Re}\,[\dot{E}_0 \dot{H}_0^*]\, dS = \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} \dot{E}_r \dot{H}_\varphi^* r\, d\varphi\, dr =$$

$$= \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} \frac{\omega\varepsilon_a h r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) r\, d\varphi\, dr =$$

$$= \int_0^{r_0} \frac{\omega\varepsilon_a h r_0^2 2\pi}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) r\, dr =$$

$$= \frac{\omega\varepsilon_a h r_0^2 2\pi C_1^2}{\eta_{0n}^2} \int_0^{r_0} J_0'^2\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) r\, dr = \frac{\omega\varepsilon_a h r_0^2 2\pi C_1^2}{\eta_{0n}^2} u_2. \tag{II.70}$$

Aquí

$$u_2 = \int_0^{r_0} J_0'^2\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) r\, dr. \tag{II.71}$$

Hagamos la sustitución de las variables, suponiendo que $r = r_0 x$:

$$u_2 = r_0^2 \int_0^1 J_0'^2(\eta_{0n} x)\, x\, dx. \tag{II.72}$$

En virtud del carácter justo de la igualdad $J_0'^2(z) = J_1(z)$ se puede escribir

$$u_2 = r_0^2 \int_0^1 J_1^2(\eta_{0n} x)\, x\, dx.$$

La integral obtenida es integral del tipo (II.32), y sobre esta base

$$u_2 = r_0^2 \left\{\frac{x^2}{2} J_1^2(\eta_{0n} x) - J_0(\eta_{0n} x) J_2(\eta_{0n} x)\right\}\Big|_{x=1}.$$

o bien, teniendo en cuenta la igualdad (II.60),

$$u_2 = \frac{r_0^2}{2} J_1^2(\eta_{0n}).$$

Al sustituir $J_1^2(\eta_{0n}) = J_0'^2(\eta_{0n})$, obtenemos la relación

$$u_2 = \frac{r_0^2}{2} J_0'^2(\eta_{0n}). \qquad \text{(II.73)}$$

Sustituyamos la fórmula obtenida en la expresión (II.70):

$$\int_{S_2} \mathrm{Re}\,[\dot{E}_0 \dot{H}_0^*]\, dS = \frac{\omega \varepsilon_a h r_0^2 2\pi C_1^2}{\eta_{0n}^2} \cdot \frac{r_0^2}{2} J_0'^2(\eta_{0n}). \qquad \text{(II.74)}$$

Al poner en la fórmula (II.2) las expresiones (II.69) y (II.74), hallamos el coeficiente de atenuación $h'_{E_{0n}}$:

$$h'_{E_{0n}} = \alpha_1 \frac{\dfrac{\omega^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2(\eta_{0n})\, 2\pi}{\dfrac{\omega \varepsilon_a h r_0^2 2\pi C_1^2}{\eta_{0n}^2} \cdot \dfrac{r_0^2}{2} J_0'^2(\eta_{0n})},$$

o bien

$$h'_{E_{0n}} = \frac{2\alpha_1}{r_0 \sqrt{\dfrac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{1 - \left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}} \qquad \text{(II.75)}$$

La expresión obtenida no se distingue de la fórmula (II.64) válida para $m \neq 0$. En el caso considerado, la expresión definitiva para el coeficiente de atenuación coincide con la fórmula (II.65).

APÉNDICE III

Determinación del factor de mérito de los resonadores de cavidad

§ III.1. Determinación de los factores de mérito de los resonadores de cavidad rectangulares en el caso de ondas del tipo magnético

El factor de mérito (llamado también factor de calidad o factor Q) de los resonadores de cavidad se calcula mediante la correlación general (25.8)

$$Q = \frac{\sqrt{\omega_r \mu_a} \int_{V_1} |\dot{H}|^2\, dV}{\sqrt{\dfrac{\mu_{s2}}{2\gamma_{el\,2}}} \oint_{S_1} |\dot{H}_{\tau 1}|^2\, dS}.$$

Para que la notación sea más sencilla introduzcamos la designación

$$\frac{\sqrt{\omega_r \mu_a}}{\sqrt{\frac{\mu_{a2}}{2\gamma_{el\,2}}}} = \alpha_4. \tag{III.1}$$

Entonces

$$Q = \alpha_4 \frac{\int\limits_{V_1} |\dot{H}|^2 dV}{\oint\limits_{S_1} |\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2 dS} = \alpha_4 \frac{u_1}{u_2}, \tag{III.2}$$

donde

$$u_1 = \int\limits_{V_1} |\dot{H}|^2 dV, \quad u_2 = \oint\limits_{S_1} |\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2 dS. \tag{III.3}$$

Cuando se trata de ondas del tipo magnético, las componentes del campo en el resonador de cavidad se definen por las expresiones (21.29)—(21.31).

Hallemos la integral u_1:

$$u_1 = \int\limits_0^l \int\limits_0^b \int\limits_0^a (|\dot{H}_{xr}|^2 + |\dot{H}_{yr}|^2 + |\dot{H}_{zr}|^2)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int\limits_0^l \int\limits_0^b \int\limits_0^a \left\{4 \frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^2 l^2} C_2^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos^2\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \times\right.$$

$$\times \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) + 4 \frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^2 l^2} C_2^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cos^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \times$$

$$\times \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) +$$

$$\left. + 4C_2^2 \cos^2\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right)\right\} dx\, dy\, dz =$$

$$= 4C_2^2 \frac{abl}{8} \left\{\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^2 l^2} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right) + 1\right\}.$$

Teniendo en cuenta la relación (13.23)

$$g_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

la integral u_1 puede escribirse en la forma

$$u_1 = C_2^2 \frac{abl}{2} \left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^2 l^2} + 1\right). \tag{III.4}$$

Determinemos la integral u_2:

$$u_2 = 2\int_0^l \int_0^a \{|\dot{H}_{xr}|^2 + |\dot{H}_{zr}|^2\}\, dx\, dz\,|_{y=0} +$$

$$+ 2\int_0^l \int_0^b \{|\dot{H}_{yr}|^2 + |\dot{H}_{zr}|^2\}\, dy\, dz\,|_{x=0} +$$

$$+ 2\int_0^b \int_0^a \{|\dot{H}_{xr}|^2 + |\dot{H}_{yr}|^2\}\, dx\, dy\,|_{z=0} =$$

$$= 2\int_0^l \int_0^a \left\{4\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2} C_3^2 \frac{m^2\pi^2}{a^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right) +\right.$$

$$\left. + 4C_3^2 \cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right)\right\} dx\, dz +$$

$$+ 2\int_0^l \int_0^b \left\{4\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2} C_3^2 \frac{n^2\pi^2}{b^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right) +\right.$$

$$\left. + 4C_3^2 \cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right)\right\} dy\, dz +$$

$$+ 2\int_0^b \int_0^a \left\{4\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2} C_3^2 \frac{m^2\pi^2}{a^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) +\right.$$

$$\left. + 4\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2} C_3^2 \frac{n^2\pi^2}{b^2} \cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right\} dx\, dy =$$

$$= 8\frac{al}{4} C_3^2 \left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2}\cdot\frac{m^2\pi^2}{a^2} + 1\right) + 8\frac{bl}{4} C_3^2 \left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2}\cdot\frac{n^2\pi^2}{b^2} + 1\right) +$$

$$+ 8\frac{ab}{4} C_3^2 \left\{\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2}\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)\right\}.$$

Al utilizar la expresión (13.23), obtenemos

$$u_2 = 2C_3^2 al\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2}\cdot\frac{m^2\pi^2}{a^2} + 1\right) +$$

$$+ 2C_3^2 bl\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2}\cdot\frac{n^2\pi^2}{b^2} + 1\right) + 2C_3^2 ab\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2}. \qquad \text{(III.5)}$$

Sustituyamos las expresiones (III.4) y (III.5) en la fórmula (III.2)

$$Q = \frac{\alpha_4 C_2^2 \frac{abl}{2}\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^2 l^2} + 1\right)}{2\alpha_2^2\left\{al\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2}\cdot\frac{m^2\pi^2}{a^2}+1\right)+bl\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2}\cdot\frac{n^2\pi^2}{b^2}+1\right)+ab\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^2 l^2}\right\}} =$$

$$= \frac{\alpha_4}{4}\frac{abl\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^2 l^2}+1\right)}{al\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2}\cdot\frac{m^2\pi^2}{a^2}+1\right)+bl\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^4 l^2}\cdot\frac{n^2\pi^2}{b^2}+1\right)+ab\frac{p^2\pi^2}{g_{mn}^2 l^2}}$$

$$= \frac{\alpha_4}{4}\frac{abl\left(\frac{p^2\pi^2}{l^2}+g_{mn}^2\right)g_{mn}^2}{al\left\{\left(\frac{p\pi^2 m}{la}\right)^2+g_{mn}^4\right\}+bl\left\{\left(\frac{p\pi^2 n}{lb}\right)^2+g_{mn}^4\right\}+ab\left(\frac{p\pi g_{mn}}{l}\right)^2}.$$

Haciendo uso de la expresión (13.23) y de la fórmula (21.37)

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2},$$

escribamos la expresión definitiva para el factor de mérito del resonador de cavidad rectangular en el caso de ondas del tipo H_{mnp}:

$$Q_{H_{mnp}} = \frac{\alpha_4}{4}\frac{abl\,\omega_r^2 g_{mn}^2 \varepsilon_a^2}{al\left\{\left(\frac{p\pi^2 m}{la}\right)^2+g_{mn}^4\right\}+bl\left\{\left(\frac{p\pi^2 a}{lb}\right)^2+g_{mn}^4\right\}+ab\left(\frac{l\pi g_{mn}}{l}\right)^2}. \quad \text{(III.6)}$$

Luego determinemos el factor de mérito del resonador de cavidad rectangular en el caso de ondas del tipo H_{mop}. Para $n = 0$ hallemos de las expresiones (21.29)—(21.31) las componentes del campo magnético:

$$\dot{H}_{xr} = j2\frac{p\pi}{g_{m0}^2 l} C_2 \frac{m\pi}{a}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right). \quad \text{(III.7)}$$

$$\dot{H}_{zr} = -j2C_2\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{l}z\right). \quad \text{(III.8)}$$

Determinemos la integral u_1:

$$u_1 = \int_0^l\int_0^b\int_0^a (|\dot{H}_{xr}|^2 + |\dot{H}_{zr}|^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^l\int_0^b\int_0^a \left\{4\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^4 l^2}C_2^2\frac{m^2\pi^2}{a^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right)+\right.$$

$$\left. + 4C_2^2\cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right)\right\}dx\,dy\,dz =$$

$$= 4C_2^2\frac{abl}{4}\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^2 l^2}\cdot\frac{m^2\pi^2}{a^2}+1\right) = C_2^2 abl\left(\frac{p^2\pi^2 m^2}{g_{m0}^4 l^2 a^2}+1\right). \quad \text{(III.9)}$$

Hallemos la integral u_2:

$$u_2 = 2\int_0^l\int_0^a (|\dot{H}_{xr}|^2 + |\dot{H}_{zr}|^2)\,dx\,dz\,|_{y=b} +$$

$$+ 2\int_0^l\int_0^b |\dot{H}_{zr}|^2\,dy\,dz\,|_{x=0} + 2\int_0^b\int_0^a |\dot{H}_{xr}|^2\,dx\,dy\,|_{z=0} =$$

$$= 2\int_0^l\int_0^a \left\{4\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^4 l^2} C_2^2 \frac{m^2\pi^2}{a^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right) + \right.$$

$$\left. + 4C_2^2\cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right)\right\} dx\,dz +$$

$$+ 2\int_0^l\int_0^b 4C_2^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right) dy\,dz +$$

$$+ 2\int_0^b\int_0^a 4\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^4 l^2} C_2^2 \frac{m^2\pi^2}{a^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx\,dy =$$

$$= 2C_2^2\frac{al}{4}\left(4\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^2 l^2} + 4\right) + 8C_2^2\frac{bl}{2} + 8C_2^2\frac{ab}{2}\cdot\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^2 l^2}.$$

En la deducción de esta correlación se ha utilizado la fórmula

$$g_{m0}^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2}. \qquad \text{(III.10)}$$

Transformemos la expresión para u_2:

$$u_2 = 2C_2^2 al\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^2 l^2} + 1\right) + 4C_2^2 bl + 4C_2^2 ab\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^2 l^2}. \qquad \text{(III.11)}$$

Coloquemos las expresiones (III.9) y (III.11) en la fórmula (III.2):

$$Q = \alpha_4 \frac{C_2^2 abl\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^2 l^2} + 1\right)}{2C_2^2 al\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^2 l^2} + 1\right) + 4C_2^2 bl + 4C_2^2 ab\frac{p^2\pi^2}{g_{m0}^2 l^2}}.$$

La expresión definitiva para el factor de mérito del resonador en el caso de ondas del tipo H_{mop} tiene la forma

$$Q_{H_{mop}} = \frac{\alpha_4}{2}\cdot\frac{abl\omega_r^2\mu_a\varepsilon_a}{al\omega_r^2\varepsilon_a\mu_a + 2bl g_{m0}^2 + 2ab\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2} \qquad \text{(III.12)}$$

Deduzcamos la expresión para el factor de mérito en el caso de ondas del tipo H_{mnp}. A partir de las expresiones (21.29) (29.31)

hallemos las componentes del campo magnético:

$$\dot{H}_{yr} = j2\frac{p\pi}{g_{0n}^2 l} C_2 \frac{n\pi}{b} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \qquad \text{(III.13)}$$

$$\dot{H}_{zr} = -j2C_2 \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{b} z\right). \qquad \text{(III.14)}$$

Determinemos la integral u_1:

$$u_1 = \int_0^l \int_0^b \int_0^a (|\dot{H}_{yr}|^2 + |\dot{H}_{zr}|^2)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^l \int_0^b \int_0^a \left\{4\frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^2 l^2} C_2^2 \frac{n^2\pi^2}{b^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) + \right.$$

$$\left. + 4C_2^2 \cos^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right)\right\} dx\, dy\, dz =$$

$$= 4C_2^2 \frac{abl}{4}\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^2 l^2} \cdot \frac{n^2\pi^2}{b^2} + 1\right) = C_2^2 abl\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^2 l^2} + 1\right). \qquad \text{(III.15)}$$

Determinemos la integral u_2:

$$u_2 = 2\int_0^l \int_0^a |\dot{H}_{zr}|^2\, dx\, dz\,|_{y=0} + 2\int_0^l \int_0^b (|\dot{H}_{yr}|^2 + |\dot{H}_{zr}|^2)\, dy\, dz\,|_{x=0} +$$

$$+ 2\int_0^b \int_0^a |\dot{H}_{yr}|^2\, dx\, dy\,|_{z=0} = 2\int_0^l \int_0^a 4C_2^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) dx\, dz +$$

$$+ 2\int_0^l \int_0^b \left\{4\frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^2 l^2} C_2^2 \frac{n^2\pi^2}{b^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) + \right.$$

$$\left. + 4C_2^2 \cos^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right)\right\} dy\, dz +$$

$$+ 2\int_0^b \int_0^a 4\frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^2 l^2} C_2^2 \frac{n^2\pi^2}{b^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dx\, dy =$$

$$= 8C_2^2 \frac{al}{2} + 8C_2^2 \frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^2 l^2} \cdot \frac{bl}{4} + 8C_2^2 \frac{bl}{4} + 8C_2^2 \frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^2 l^2} \cdot \frac{ab}{2} =$$

$$= 4C_2^2 al + 2C_2^2 bl\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^2 l^2} + 1\right) + 4C_2^2 ab \frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^2 l^2}. \qquad \text{(III.16)}$$

Al sustituir en la fórmula (III 2) las expresiones (III.15) y (III.16), hallamos el factor de mérito del resonador de cavidad rectangular cuando se trata de ondas del tipo H_{0np}:

$$Q_{H_{0np}} = \alpha_4 \frac{C_2^2 abl\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^2 l^2} + 1\right)}{4C_2^2 al + 2C_2^2 bl\left(\frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^2 l^2} + 1\right) + 4C_2^2 ab \frac{p^2\pi^2}{g_{0n}^2 l^2}},$$

o bien, en la forma definitiva

$$Q_{\mathrm{H}_{mnp}} = \frac{\alpha_4}{2} \cdot \frac{abl\omega_r^2 \mu_a \varepsilon_a}{2a\,\mathrm{tg}\,\delta_m + bl\omega_r^2 \mu_a \varepsilon_a + 2ab\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}. \qquad \text{(III.17)}$$

§ III.2. Determinación de los factores de mérito de los resonadores de cavidad rectangulares en el caso de ondas del tipo eléctrico

En el caso de ondas del tipo eléctrico las componentes del campo en el resonador de cavidad se definen por las expresiones (21.18)—(21.20).

Deduzcamos la expresión para el factor de mérito del resonador en el caso de ondas del tipo E_{mnp}.

Hallemos la integral u_1:

$$u_1 = \int_0^l \int_0^b \int_0^a (|\dot{H}_{xr}|^2 + |\dot{H}_{yr}|^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^l \int_0^b \int_0^a \left\{4\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{n^2\pi^2}{b^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\times\right.$$

$$\times \cos^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right) + 4\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{m^2\pi^2}{a^2} \cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\times$$

$$\left.\times \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right)\right\} dx\,dy\,dz =$$

$$= 4\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{abl}{8}\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right) = \frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2}{2g_{mn}^2} C_1^2 abc. \qquad \text{(III.18)}$$

Determinemos la integral u_2:

$$u_2 = 2\int_0^l \int_0^a |\dot{H}_{xr}|^2\,dx\,dz\,|_{y=0} + 2\int_0^l \int_0^b |\dot{H}_{yr}|^2\,dy\,dz\,|_{x=0} +$$

$$+ 2\int_0^b \int_0^a (|\dot{H}_{xr}|^2 + |\dot{H}_{yr}|^2)\,dx\,dy\,|_{z=0} =$$

$$- 2\int_0^l \int_0^a 4\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{n^2\pi^2}{b^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right) dx\,dz +$$

$$+ 2\int_0^l \int_0^b 4\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{m^2\pi^2}{a^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos^2\left(\frac{p\pi}{l}z\right) dy\,dz +$$

$$+ 2\int_0^b \int_0^a \left\{4\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2}{g_{mn}^4} C_1^2 \frac{n^2\pi^2}{b^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) +\right.$$

$$+4\frac{\omega_r^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\frac{m^2\pi^2}{a^2}\cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\Big\}dx\,dy=$$

$$=8\frac{\omega_r^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\frac{al}{4}\cdot\frac{n^2\pi^2}{b^2}+8\frac{\omega_r^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\frac{bl}{4}\cdot\frac{m^2\pi^2}{a^2}+$$

$$+8\frac{\omega_r^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\frac{ab}{4}\left(\frac{n^2\pi^2}{b^2}+\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right)-$$

$$-2\frac{\omega_r^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\left(al\frac{n^2\pi^2}{b^2}+bl\frac{m^2\pi^2}{a^2}+abg_{mn}^2\right). \qquad \text{(III.19)}$$

Al sustituir los valores hallados de u_1 y u_2 en la fórmula (III.2), determinemos el factor de mérito del resonador en el caso de ondas del tipo E_{mnp}:

$$Q_{E_{mnp}}=\alpha_4\frac{\frac{\omega_r^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2abl}{2\frac{\omega_r^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\left(al\frac{n^2\pi^2}{b^2}+bl\frac{m^2\pi^2}{a^2}+abg_{mn}^2\right)},$$

$$Q_{E_{mnp}}=\frac{\alpha_4}{4}\cdot\frac{g_{mn}^2abl}{al\frac{n^2\pi^2}{b^2}+bl\frac{m^2\pi^2}{a^2}+abg_{mn}^2}. \qquad \text{(III.20)}$$

Hallemos la expresión para el factor de mérito del resonador en el caso de ondas del tipo E_{mn0}. Para $p=0$ las componentes del campo magnético se escriben en la forma

$$\dot{H}_{xr}=-j2\frac{\omega_r\varepsilon_a}{g_{mn}^2}C_1\frac{n\pi}{b}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \qquad \text{(III.21)}$$

$$\dot{H}_{yr}=j2\frac{\omega_r\varepsilon_a}{g_{mn}^2}C_1\frac{m\pi}{a}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right). \qquad \text{(III.22)}$$

Determinemos la integral u_1:

$$u_1=\int_0^l\int_0^b\int_0^a(|\dot{H}_{xr}|^2+|\dot{H}_{yr}|^2)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\int_0^l\int_0^b\int_0^a\left\{\frac{4\omega_r^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\frac{n^2\pi^2}{b^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{4\omega_r^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\frac{m^2\pi^2}{b^2}\cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right\}dx\,dy\,dz=$$

$$=\frac{\omega_r^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2abl\left(\frac{n^2\pi^2}{b^2}+\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right)-\frac{\omega_r^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^2}C_1^2abl. \qquad \text{(III.23)}$$

Hallemos la integral u_2:

$$u_2 = 2\int_0^l\int_0^a |\dot{H}_{xr}|^2\,dx\,dz\,|_{y=0} + 2\int_0^l\int_0^b |\dot{H}_{yr}|^2\,dy\,dz\,|_{x=0} +$$

$$+2\int_0^b\int_0^a (|\dot{H}_{xr}|^2 + |\dot{H}_{yr}|^2)\,dx\,dy\,|_{z=0} =$$

$$=2\int_0^l\int_0^a 4\frac{\omega_r^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\frac{n^2\pi^2}{b^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)dx\,dz +$$

$$+2\int_0^l\int_0^b 4\frac{\omega_r^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\frac{m^2\pi^2}{a^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy\,dz +$$

$$+2\int_0^b\int_0^a \left\{4\frac{\omega_r^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\frac{n^2\pi^2}{b^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right) +\right.$$

$$\left.+4\frac{\omega_r^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\frac{m^2\pi^2}{a^2}\cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right\}dx\,dy =$$

$$=4\frac{\omega_r^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\frac{n^2\pi^2}{b^2}al + 4\frac{\omega_r^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\frac{m^2\pi^2}{a^2}bl +$$

$$+2\frac{\omega_r^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\left(\frac{n^2\pi^2}{b^2}+\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right)ab =$$

$$=2\frac{\omega_r^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\left(2al\frac{n^2\pi^2}{b^2}+2bl\frac{m^2\pi^2}{a^2}+g_{mn}^2ab\right). \qquad \text{(III.24)}$$

Coloquemos los valores hallados de u_1 y u_2 en la fórmula (III.2):

$$Q_{E_{mn0}} = \alpha_4\frac{\frac{\omega_r^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2abl}{2\frac{\omega_r^2\varepsilon_a^2}{g_{mn}^4}C_1^2\left(2al\frac{n^2\pi^2}{b^2}+2bl\frac{m^2\pi^2}{a^2}+g_{mn}^2ab\right)}.$$

Después de llevar a cabo las simplificaciones necesarias, se obtiene la siguiente expresión para el factor de mérito del resonador de cavidad que trabaja con las ondas del tipo E_{mn0}:

$$Q_{E_{mn0}} = \frac{\alpha_4}{4}\cdot\frac{g_{mn}^2abl}{al\frac{n^2\pi^2}{b^2}+bl\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{g_{mn}^2}{2}ab}. \qquad \text{(III.25)}$$

§ III.3. Determinación de los factores de mérito de los resonadores de cavidad cilíndricos en el caso de ondas del tipo magnético

Cuando se trata de ondas del tipo magnético las componentes del campo magnético en un resonador de cavidad cilíndrico se determinan por medio de las expresiones (22.23)—(22.25).

Deduzcamos la expresión para el factor de mérito del resonador en el caso de ondas del tipo H_{mnp}.

Hallemos la integral u_1:

$$u_1 = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (|\dot{H}_{rr}|^2 + |\dot{H}_{\varphi r}|^2 + |\dot{H}_{zr}|^2)\, r\, dr\, d\varphi\, dz =$$

$$= \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \left\{ 4 \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{mn}^2} C_2^2 J_m'^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \cos^2(m\varphi) \times \right.$$

$$\times \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) + 4 \frac{p^2\pi^2 r_0^4}{l^2 r^2 \mu_{mn}^4} C_2^2 m^2 J_m^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \operatorname{sen}^2(m\varphi) \times$$

$$\left. \times \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) + 4C_2^2 J_m^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \cos^2(m\varphi) \operatorname{sen}^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) \right\} r\, dr\, d\varphi\, dz =$$

$$= 4C_2^2 \frac{l\pi}{2} \int_0^{r_0} \left\{ \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{mn}^2} J_m'^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) + \frac{p^2\pi^2 r_0^4}{l^2 r^2 \mu_{mn}^4} m^2 J_m^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) + \right.$$

$$\left. + J_m^2 \left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r \right) \right\} r\, dr.$$

Hagamos la sustitución de las variables tomando $r = r_0 x$:

$$u_1 = 2C_2^2 l\pi r_0^2 \int_0^1 \left\{ \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{mn}^2} J_m'^2 (\mu_{mn} x) + \right.$$

$$\left. + \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2 x^2 \mu_{mn}^4} m^2 J_m^2 (\mu_{mn} x) + J_m^2 (\mu_{mn} x) \right\} x\, dx =$$

$$= 2C_2^2 l\pi r_0^2 \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{mn}^2} \int_0^1 \left\{ \frac{m^2}{x^2 \mu_{mn}^2} J_m^2 (\mu_{mn} x) + \right.$$

$$\left. + J_m'^2 (\mu_{mn} x) \right\} x\, dx + 2C_2^2 l\pi r_0^2 \int_0^1 J_m^2 (\mu_{mn} x)\, x\, dx. \qquad \text{(III.26)}$$

La primera de las integrales escritas es análoga a la integral (II.29). Su solución viene dada por la expresión (II.42). La segunda integral se halla empleando la fórmula (II.32). En consecuencia,

$$u_1 = 2C_2^2 l\pi \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{mn}^2} \cdot \frac{r_0^2}{2} \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2} \right) J_m^2 (\mu_{mn}) +$$

$$+ 2C_2^2 l\pi r_0^2 \frac{1}{2} \{ J_m^2 (\mu_{mn}) - J_{m-1} (\mu_{mn})\, J_{m+1} (\mu_{mn}) \}.$$

Teniendo en cuenta las correlaciones (II.50) y (II.38) el segundo sumando se transforma y como resultado la expresión para u_1 toma

la forma

$$u_1 = C_2^2 l\pi \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2} r_0^2 \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right) J_m^2(\mu_{mn}) + \\ + C_2^2 l\pi r_0^2 \left\{J_m^2(\mu_{mn}) - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2} J_m^2(\mu_{mn})\right\},$$

o bien, de otra manera,

$$u_1 = C_2^2 l\pi r_0^2 J_m^2(\mu_{mn}) \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right)\left(1 + \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2}\right). \qquad \text{(III.27)}$$

Seguidamente determinemos la integral u_2:

$$u_2 = \int_0^l \int_0^{2\pi} (|\dot{H}_{\varphi r}|^2 + |\dot{H}_{zr}|^2) r_0 \, d\varphi \, dz \,|_{r=r_0} + \\ + 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (|\dot{H}_{rr}|^2 + |\dot{H}_{\varphi r}|^2) r \, d\varphi \, dr \,|_{z=0} = \\ = \int_0^l \int_0^{2\pi} \left\{4 \frac{p^2\pi^2 r_0^4}{l^2 r_0^2 \mu_{mn}^4} C_2^2 m^2 J_m^2(\mu_{mn}) \operatorname{sen}^2(m\varphi) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) + \right. \\ \left. + 4 C_2^2 J_m^2(\mu_{mn}) \cos^2(m\varphi) \operatorname{sen}^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right)\right\} r_0 \, d\varphi \, dz + \\ + 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \left\{4 \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2} C_2^2 J_m'^2\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \cos^2(m\varphi) + \right. \\ \left. + 4 \frac{p^2\pi^2 r_0^4}{l^2 r^2 \mu_{mn}^4} C_2^2 m^2 J_m^2\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \operatorname{sen}^2(m\varphi)\right\} r \, d\varphi \, dr = \\ = 4 \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^4} C_2^2 m^2 J_m^2(\mu_{mn}) \frac{\pi l}{2} + 4 C_2^2 J_m^2(\mu_{mn}) r_0 \frac{\pi l}{2} + \\ + 8\pi \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2} C_2^2 \int_0^{r_0} \left\{\frac{r_0^2 m^2}{r^2 \mu_{mn}^2} J_m^2\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) + J'^2\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right)\right\} r \, dr.$$

En correspondencia con la expresión (II.28) hagamos la sustitución de las variables y llevemos a cabo algunas transformaciones:

$$u_2 = 2C_2^2 r_0 \pi l J_m^2(\mu_{mn}) \left(1 + \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^4} m^2\right) + \\ + 8\pi \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2} C_2^2 r_0^2 \int_0^1 \left\{\frac{m^2}{x^2\mu_{mn}^2} J_m^2(\mu_{mn}x) + J_m'^2(\mu_{mn}x)\right\} x \, dx.$$

La integral obtenida es análoga a la integral (II.29) cuya solución corresponde a la fórmula (II 42). Como resultado, la expresión para u_2

toma la forma

$$u_2 = 2C_2^2 r_0 \pi l J_m^2(\mu_{mn}) \left(1 + \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^4} m^2\right) +$$
$$+ 8\pi \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2} C_2^2 \frac{r_0^2}{2} \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right) J_m^2(\mu_{mn}),$$

o bien, de otra manera,

$$u_2 = 2C_2^2 r_0 \pi J_m^2(\mu_{mn}) \left\{l\left(1 + \frac{p^2\pi^2 r_0^2 m^2}{l^2\mu_{mn}^4}\right) + \right.$$
$$\left. + 2\frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2} r_0 \left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right)\right\}. \qquad (II.28)$$

Al sustituir el valor de las integrales (III 27) y (III.28) en la fórmula (III.2), obtenemos

$$Q_{H_{mnp}} = \alpha_4 \times$$
$$\times \frac{lr_0\left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right)\left(1 + \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2}\right)}{2\left\{l\left(1 + \frac{p^2\pi^2 r_0^2 m^2}{l^2\mu_{mn}^4}\right) + 2\frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{mn}^2} r_0\left(1 - \frac{m^2}{\mu_{mn}^2}\right)\right\}}. \qquad (III.29)$$

Determinemos el factor de mérito del resonador de cavidad cilíndrico en el caso de ondas del tipo H_{mnp}. Para $m = 0$ las componentes del campo magnético en el resonador pueden representarse en la forma

$$\dot{H}_{rr} = -2j \frac{p\pi r_0}{l\mu_{0n}} C_2' J_0'\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right), \qquad (III.30)$$

$$\dot{H}_{zr} = -2jC_2' J_0\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r\right) \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{l} z\right). \qquad (III.31)$$

Hallemos la integral u_1:

$$u_1 = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (|\dot{H}_{rr}|^2 + |\dot{H}_{zr}|^2)\, r\, dr\, d\varphi\, dz =$$
$$= \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \left\{4\frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{0n}^2} C_2^2 J_m'^2\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r\right) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) + \right.$$
$$\left. + 4C_2^2 J_0^2\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right)\right\} r\, dr\, d\varphi\, dz.$$

Al realizar la integración y hacer la sustitución de las variables de acuerdo con la fórmula (II.18), obtenemos

$$u_1 = \pi l 4C_2^2 r_0^2 \int_0^1 \left\{\frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2\mu_{0n}^2} J_0'^2(\mu_{0n}x) + J_0^2(\mu_{0n}x)\right\} x\, dx.$$

En correspondencia con la relación recurrente $J_0^2(z) = J_1^2(z)$, la expresión para u_1 puede transformarse en cierto grado:

$$u_1 = 4\pi l C_2^2 r_0^2 \int_0^1 \left\{ \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} J_1^2(\mu_{0n}x) + J_0^2(\mu_{0n}x) \right\} x\, dx.$$

La integral u_1 puede calcularse por medio de la fórmula (II.32):

$$u_1 = 4\pi l C_2^2 r_0^2 \left\langle \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} \cdot \frac{1}{2} \{ J_1^2(\mu_{0n}) - J_0(\mu_{0n}) J_2(\mu_{0n}) \} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \{ J_0^2(\mu_{0n}) - J_{-1}(\mu_{0n}) J_1(\mu_{0n}) \} \right\rangle. \qquad \text{(III.32)}$$

Para las funciones de Bessel es justa la relación recurrente

$$z \frac{d}{dz} J_m(z) - m J_m(z) = -z J_{m+1}(z). \qquad \text{(III.33)}$$

Cuando $m = 0$, de la anterior se infiere que

$$J_0'(z) = -J_1(z),$$

$$J_0'(\mu_{0n}) = -J_1(\mu_{0n}) = 0. \qquad \text{(III.34)}$$

Luego, hagamos uso de la relación

$$J_{m+2}(\mu_{mn}) J_m(\mu_{mn}) = \frac{2(m+1)}{\mu_{mn}} J_{m+1}(\mu_{mn}) J_m(\mu_{mn}) - J_m^2(\mu_{mn}), \qquad \text{(II.35)}$$

la cual, para $m = 0$, se escribe en la forma

$$J_2(\mu_{0n}) J_0(\mu_{0n}) = \frac{2}{\mu_{0n}} J_1(\mu_{0n}) J_0(\mu_{0n}) - J_0^2(\mu_{0n}),$$

o bien, en virtud del carácter justo de la igualdad (III 34)

$$J_2(\mu_{0n}) J_0(\mu_{0n}) = -J_0^2(\mu_{0n}). \qquad \text{(III.35)}$$

Teniendo en cuenta las fórmulas (III.34) y (III.35), obtenemos en la expresión (III 32)

$$u_1 = 4\pi l C_2^2 r_0^2 \left\{ \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} \cdot \frac{1}{2} J_0^2(\mu_{0n}) + \frac{1}{2} J_0^2(\mu_{0n}) \right\} -$$

$$= 2\pi l C_2^2 r_0^2 J_0^2(\mu_{0n}) \left(\frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} + 1 \right). \qquad \text{(III.36)}$$

Hallemos la integral u_2:

$$u_2 = \int_0^l \int_0^{2\pi} |\dot{H}_{zr}|^2 r_0 \, d\varphi \, dz \,|_{r=r_0} + 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} |\dot{H}_{zr}|^2 r \, d\varphi \, dr \,|_{z=0} =$$

$$= \int_0^l \int_0^{2\pi} 4C_2^2 J_0^2(\mu_{0n}) \operatorname{sen}^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) r_0 \, d\varphi \, dz +$$

$$+ 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} 4 \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} C_2^2 J_0'^2\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r\right) r \, d\varphi \, dr =$$

$$= 4\pi l C_2^2 J_1^2(\mu_{0n}) r_0 + 16\pi \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} C_2^2 \int_0^{r_0} J_1'^2\left(\frac{\mu_{0n}}{r_0} r\right) r \, dr.$$

Al hacer la sustitución de las variables y de la derivada de las funciones de Bessel, se obtiene

$$u_2 = 4\pi l C_2^2 J_1^2(\mu_{0n}) r_0 + 16\pi \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} C_2^2 r_0^2 \times$$

$$\times \int_0^1 J_1^2(\mu_{0n} x) x \, dx = 4\pi l C_2^2 J_1^2(\mu_{0n}) r_0 +$$

$$+ 16\pi \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} C_2^2 r_0^2 \frac{1}{2} \{J_1^2(\mu_{0n}) - J_0(\mu_{0n}) J_2(\mu_{0n})\} =$$

$$= 4\pi l C_2^2 J_0^2(\mu_{0n}) r_0 + 8\pi \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} C_2^2 r_0^2 J_0^2(\mu_{0n}),$$

$$u_2 = 4\pi C_2^2 r_0 J_0^2(\mu_{0n}) \left(l + 2 \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2}\right). \qquad \text{(III.37)}$$

Sustituyamos los valores de las integrales (III.36) y (III.37) en la fórmula (III.2). Entonces

$$Q_{H_{0np}} = \frac{\alpha_s}{4} \cdot \frac{l r_0 \left(\frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2} + 1\right)}{l + 2 \frac{p^2\pi^2 r_0^2}{l^2 \mu_{0n}^2}}. \qquad \text{(III.38)}$$

§ III.4. Determinación de los factores de mérito de los resonadores de cavidad cilíndricos en el caso de ondas del tipo eléctrico

En el caso de ondas del tipo eléctrico las componentes del campo magnético en un resonador de cavidad cilíndrico se determinan mediante las expresiones (22.12)—(22.14).

Deduzcamos la expresión para el factor de mérito del resonador cuando se trata de ondas del tipo E_{mnp}.

Hallemos la integral

$$u_1 = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (|\dot{H}_{rr}|^2 + |\dot{H}_{\varphi r}|^2)\, r\, dr\, d\varphi\, dz =$$

$$= \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \left\{ 4 \frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{r^2 \eta_{mn}^4} C_1^2 m^2 J_m^2 \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \operatorname{sen}^2 (m\varphi) \times \right.$$

$$\times \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) + 4 \frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 J_m'^2 \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \cos^2 (m\varphi) \times$$

$$\left. \times \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) \right\} r\, dr\, d\varphi\, dz =$$

$$= 4 \frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 \frac{\pi l}{2} r_0^2 \int_0^1 \left\{ \frac{m^2}{x^2 \eta_{mn}^2} J_m^2 (\eta_{mn} x) + J_m'^2 (\eta_{mn} x) \right\} x\, dx.$$

La integral obtenida es análoga, por su expresión matemática, a la integral (II.58). La solución de dicha integral viene dada por la fórmula (II.62), y, teniendo en cuenta esta última, se puede escribir

$$u_1 = 4 \frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 \frac{\pi l}{2} \cdot \frac{r_0^2}{2} J_m'^2 (\eta_{mn}) = \frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 \pi l J_m'^2 (\eta_{mn}). \qquad \text{(III.39)}$$

Determinemos la integral u_2:

$$u_2 = \int_0^l \int_0^{2\pi} |\dot{H}_{\varphi r}|^2 r_0\, d\varphi\, dz\, |_{r=r_0} +$$

$$+ 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (|\dot{H}_{rr}|^2 + \dot{H}_{\varphi r}{}^2)\, r\, d\varphi\, dz\, |_{z=0} =$$

$$= \int_0^l \int_0^{2\pi} 4 \frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 J_m'^2 (\eta_{mn}) \cos^2 (m\varphi) \cos^2 \left(\frac{p\pi}{l} z \right) r_0\, d\varphi\, dz +$$

$$+ 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \left\{ 4 \frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{r^2 \eta_{mn}^4} C_1^2 m^2 J_m^2 \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \operatorname{sen}^2 (m\varphi) + \right.$$

$$\left. + 4 \frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 J_m'^2 \left(\frac{\eta_{mn}}{r_0} r \right) \cos^2 (m\varphi) \right\} r\, d\varphi\, dr$$

$$= 4 \frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 J_m'^2 (\eta_{mn}) \frac{l\pi}{2} r_0 +$$

$$+ 8 \frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 \pi r_0^2 \int_0^1 \left\{ \frac{m^2}{x^2 \eta_{mn}^2} J_m^2 (\eta_{mn} x) + J_m'^2 (\eta_{mn} x) \right\} \times$$

$$\times x\, dx = 2 \frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1^2 J_m'^2 (\eta_{mn})\, l\pi r_0 + 8 \frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{mn}^2} C_1 \pi \frac{r_0^2}{2} J_m'^2 (\eta_{mn}).$$

o bien, definitivamente,

$$u_2 = 2\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^3}{\eta_{mn}^2} C_1^2 \pi J_m'^2(\eta_{mn})(l + 2r_0). \qquad \text{(III.40)}$$

Después de sustituir las expresiones (III.39) y (III.40) en la fórmula (III.2) se obtiene la correlación

$$Q_{E_{mnp}} = \frac{\alpha_s}{2} \cdot \frac{r_0 l}{l + 2r_0}. \qquad \text{(III.41)}$$

Hallemos el factor de calidad de los resonadores cuando se trata de ondas del tipo E_{0np}. Para $m = 0$ existe tan sólo una componente del campo magnético en el resonador:

$$\dot{H}_{0r} = -2j\frac{\omega_r \varepsilon_a r_0}{\eta_{0n}} C_1 J_0'\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right). \qquad \text{(III.42)}$$

Determinemos la integral u_1:

$$u_1 = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} |\dot{H}_{0r}|^2 r\, dr\, d\varphi\, dz =$$

$$= \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} 4\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) r\, dr\, d\varphi\, dz =$$

$$= 4\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi l r_0^2 \int_0^1 J_0'^2(\eta_{0n} x)\, x\, dx.$$

Esta integral es análoga por su forma a la integral (II.72) cuya solución se proporciona por la fórmula (II.73). Como resultado de aplicar la fórmula mencionada, se obtiene

$$u_1 = 2\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi l J_0'^2(\eta_{0n}). \qquad \text{(III.43)}$$

Hallemos la integral u_2.

$$u_2 = \int_0^l \int_0^{2\pi} |\dot{H}_{0r}|^2 r_0\, d\varphi\, dz\,|_{r=r_0} + 2\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} |\dot{H}_{0r}|^2 r\, d\varphi\, dr\,|_{z=0} =$$

$$= \int_0^l \int_0^{2\pi} 4\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2(\eta_{0n}) \cos^2\left(\frac{p\pi}{l} z\right) r_0\, d\varphi\, dz +$$

$$+ 2\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} 4\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) r\, d\varphi\, dr =$$

$$= 4\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2(\eta_{0n}) \pi l r_0 + 8\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 2\pi r_0^2 \int_0^1 J_0'^2(\eta_{0n} x)\, x\, dx =$$

$$= 4\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2(\eta_{0n}) \pi l + 16\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi \frac{r_0^2}{2} J_0'^2(\eta_{0n}),$$

o bien, definitivamente,

$$u_2 = 4\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi J_0'^2(\eta_{0n})(l + 2r_0). \qquad \text{(III.44)}$$

Al sustituir las expresiones (III.43) y (III.44) en la fórmula (III.2), obtenemos la correlación para el factor de mérito en el caso de ondas del tipo E_{0np}:

$$Q_{E_{0np}} = \frac{\alpha_4}{2} \cdot \frac{r_0 l}{l + 2r_0}. \qquad \text{(III.45)}$$

Determinemos el factor de mérito de los resonadores de cavidad cilíndricos en el caso de ondas E_{0n0}. En este caso existe tan sólo una constante del campo magnético en el resonador:

$$\dot{H}_{qx} = -2j\frac{\omega_r \varepsilon_a r_0}{\eta_{0n}} C_1 J_0'\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right). \qquad \text{(III.46)}$$

Hallemos la integral u_1:

$$u_1 = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} 4\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) r\, dr\, d\varphi\, dz =$$

$$= 4\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 2\pi l r_0^2 \int_0^1 J_0'^2(\eta_{0n} x)\, x\, dx = 8\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi l \frac{r_0^2}{2} J_0'^2(\eta_{0n}),$$

o bien, definitivamente,

$$u_1 = 4\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi l J_0'^2(\eta_{0n}). \qquad \text{(III.47)}$$

Calculemos la integral u_2:

$$u_2 = \int_0^l \int_0^{2\pi} 4\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2(\eta_{0n})\, r_0\, d\varphi\, dz\,|_{r=r_0} +$$

$$+ 2\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} 4\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 J_0'^2\left(\frac{\eta_{0n}}{r_0} r\right) r\, dq\, dr =$$

$$4\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 2\pi l J_0'^2(\eta_{0n}) + 16\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} \cdot C_1^2 \pi r_0^2 \int_0^1 J_0'^2(\eta_{0n} x)\, x\, dx =$$

$$= 8\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi l J_0'^2(\eta_{0n}) + 16\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi \frac{r_0^2}{2} J_0'^2(\eta_{0n}),$$

o bien, definitivamente,

$$u_2 = 8\frac{\omega_r^2 \varepsilon_a^2 r_0^2}{\eta_{0n}^2} C_1^2 \pi J_0'^2(\eta_{0n})(l + r_0). \qquad \text{(III.48)}$$

Coloquemos las expresiones (III.47) y (III.48) en la fórmula (III.2):

$$Q_{E_{0n0}} = \frac{\alpha_4}{2} \cdot \frac{r_0 l}{l + r_0}. \qquad \text{(III.49)}$$

Ejemplos de cálculo de los coeficientes de amplitud de los campos electromagnéticos en guías de ondas y en resonadores de cavidad

§ IV.1. Ejemplo de cálculo del coeficiente de amplitud de la onda del tipo H_{10} en una guía de ondas rectangular

Supongamos que la excitación de la guía de ondas se realiza por medio de una corriente eléctrica extrínseca cuya densidad es igual a $\dot{J}_{e12}$. Se requiere hallar el coeficiente de amplitud $\dot{A}_1$ del campo electromagnético en la guía de ondas. La fundamental para el cálculo es la correlación (32.21)

$$\dot{A}_1 = \frac{\int\limits_{V_1} \dot{J}_{e12} \dot{E}_{-1}\, d\vec{V}}{\int\limits_{S_2} \{[\dot{E}_1 \dot{H}_{-1}] - [\dot{E}_{-1} \dot{H}_1]\}\, 1_z\, dS}.$$

En esta expresión $\dot{E}_1$, $\dot{H}_1$ representa el campo electromagnético que se propaga hacia el lado de los valores positivos del eje z de la guía de ondas, mientras que el campo $\dot{E}_{-1}$, $\dot{H}_{-1}$ se propaga en dirección opuesta. Las componentes del campo de la onda del tipo H_{10} pueden determinarse a partir de las expresiones generales (13.52)—(13.57).

Al utilizar las expresiones para las componentes del campo en la fórmula (32.21) cabe recordar que el coeficiente de amplitud C_2 debe ser igual a una unidad. De conformidad con lo expuesto se pueden escribir las siguientes expresiones para las componentes del campo de la onda del tipo H_{10}:

$$\dot{H}_x = j \frac{h}{g\dot{l}_0} \cdot \frac{\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \qquad \text{(IV.1)}$$

$$\dot{H}_z = \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-jhz}, \qquad \text{(IV.2)}$$

$$\dot{E}_y = -j \frac{\omega \mu_a}{g\dot{l}_0} \cdot \frac{\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{jhz}. \qquad \text{(IV.3)}$$

Bajo la integral del denominador de la expresión (32.21) los productos vectoriales se multiplican escalarmente por 1_z. El producto escalar será distinto de cero si en los productos vectoriales participan las componentes del campo $\dot{H}_x$ y $\dot{E}_y$. En virtud de lo dicho

conviene escribir

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\mathbf{E}}_1 &= \mathbf{E}_y = -1_y j \frac{\omega\mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-jhz}, \\
\dot{\mathbf{H}}_1 &= \dot{\mathbf{H}}_x = 1_x j \frac{h}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-jhz}, \\
\dot{\mathbf{E}}_{-1} &= -1_y j \frac{\omega\mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{jhz}, \\
\dot{\mathbf{H}}_{-1} &= -1_x j \frac{h}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{jhz}.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV.4)}$$

En la escritura del campo $\dot{\mathbf{E}}_{-1}$, $\dot{\mathbf{H}}_{-1}$ se ha cambiado el signo del número de onda longitudinal h en la guía de ondas como en una onda que se propaga en dirección de los valores negativos del eje z.

La integral en el denominador de la expresión (32.21) se escribe en la forma

$$\int_{S_\infty} \{[\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_{-1}] - [\dot{\mathbf{E}}_{-1} \dot{\mathbf{H}}_1]\} 1_z \, dS =$$

$$= \int_0^b \int_0^a 2 \frac{\omega\mu_a h}{g_{10}^2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx\, dy = \frac{\omega\mu_a h}{g_{10}^2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 ab. \qquad \text{(IV.5)}$$

Para calcular la integral en el numerador de la expresión (32.21) es necesario plantearse la distribución de la densidad de la corriente $\dot{\mathbf{J}}_{e12}$. Supongamos que la excitación de la guía de ondas se efectúa por medio de un vástago corto de longitud l dispuesto en el centro de la parte ancha de la guía de ondas, en la sección $x = a/2$, $z = 0$.

Luego supongamos que la densidad de la corriente $\dot{\mathbf{J}}_{e12}$ es invariable a lo largo de la longitud del vástago. En estas condiciones, la integral en el numerador de la expresión (32.21) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{e12} \dot{\mathbf{E}}_{-1} \, dV = \int_0^l \int_{S_1} \dot{\mathbf{J}}_{e12} \dot{\mathbf{E}}_{-1} \, dS \, dl,$$

donde S_1 es el área de la sección transversal del vástago, o bien, teniendo en cuenta la constancia de la densidad de la corriente

$$\int_{V_1} \dot{\mathbf{J}}_{e12} \dot{\mathbf{E}}_{-1} \, dV = \int_0^l \dot{I}_{e12} \dot{\mathbf{E}}_{-1}\big|_{x=a/2} dy =$$

$$= I_{e12} \int_0^l j \frac{\omega\mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \, dy = -I_{e12} j \frac{\omega\mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} l. \qquad \text{(IV.6)}$$

Al sustituir las expresiones (IV.5) y (IV.6) en la fórmula (32.21), obtenemos la relación para el coeficiente de amplitud del campo en

una guía de ondas rectangular:

$$\dot{A}_1 = \frac{-I_{el} j \frac{\omega \mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} l}{\frac{\omega \mu_a h}{g_{10}^4} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 ab},$$

o bien

$$\dot{A}_1 = -j \frac{\dot{I}_{el} l \varkappa_{10}^2}{\pi b h}. \qquad \text{(IV.7)}$$

§ IV.2. Ejemplo de cálculo del coeficiente de amplitud de la onda del tipo H_{101} en un resonador de cavidad rectangular

En el cálculo se utiliza como fundamental la expresión (33.44):

$$\dot{A}_{orp} = \frac{Q \int\limits_{V_1} \dot{J}_{el} \dot{E}_0^* \, dV}{\omega_r \varepsilon_a \int\limits_{V_1} |\dot{E}_0|^2 \, dV},$$

que da el valor del coeficiente de amplitud del campo en la resonancia.

Deduzcamos empleando las fórmulas (21.29)—(21.34) la expresión para la intensidad del campo eléctrico en el resonador cuando se trata de la onda del tipo H_{101}:

$$E_{yr} = -\frac{\omega_r \mu_a}{g_{10}^2} C_2 \frac{\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} z\right).$$

Supongamos que la excitación del resonador se efectúa mediante un vástago corto de longitud l, cuya densidad de la corriente $\dot{J}_{el}$ es invariable a lo largo de la longitud del vástago. El vástago está situado en la sección $x = a/2$, $z = l/2$.

Calculemos la integral en el numerador de la expresión (33.44), suponiendo que $C_2 = 1$:

$$\int\limits_{V_1} \dot{J}_{el} \dot{E}_0^* \, dV = -\int\limits_0^l \int\limits_{S_1} \dot{J}_{el} \frac{\omega_r \mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \, dS \, dl = -\dot{I}_{el} \frac{\omega_r \mu_a}{g_{10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} l. \qquad \text{(IV.9)}$$

Hallemos la integral en el denominador de la expresión (33.44):

$$\int\limits_{V_1} |\dot{E}_0|^2 \, dV = \int\limits_0^l \int\limits_0^b \int\limits_0^a \frac{\omega_r^2 \mu_a^2}{g_{10}^4} \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{l} z\right) dx \, dy \, dz =$$

$$= \frac{\omega_r^2 \mu_a^2}{g_{10}^4} \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \cdot \frac{abl}{4}. \qquad \text{(IV.10)}$$

Sustituyamos las expresiones (IV.9) y (IV.10) en la fórmula (33.44):

$$\dot{A}_{qrp} = \frac{Q\dot{I}_{el}\,\frac{\omega_r\mu_a}{g^2_{10}}\cdot\frac{\pi}{a}\,l}{\omega_r\varepsilon_a\,\frac{\omega^2_r\mu^2_a}{g^4_{10}}\cdot\frac{\pi^2}{a^2}\cdot\frac{abl}{4}},$$

o bien, definitivamente,

$$\dot{A}_{qrp} = \frac{Q\dot{I}_{el}}{\frac{\omega^2_r\mu_a\varepsilon_a}{g^2_{10}}\cdot\frac{\pi}{a}\cdot\frac{ab}{4}}. \qquad \text{(IV.11)}$$

APÉNDICE V

Ejemplos concretos de aplicación del principio de semejanza electrodinámica

Ejemplo 1. Examinemos un caso sencillo en que el problema electrodinámico se simula en ausencia de corrientes eléctrica y magnética extrínsecas. Supongamos que durante la simulación se desea obtener los valores de los campos eléctrico y magnético coincidentes con el problema natural. Supongamos además que las conductibilidades eléctrica y magnética de los medios en el problema natural y en el de simulación son iguales a cero, mientras que la permitividad y la permeabilidad magnética del problema natural son iguales, respectivamente a la permitividad y la permeabilidad magnética del problema de simulación. En estas condiciones, de acuerdo con las igualdades (36 1) deben observarse las siguientes relaciones:

$$\beta'_1 = \beta''_1, \quad \beta'_2 = \beta''_2, \quad \beta'_3 = \beta''_3 = \beta'_4 = \beta''_4 = \beta'_5 = \beta''_5 = \beta'_7 = \beta''_7 = 0.$$
$$\beta'_8 = \beta''_8, \quad \beta'_9 = \beta''_9, \quad a'_6 = a''_6, \quad a'_8 = a''_8. \qquad \text{(V.1)}$$

Sobre la base de las expresiones (36.6) serán justas las igualdades

$$C'_1 - C''_1 = C'_2 = C''_2 = C'_6 = C''_6 - C'_8 = C''_8 = 0. \qquad \text{(V.2)}$$

Entonces, las condiciones de semejanza (36.10) se escribirán en la forma

$$C'_3 = C''_3, \quad C'_6 = C''_6, \qquad \text{(V.3)}$$

o bien, de otra forma,

$$\frac{\beta'_6\beta'_2\beta'_9 a'_6}{\beta'_{10}\beta'_1} = \frac{\beta''_6\beta''_2\beta''_9 a''_6}{\beta''_{10}\beta''_1}, \quad \frac{\beta'_6\beta'_1\beta'_9 a'_8}{\beta'_{10}\beta'_2} = \frac{\beta''_6\beta''_1\beta''_9 a''_8}{\beta''_{10}\beta''_2}. \qquad \text{(V.4)}$$

Teniendo en cuenta las igualdades (V.1) estas expresiones pueden presentarse en forma simplificada:

$$\beta'_9/\beta'_{10} = \beta''_9/\beta''_{10}, \quad \beta'_9/\beta'_{10} = \beta''_9/\beta''_{10}. \tag{V.5}$$

De este modo, en el caso considerado, dos condiciones de semejanza (V 4) se reducen a una sola De acuerdo con las expresiones (26 1) los coeficientes β'_9 y β''_9 definen las dimensiones lineales de los problemas natural y de simulación, mientras que los coeficientes β'_{10} y β''_{10} definen las escalas de tiempo. Si a estos coeficientes se atribuyen los valores de los períodos de oscilación T' y T'' en los problemas natural y de simulación, las condiciones de semejanza deben escribirse de la siguiente manera:

$$\beta'_9/T' = \beta''_9/T'',$$

o bien

$$T''/T' = \beta''_9/\beta'_9. \tag{V.6}$$

Puesto que $T' = 1/f'$, $T'' = 1/f''$, donde f', f'' son las frecuencias de las oscilaciones en los problemas natural y de simulación, las condiciones de semejanza (V.6) pueden representarse en la forma

$$f'/f'' = \beta''_9/\beta'_9. \tag{V.7}$$

En consecuencia, si la frecuencia f'' en el problema de simulación es n veces mayor que la frecuencia f' en el problema natural, resulta que las dimensiones lineales del sistema electrodinámico en el problema simulador determinadas por el coeficiente β''_9, deben ser n veces menores que las correspondientes dimensiones lineales del problema natural.

Ejemplo 2. Analicemos un caso más complicado en que el medio del problema natural posee conductibilidad eléctrica. Todas las demás condiciones son análogas a las condiciones dadas en el ejemplo 1.

Al determinar las condiciones de semejanza son iniciales las igualdades

$$\beta'_1 = \beta''_1, \quad \beta'_2 = \beta''_2, \quad \beta'_3 = \beta''_3 = \beta'_4 = \beta''_4 = \beta'_7 = \beta''_7 = 0, \quad \beta'_6 = \beta''_6,$$
$$a'_5 = a''_5, \quad a'_8 = a''_8, \quad \beta'_8 = \beta''_8, \quad a'_9 = a''_9. \tag{V.8}$$

En este caso

$$C'_1 = C''_1 = C'_6 = C'_4 = C'_5 = C''_5 = 0. \tag{V.9}$$

y las condiciones de semejanza se escriben en la forma

$$C'_2 = C''_2, \quad C'_3 = C''_3, \quad C'_6 = C''_6, \tag{V.10}$$

o, de una manera distinta,

$$\frac{\beta'_5\beta'_2\beta'_9 a'_5}{\beta'_1} = \frac{\beta''_5\beta''_2\beta''_9 a''_5}{\beta''_1},$$
$$\frac{\beta'_6\beta'_3\beta'_9 a'_5}{\beta'_{10}\beta'_1} = \frac{\beta''_6\beta''_3\beta''_9 a''_5}{\beta''_{10}\beta''_1}, \tag{V.11}$$
$$\frac{\beta'_9\beta'_1\beta'_9 a'_5}{\beta'_{10}\beta'_2} = \frac{\beta''_9\beta''_1\beta''_9 a''_5}{\beta''_{10}\beta''_2}.$$

Valiéndose de las relaciones (V.8), estas condiciones pueden representarse en la forma

$$\beta'_0\beta''_0 = \beta''_0\beta''_0, \quad \beta'_0/\beta'_{10} = \beta''_0/\beta''_{10}, \quad \beta'_0/\beta'_{10} = \beta''_0/\beta''_{10}. \qquad (V.12)$$

De este modo, en el caso dado a las condiciones anteriores (V.5) se han añadido nuevas condiciones que vienen definidas por la primera igualdad de (V.12). Si, como se ha hecho antes, a los coeficientes β_{10} se atribuye el valor del período de oscilación, a las condiciones de semejanza anteriores se añaden nuevas condiciones:

$$\beta'_0/\beta''_0 = \beta''_0/\beta'_0 = \beta''_{10}/\beta'_{10},$$

que pueden representarse en la forma

$$\beta'_0/\beta''_0 = T''/T' = f'/f''. \qquad (V.13)$$

Entonces, las condiciones totales de semejanza electrodinámica serán

$$\beta'_0/\beta''_0 = f''/f', \quad \beta'_0/\beta''_0 = f'/f''. \qquad (V.14)$$

En el caso de un medio conductor en el problema de simulación deben cambiarse no sólo las condiciones lineales del sistema electrodinámico, sino también la conductibilidad del medio simulador. De manera análoga pueden examinarse también las condiciones de semejanza en problemas más complejos.

APÉNDICE VI

Cálculo de las resistencias de radiación de los dispositivos excitadores en las guías de ondas. Cálculo de resistensias de entrada de los resonadores de cavidad

§ VI.1. Cálculo de las resistencias de radiación de los dispositivos excitadores en las guías de ondas

En el § 32.4 se ha descrito la metología de la determinación de los coeficientes de amplitud del campo excitado en guías de ondas por el sistema dado de corrientes extrínsecas. Se han obtenido las expresiones (32.19) y (32.21) que permiten determinar los coeficientes de amplitud de las ondas del tipo prefijado que se propagan hacia el lado de los valores negativos y positivos del eje z. Hallemos el

valor promediado por el período de oscilación, de la potencia del campo electromagnético P_{med} que pasa a través de la sección transversal de la guía de ondas S_g:

$$P_{med} = \int_{S_g} \dot{\Pi}_{Re}\, dS. \qquad \text{(VI.1)}$$

Haciendo uso de la expresión (4.29) para $\dot{\Pi}_{Re}$, obtenemos

$$P_{med} = 1/2 \int_{S_g} \mathrm{Re}\,[\dot{E}\dot{H}^*]\, dS.$$

La onda se propaga desde el dispositivo excitador hacia los lados de los valores positivos y negativos del eje z. Por consiguiente, la potencia total de radiación P_{rad} creada por el dispositivo excitador es igual al valor duplicado de P_{med}:

$$P_{rad} = \int_{S_g} \mathrm{Re}\,[\dot{E}\dot{H}^*]\, dS. \qquad \text{(VI.2)}$$

Esta potencia puede ser determinada sustituyendo en la expresión para las componentes del campo los coeficientes de amplitud definidos por las fórmulas (32.19) y (32 21). Esta misma potencia puede expresarse por medio de la resistencia de radiación del dispositivo excitador R_{rad} y la corriente $\dot{I}_{el}$ que circula en el dispositivo excitador (vástago o bucle):

$$|P_{rad}| = \frac{|\dot{I}_{el}|^2 R_{rad}}{2}. \qquad \text{(VI.3)}$$

Al igualar las expresiones (VI.2) y (VI.3) determinamos R_{rad}:

$$R_{rad} = \left| \frac{2 \int_{S_g} \mathrm{Re}\,[\dot{E}\dot{H}^*]\, dS}{\dot{I}_{el}^2} \right|. \qquad \text{(VI.4)}$$

Enseñemos la aplicación de la fórmula obtenida en el ejemplo de excitación de la onda del tipo H_{10} en una guía de ondas rectangular por medio de un vástago corto, de longitud l, situado en la sección $z = 0$; $x = a/2$:

$$P_{rad} = \int_{S_g} \mathrm{Re}\,[\dot{E}_y \dot{H}_x^*]\, 1_z\, dS =$$

$$= \int_0^b \int_0^a \mathrm{Re}\,[1_y \dot{E}_y 1_x \dot{H}_x^*]\, 1_z\, dx\, dy = -\int_0^b \int_0^a \mathrm{Re}\,(\dot{E}_y \dot{H}_x^*)\, dx\, dy.$$

Haciendo uso de las expresiones (13.83)—(13.88) para las componentes del campo de la onda del tipo H_{10} se puede escribir

$$\dot{E}_y = -j\frac{\omega\mu_a}{g_{10}^2} C_2 \frac{\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\dot{h}z}, \qquad \text{(VI.5)}$$

$$\dot{H}_x^* = -j\frac{\dot{h}}{g_{10}^2} C_2 \frac{\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\right) e^{+j\dot{h}z}. \qquad \text{(VI.6)}$$

El coeficiente de amplitud C_2 fue hallado en el § IV.1, designándolo A_1:

$$C_2 = A_1, \qquad \text{(VI.7)}$$

y definido por la fórmula (IV.7).

Sustituyamos la expresión para el coeficiente de amplitud en las fórmulas (VI.5) y (VI.6):

$$\dot{E}_y = -\frac{\omega\mu_a}{ab\dot{h}} I_{el} l \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\dot{h}z},$$

$$\dot{H}_x^* = -\frac{\dot{I}_{el} l}{ab} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{j\dot{h}z},$$

$$|P_{rad}| = \frac{\omega\mu_a |\dot{I}_{el}|^2 l^2}{a^2 b^2 h} \int_0^b \int_0^a \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx\, dy = \frac{\omega\mu_a |\dot{I}_{el}|^2 l^2}{2abh}. \qquad \text{(VI.8)}$$

Valiéndonos de la fórmula (VI.3) obtenemos la expresión para R_{rad}:

$$R_{rad} = \frac{\omega\mu_a l^2}{abh}. \qquad \text{(VI.9)}$$

§ VI.2. Cálculo de las resistencias de entrada de los resonadores de cavidad

Supongamos que en calidad de dispositivo excitador se utiliza un vástago corto de longitud l. En el § 33.3 se ha ofrecido el método para determinar los coeficientes de amplitud de ondas de diferentes tipos. Por consiguiente, se conoce el campo $\dot{E}$ tanto en la frecuencia de resonancia, como en las frecuencias distintas de la de resonancia. Si se presciende de la resistencia activa, se puede determinar la diferencia de potencial $\dot{U}$ en la entrada del dispositivo excitador, recurriendo a la relación

$$\dot{U} = \int_0^l \dot{E}\, dl. \qquad \text{(VI.10)}$$

En el vástago corto circula la corriente I_{el}. La resistencia de entrada del dispositivo excitador es

$$Z_{ent} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_{el}} = \frac{\int_0^l \dot{E}\, dl}{\dot{I}_{el}}. \qquad \text{(V.11)}$$

Expliquemos lo expuesto en el ejemplo de cálculo de la resistencia de entrada de un resonador de cavidad rectangular en el cual se ha excitado la onda del tipo H_{101}. Supongamos que la excitación del resonador se efectúa mediante un vástago corto de longitud l cuya densidad de la corriente es invariable a lo largo del vástago. El vástago está situado en la sección $x = a/2$; $z = l/2$ y orientado a lo largo del eje y. En el caso de onda del tipo H_{101} en el resonador existe tan sólo una componente del campo eléctrico definida por la fórmula (21.33):

$$\dot{E}_{yr} = -2\frac{\omega_r \mu_a}{g_{10}^2} C_2 \frac{\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} z\right). \qquad \text{(VI.12)}$$

En la sección $x = a/2$; $z = l/2$ esta fórmula puede representarse de la siguiente manera:

$$\dot{E}_{yr} = -2\frac{\omega_r \mu_a}{g_{10}^2} C_2 \frac{\pi}{a}. \qquad \text{(VI.13)}$$

La diferencia de potencial es

$$\dot{U} = -\int_0^l \dot{E}_{yr}\, dy = 2\frac{\omega_r \mu_a}{g_{10}^2} C_2 \frac{\pi}{a} l. \qquad \text{(VI.14)}$$

En el § IV.2 se ha dado el cálculo del coeficiente de amplitud de la onda del tipo H_{101} en un resonador de cavidad rectangular, el cual se ha designado por $\dot{A}_{qrp}$:

$$\dot{A}_{qrp} = C_2.$$

Al sustituir la expresión para $\dot{A}_{qrp}$, tomada de la fórmula (IV.11), en la expresión (VI.14), obtenemos:

$$\dot{U} = 2\frac{\omega_r \mu_a}{g_{10}^2} \frac{\pi}{a} l \frac{Q\dot{I}_{el} g_{10}^2 ab}{\omega_r^2 \mu_a \varepsilon_a \pi ab},$$

$$\dot{U} = 8\frac{Ql\dot{I}_{el}}{\omega_r \varepsilon_a ab}. \qquad \text{(VI.15)}$$

La resistencia de entrada es

$$Z_{ent} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_{el}} = 8\frac{Ql}{\omega_r \varepsilon_a ab}. \qquad \text{(VI.16)}$$

APÉNDICE VII

Determinación del factor de mérito de los resonadores cargados

En el § 25.2 la fórmula (25.2) define la expresión general para el factor Q del resonador no cargado:

$$Q = 2\pi f_r \frac{W}{P_{\text{pérΣ}}}.$$

Si el resonador está cargado, entonces, a la potencia media de pérdidas en el resonador $P_{\text{pérΣ}}$ debe añadirse la potencia media que el resonador entrega para la carga P_{car}. En este caso la expresión para el factor de mérito (factor Q) del resonador cargado se escribe en la forma

$$Q_{\text{car}} = \omega_r \frac{W}{P_{\text{pérΣ}} + P_{\text{car}}} = \omega_r \frac{W}{P_{\text{pérΣ}}} \frac{1}{1 + P_{\text{car}}/P_{\text{pérΣ}}} = Q \frac{1}{1 + P_{\text{car}}/P_{\text{pérΣ}}}. \tag{VII.1}$$

Supongamos que el resonador de cavidad está conectado al manantial de oscilaciones de alta frecuencia que posee la resistencia interna R_{car}. Supongamos, además, que la diferencia de potencial en la entrada del resonador cargado es igual a $\dot{U}$.

Cuando la frecuencia de oscilaciones del manantial es igual a la frecuencia de resonancia del resonador de cavidad, su resistencia de entrada es activa y, en el caso particular del resonador rectangular con la onda del tipo H_{101}, viene determinada por la fórmula (VI.16). En este caso la potencia de las pérdidas en el resonador es

$$P_{\text{pérΣ}} = \frac{|\dot{U}|^2}{2R_{\text{ent}}}. \tag{VII.2}$$

La potencia que se pierde en la resistencia interna del manantial es:

$$P_{\text{car}} = \frac{|\dot{U}|^2}{2R_{\text{car}}}. \tag{VII.3}$$

La relación de estas potencias es

$$P_{\text{car}}/P_{\text{pérΣ}} = R_{\text{ent}}/R_{\text{car}}. \tag{VII.4}$$

El factor de mérito del resonador cargado, de acuerdo con la fórmula (VII.1), se determina por la expresión

$$Q_{\text{car}} = Q \frac{1}{1 + R_{\text{ent}}/R_{\text{car}}}. \tag{VII.5}$$

Para la resistencia de carga infinitamente grande $Q_{\text{car}} = Q$, siendo Q el factor de mérito del resonador no cargado. Cuando la resistencia de carga es igual a cero, $Q_{\text{car}} = 0$.

APENDICE VIII

Cálculo del campo de difracción de una onda plana en el orificio rectangular de una pantalla metálica ideal

Supongamos que se analiza el caso de incidencia normal de una onda plana sobre una pantalla plana infinita de conducción ideal en la cual hay un orificio rectangular cuyos lados son a (a lo largo del eje x) y b (a lo largo del eje y). Sea que el área del orificio es $ab = S_0$. Un problema semejante se ha planteado y examinado en el § 35.5, habiéndose hallado fórmulas que definen los campos de difracción $\dot{\mathbf{H}}_\Sigma$ y $\dot{\mathbf{E}}_\Sigma$:

$$\dot{\mathbf{H}}_\Sigma = \frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\left\langle \operatorname{rot}\left\{[1_z\dot{\mathbf{H}}_y]\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right\} + \frac{1}{j\omega\tilde{\mu}_a}\operatorname{grad}\operatorname{div}\left\{[\dot{\mathbf{E}}_x 1_z]\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right\} - \right.$$

$$\left. - j\omega\tilde{\varepsilon}_a[\dot{\mathbf{E}}_x 1_z]\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right\rangle dS,$$

$$\dot{\mathbf{E}}_\Sigma = \frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\left\langle \operatorname{rot}\left\{[1_z\mathbf{E}_x]\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right\} - \frac{1}{j\omega\tilde{\varepsilon}_a}\operatorname{grad}\operatorname{div}\left\{[\dot{\mathbf{H}}_y\mathbf{S}_z]\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right\} + \right.$$

$$\left. + j\omega\tilde{\mu}_a[\mathbf{H}_y 1_z]\frac{e^{-j\gamma r}}{r}\right\rangle dS.$$

Introduzcamos el sistema de coordenadas esféricas cuyo origen de coordenadas lo hacemos coincidir con el origen de coordenadas cartesianas en la fig. 35.3. Designemos con la letra R el radio-vector del punto de observación en que se determinan los campos $\dot{\mathbf{H}}_\Sigma$ y $\dot{\mathbf{E}}_\Sigma$. Mediante la letra ρ designemos el radio vector del punto de integración, entendiendo como tal la distancia desde el origen de coordenadas hasta el punto corriente de integración que se encuentra en el plano x, y dentro de los límites del orificio en la pantalla. El radio vector r que forma parte de las fórmulas para $\dot{\mathbf{H}}_\Sigma$ y $\dot{\mathbf{E}}_\Sigma$ representa la distancia entre el punto corriente de integración en el plano x, y y el punto de observación. Conforme a las fórmulas trigonométricas conocidas

$$r = \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\chi}, \qquad \text{(VIII.1)}$$

donde χ es el ángulo entre los radios-vectores R y ρ.

Desarrollemos la expresión (VIII.1) por las potencias ρ/R, o sea, de la fracción pequeña siendo grandes los valores de R:

$$r = R\sqrt{1+\frac{\rho^2}{R^2}-2\frac{\rho}{R}\cos\chi} =$$

$$= R\left(1-\frac{\rho}{R}\cos\chi+\frac{\rho^2}{2R^2}-\frac{\rho^3}{2R^3}\cos^2\chi+\frac{\rho^3}{2R^3}\cos\chi-\frac{\rho^4}{8R^4}+\ldots\right). \tag{VIII.2}$$

Denominemos zona lejana el dominio de tales distancias de R para las cuales llega a ser justa la desigualdad

$$\frac{\rho^2}{2R^2} \ll \frac{\rho}{R} \tag{VIII.3}$$

Entonces, en la zona lejana la fórmula (VIII.2) puede representarse en la forma

$$r \approx R\left(1-\frac{\rho}{R}\cos\chi\right) = R-\rho\cos\chi. \tag{VIII.4}$$

Respectivamente, en la zona lejana la función $\frac{e^{-j\gamma r}}{r}$ puede escribirse en la forma

$$\frac{e^{-j\gamma r}}{r} \approx \frac{e^{-j\gamma R}}{R}e^{j\gamma\rho\cos\chi}. \tag{VIII.5}$$

Anotemos las fórmulas (35.38) y (35.39) teniendo en cuenta la expresión (VIII.4) recordando que la integración por la superficie S_0 se realiza en las coordenadas del manantial del campo, mientras que la diferenciación, en las del punto de observación:

$$\dot{\mathbf{H}}_\Sigma = \frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\left\langle \operatorname{rot}\left\{[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{H}}_y]\frac{e^{-j\gamma R}}{R}e^{j\gamma\rho\cos\chi}\right\}+\right.$$

$$+\frac{1}{\bar{\omega}\bar{\mu}_a}\operatorname{grad}\operatorname{div}\left\{[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{E}}_x]\frac{e^{-j\gamma R}}{R}e^{j\gamma\rho\cos\chi}\right\}+$$

$$\left.+j\bar{\omega}\bar{\varepsilon}_a[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{E}}_x]\frac{e^{-j\gamma R}}{R}e^{j\gamma\rho\cos\chi}\right\rangle dS =$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left\langle \operatorname{rot}\left\{\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\int_{S_0}[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{H}}_y]e^{j\gamma\rho\cos\chi}\,dS\right\}\right\rangle +$$

$$+\frac{1}{4\pi\bar{\omega}\bar{\mu}_a}\left\langle \operatorname{grad}\operatorname{div}\left\{\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\int_{S_0}[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{E}}_x]e^{j\gamma\rho\cos\chi}\,dS\right\}\right\rangle +$$

$$+\frac{j\bar{\omega}\bar{\varepsilon}_a}{4\pi}\cdot\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\int_{S_0}[\mathbf{1}_z\dot{\mathbf{E}}_x]e^{j\gamma\rho\cos\chi}\,dS, \tag{VIII.6}$$

$$\dot{\mathbf{E}}_{\Sigma} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left\langle \operatorname{rot} \left\{ [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{E}}_x] \frac{e^{-j\gamma R}}{R} e^{j\gamma\rho\cos\chi} \right\} - \right.$$

$$- \frac{1}{\tilde{\omega}\varepsilon_a} \operatorname{grad} \operatorname{div} \left\{ [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{H}}_y] \frac{e^{-j\gamma R}}{R} e^{j\gamma\rho\cos\chi} \right\} -$$

$$\left. - j\omega\tilde{\mu}_a [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{H}}_y] \frac{e^{-j\gamma R}}{R} e^{j\gamma\rho\cos\chi} \right\rangle dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left\langle \operatorname{rot} \left\{ \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \int_{S_0} [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{E}}_x] e^{j\gamma\rho\cos\chi} dS \right\} \right\rangle -$$

$$- \frac{1}{4\pi\omega\tilde{\varepsilon}_a} \left\langle \operatorname{grad} \operatorname{div} \left\{ \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \int_{S_0} [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{H}}_y] e^{j\gamma\rho\cos\chi} dS \right\} \right\rangle -$$

$$- \frac{j\omega\mu_a}{4\pi} \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \int_{S_0} [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{H}}_y] e^{j\gamma\rho\cos\chi} dS. \qquad \text{(VIII.7)}$$

Para hacer más simple la notación introduzcamos las designaciones:

$$\int_{S_0} [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{E}}_x] e^{j\gamma\rho\cos\chi} dS = \dot{\mathbf{F}}_E, \qquad \text{(VIII.8)}$$

$$\int_{S_0} [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{H}}_y] e^{j\gamma\rho\cos\chi} dS = \dot{\mathbf{F}}_H. \qquad \text{(VIII.9)}$$

Cabe notar que en el caso considerado los productos vectoriales que se encuentran bajo las integrales son magnitudes constantes y se las podría sacar fuera del signo de la integral, es decir, escribir en la forma

$$\dot{\mathbf{F}}_E = [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{E}}_x] \int_{S_0} e^{j\gamma\rho\cos\chi} dS, \qquad \text{(VIII.10)}$$

$$\dot{\mathbf{F}}_H = [\mathbf{1}_z \dot{\mathbf{H}}_y] \int_{S_0} e^{j\gamma\rho\cos\chi} dS. \qquad \text{(VIII.11)}$$

Al sustituir las designaciones introducidas en las fórmulas (VIII.6) y (VIII.7), obtenemos

$$\dot{\mathbf{H}}_{\Sigma} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{\mathbf{F}}_H \right) + \frac{1}{4\pi\omega\tilde{\mu}_a} \operatorname{grad} \operatorname{div} \left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{\mathbf{F}}_E \right) +$$

$$+ \frac{j\omega\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi} \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{\mathbf{F}}_E, \qquad \text{(VIII.12)}$$

$$\dot{\mathbf{E}}_{\Sigma} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{\mathbf{F}}_E \right) - \frac{1}{4\pi\omega\tilde{\varepsilon}_a} \operatorname{grad} \operatorname{div} \left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{\mathbf{F}}_H \right) -$$

$$- \frac{j\omega\mu_a}{4\pi} \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \dot{\mathbf{F}}_H. \qquad \text{(VIII.13)}$$

Efectuemos las operaciones diferenciales en coordenadas esféricas y utilicemos las fórmulas (I.28), (I 29) y (I.30) aducidas en el Apéndice I. Además, al calcular los campos en la zona lejana, conservemos los términos cuyo orden no es inferior a $1/R$:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{\mathbf{F}}_H\right) \approx -1_\varphi \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{H_\theta}\right) + \\ + 1_\theta \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{H_\theta}\right) \approx \\ \approx 1_\theta j\gamma \frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{H_\theta} - 1_\theta j\gamma \frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{H_\varphi}. \qquad \text{(VIII.14)}$$

Análogamente,

$$\operatorname{rot}\left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{\mathbf{F}}_E\right) \approx 1_\varphi j\gamma \frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{E_\theta} - 1_\theta j\gamma \frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{E_\varphi}, \qquad \text{(VIII.15)}$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{\mathbf{F}}_E\right) \approx \frac{1}{R^2}\cdot\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{E_R}\right) \approx -j\gamma\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{E_R}, \qquad \text{(VIII.16)}$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{\mathbf{F}}_E\right) \approx 1_R\frac{\partial}{\partial R}\left(-j\gamma\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{E_R}\right) \approx$$

$$\approx -1_R j\gamma(-j\gamma)\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{E_R} = -1_R\gamma^2\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{E_R}, \qquad \text{(VIII.17)}$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{\mathbf{F}}_H\right) = -1_R\gamma^2\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{H_R}. \qquad \text{(VIII.18)}$$

Al realizar estas operaciones los vectores $\mathbf{E}_E$ y $\mathbf{F}_H$ fueron representados en forma de suma de las componentes en el sistema de coordenadas esféricas:

$$\dot{\mathbf{F}}_E = 1_R\dot{F}_{E_R} + 1_\varphi\dot{F}_{E_\varphi} + 1_\theta\dot{F}_{E\theta}, \qquad \text{(VIII.19)}$$

$$\dot{\mathbf{F}}_H = 1_R\dot{F}_{H_R} + 1_\varphi\dot{F}_{H_\varphi} + 1_\theta\dot{F}_{R\theta}. \qquad \text{(VIII.20)}$$

Sustituyamos las expresiones (VIII.14), (VIII.15), (VIII.17) (VIII.18), (VIII.19) y (VIII.20) en las fórmulas (VIII.12) y (VIII.13)

$$\dot{\mathbf{H}}_E = \frac{1}{4\pi}\left(1_\varphi j\gamma\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{H_\theta} - 1_\theta j\gamma\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{H_\varphi}\right) + \\ + \frac{j}{4\pi\omega\tilde{\mu}_a}\left(-1_R\gamma^2\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\dot{F}_{E_R}\right) + \\ + \frac{j\omega\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi}\cdot\frac{e^{-j\gamma R}}{R}\left(1_R\dot{F}_{E_R} + 1_\varphi\dot{F}_{E_\varphi} + 1_\theta\dot{F}_{E_\theta}\right).$$

Teniendo en cuenta que $\gamma^2 = \varphi^2 \tilde{\mu}_a \tilde{\varepsilon}_a$, obtenemos

$$\dot{\mathbf{H}}_\Sigma = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-j\gamma R}}{R} (1_\varphi j\gamma \dot{F}_{H_\theta} - 1_\theta j\gamma \dot{F}_{H_\varphi}) +$$

$$+ \left(-\frac{j\omega\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi} 1_R \dot{F}_{E_R} + \frac{j\omega\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi} 1_R \dot{F}_{E_R} \right) \frac{e^{-j\gamma R}}{R} +$$

$$+ \left(\frac{j\omega\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi} 1_\varphi \dot{F}_{E_\varphi} + \frac{j\omega\tilde{\varepsilon}_a}{4\pi} 1_\theta \dot{F}_{E_\theta} \right) \frac{e^{-j\gamma R}}{R}.$$

Al simplificar los términos semejantes y agrupar los versores se puede obtener la siguiente fórmula

$$\dot{\mathbf{H}}_\Sigma = \frac{j}{4\pi} \cdot \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \{1_\varphi (\gamma \dot{F}_{H_\theta} + \omega\tilde{\varepsilon}_a \dot{F}_{E_\varphi}) + 1_\theta (\omega\tilde{\varepsilon}_a \dot{F}_{E_\theta} - \gamma \dot{F}_{H_\varphi})\}. \quad \text{(VIII.21)}$$

Análogamente,

$$\dot{\mathbf{E}}_\Sigma = \frac{j}{4\pi} \cdot \frac{e^{-j\gamma R}}{R} \{1_\varphi (\gamma \dot{F}_{E_\theta} - \omega\mu_a \dot{F}_{H_\varphi}) + 1_\theta (-\omega\tilde{\mu}_a \dot{F}_{H_\theta} - \gamma \dot{F}_{E_\varphi})\}. \quad \text{(VIII.22)}$$

Como se infiere de las relaciones obtenidas en la zona lejana faltan las componentes radiales del campo. El campo es transversal. Las integrales $\dot{F}_E$ y $\dot{F}_H$ se calculan en el sistema de coordenadas cartesianas. Tomando en consideración que

$$[1_z \dot{E}_x] = 1_y \dot{E}_x,$$

$$[1_z \dot{H}_y] = -1_x \dot{H}_y,$$

estas integrales pueden representarse en la forma

$$\dot{F}_E = 1_y \dot{E}_x \int_{S_a} e^{j\gamma\rho\cos\chi} dS = 1_y \dot{E}_x \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} e^{j\gamma\rho\cos\chi} dx\, dy, \quad \text{(VIII.23)}$$

$$\dot{F}_H = -1_x \dot{H}_y \int_{S_a} e^{j\gamma\rho\cos\chi} dS = -1_x \dot{H}_y \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} e^{j\gamma\rho\cos\chi} dx\, dy. \quad \text{(VIII.24)}$$

Las funciones $\dot{F}_E$ y $\dot{F}_H$ entran en las fórmulas (VIII.21) y (VIII.22) en forma de componentes de coordenadas en coordenadas esféricas. El paso desde el sistema de coordenadas cartesianas hacia las esféricas se realiza por medio de fórmulas ordinarias:

$$\begin{aligned} \dot{F}_\varphi &= -\dot{F}_x \operatorname{sen}\varphi + \dot{F}_y \cos\varphi, \\ \dot{F}_\theta &= \dot{F}_x \cos\theta \cos\varphi + \dot{F}_y \cos\theta \operatorname{sen}\varphi. \end{aligned} \quad \text{(VIII.25)}$$

Bibliografia

1. *V. I. Lenin.* Materialismo y empiriocriticismo.
2. *Брудун Г. Д.* Справочник по международной системе единиц. Москва, 1963. (*Brudun G. D.* Guía del Sistema Internacional de unidades).
3. *Зиновьев А. Л., Филиппов Л. И.* Введение в теорию сигналов и цепей. Москва, 1975. (*Zinoviev A. L., Filippov L. I.* Introducción a la teoría de señales y circuitos).
4. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Москва, 1951. (*Kochin N. E.* Cálculo vectorial y principios del cálculo tensorial).
5. *R. Feynman, R. Leighton, M. Sands.* The Feynmen Lectuers on Physics. London 1963.
6. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. Москва, 1960. (*Guinzburg V. I.* Propagación de las ondas electromagnéticas en el plasma).
7. *Силин В. П., Рухадзе А. А.* Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. Москва, 1961. (*Silin V. P., Rujadze A. A.* Propiedades electromagnéticas del plasma y de los medios plasmoideos).
8. *Кузнецов Д. С.* Специальные функции Москва, 1965. (*Kuznetsov D. S.* Funciones especiales).
9. *E. T. Whittaker, G. N. Watson.* A course of modern analisis. An introduction to the general theory otinfinite processes and of analytic functions: with anaccountot the principal transcendental functions. Cambridge 1927.
10. *Купрадзе В. Д.* Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. Москва, 1950. (*Kupradze V. D.* Problemas de contorno de la teoría de oscilaciones y ecuaciones integrales).
11. *Васильев Е. Н.* Известия вузов. Радиофизика 2.588 (1959). (*Vasiliev E. N.* Noticias de los centros de enseñanza superior. Radiofísica).
12. *Васильев Е. Н. Серегина А. Р., Каменев В. Г.* Радиотехника и электроника. 1964, № 4. (Radiotecnia y electrónica).
13. *Poynting T.* On the transfer of Energie in the Electromagnetic Field. Trans. of Roy. soc. Part II. 1884 p. 343.
14. *Умов Н. А.* Уравнение движения энергии в телах (1874). Избранные сочинения. Москва, 1950. (*Umov N. A.* Ecuaciones de movimiento de la energía en los cuerpos).
15. *Леонтович М. А.* О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел. Исследования по распространению радиоволн. — Сб. II. Москва, 1948. (*Leontovich M. A.* Acerca de las condiciones límites aproximadas para el campo electromagnético sobre la superficie de cuerpos de buena conductibilidad. Estudios referentes a la propagación de ondas radioeléctricas).
16. *Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В.* Электромагнитные поля и волны. Москва, 1971. (*Goldshtein L. D., Zernov N. V.* Ondas y campos electromagnéticos).

17. *Баскаков С. Т.* Основы электродинамики. Москва, 1973. (*Baskakov S. I.* Fundamentos de electrodinámica).
18. *Красюк Н. П., Дымович Н. Д.* Электродинамика и распространение радиоволн. Москва, 1974. (*Krasiuk N. P., Dimovich N. D.* Electrodinámica y propagación de ondas radioeléctricas).
19. *Айзенберг Г. З.* Антенны ультракоротких волн. Москва, 1957. (*Aizenberg G. Z.* Antenas de ondas ultracortas).
20. *Поливанов К. М.* Теоретические основы электротехники. Теория электромагнитного поля. Т. 3. Москва 1975. (*Polivanov K. M.* Fundamentos teóricos de electrotecnia. Teoría del campo electromagnético).
21. *Поливанов К. М.* К 100-летию «Трактата об электричестве и магнетизме» Дж. К. Максвелла. Электричество. Т. 1, 2, 3, 1974. (*Polivánov K. M.* Para el 100 aniversario del «Tratado sobre la electricidad y el magnetismo» de J. C. Maxwell).
22. *Марков Г. Т., Чаплин А. Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. Москва — Ленинград, 1967. (*Markov G. T., Chaplin A. F.* Excitación de ondas electromagnéticas).
23. *Нетушил А. В., Поливанов К. М.* Основы электротехники. Ч. III, 1956. (*Netushil A. V., Polivanov K. M.* Fundamentos de electrotecnia).
24. Handbook of mathematical functions. With formulas, graphs and mathematical. 1964.

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción. Diríjan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.